National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2006
Svratka, Czech Republic, May 15 – 18, 2006
paper no. 248

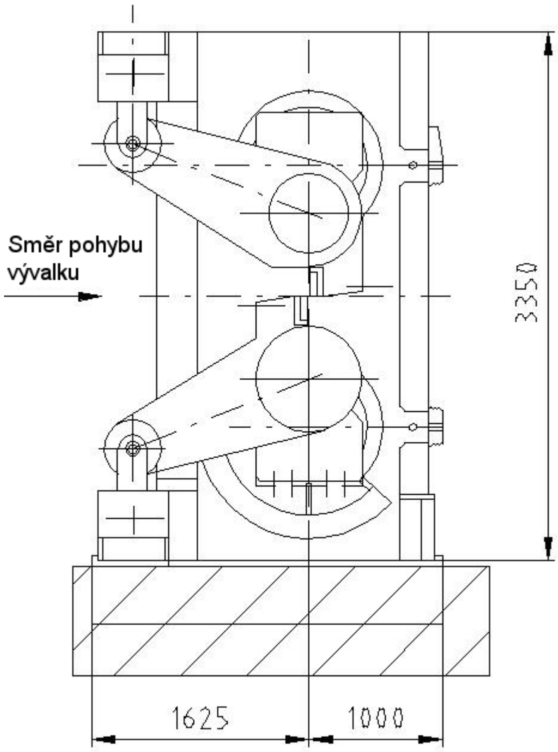
THE COMPUTATIONAL MODELING OF THE FLYING SHEARS DRIVE

A. Bubák*

Summary: *In the paper, the mathematical model of the flying shears drive is described. It consists of the four-bar linkage analysis, model of a DC motor including its current and velocity control and of the description of external loads.*

1. Úvod

Letmé klikové nůžky jsou specifické svými nároky na dynamiku pohonů. Ty musí být schopny urychlit čtyřkloubový mechanismus nůžek během necelé jedné otáčky z klidu na rychlost vývalku, která může dosahovat 1,5-6 m/s, a po ukončení střihu mechanismus opětovně zastavit. Střižná práce se v různých poměrech a fázích střihu odebírá z kinetické energie akumulované v mechanismu a z energie dodávané motorem. Důležitým kritériem pro výběr velikosti motoru je požadavek, aby vodorovná složka rychlosti nože neklesla během střihu pod rychlost vývalku. Vzhledem k tomu, že se jedná o velmi rychlý děj, při kterém hrají roli i takové faktory, jako např. reálná rychlost nárůstu proudu ve vinutí motoru nebo tahová deformace vývalku vzniklá v důsledku nestejné vodorovné rychlosti nože a vývalku, jsou tradičně používané výpočtové vztahy založené na bilanci celkových energií poměrně nepřesné. Z toho důvodu byl sestaven parametrický simulační model pohonu nůžek založený na časové analýze fáze rozběhu i střihu, který usnadňuje vývojářům především volbu počtu motorů, jejich kroutících momentů a převodových poměrů vložených převodů. V omezeném rozsahu (zatím) pak umožňuje určitou optimalizaci rozměrů klikového mechanismu.



Obr.1: boční pohled na čtyřkloubový mechanismus letmých klikových nůžek

Vzhledem k tomu, že matematický model pohonu je soustavou 33 algebro-diferenciálních rovnic, byl pro řešení zvolen simulační software DYNAST. Následující text je zaměřen na popis jednotlivých částí simulačního modelu.

* Ing. Antonín Bubák, Ph.D., ŽĎAS, a.s.; Strojírenská 6; 591 71 Žďár nad Sázavou; tel.: +420 566.643 461, fax: +420 566 642 817; e-mail: a.bubak@volny.cz,

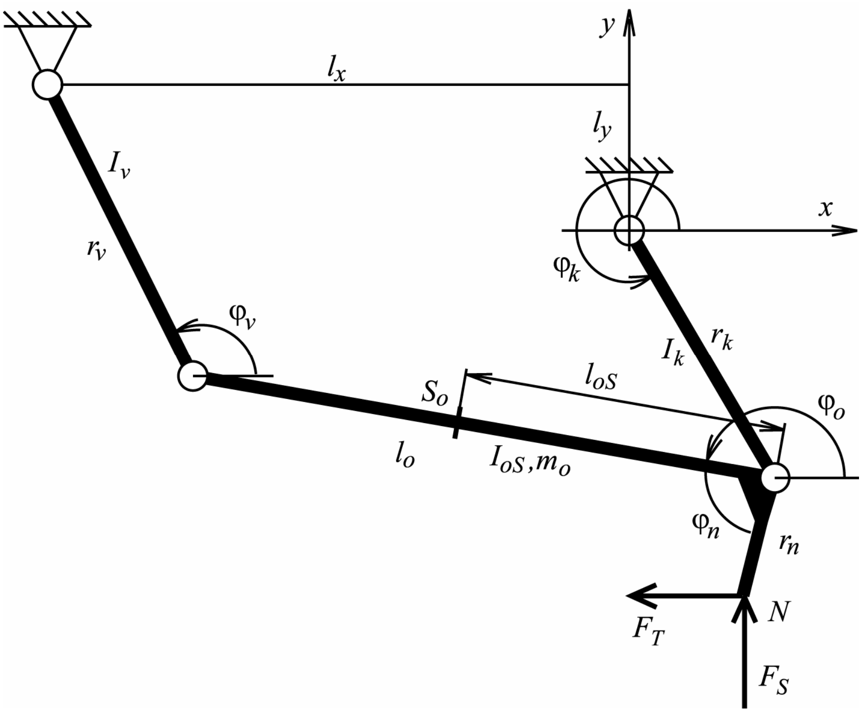
2. Teoretická část

Základem simulačního modelu pohonu letmých nůžek je matematický popis pohybu čtyřkloubového mechanismu, který je získán standardní metodou řešení pohybu soustav tuhých těles v následující posloupnosti:

- výpočet polohy hnaných členů v závislosti na poloze hnacího členu
- výpočty rychlostí a zrychlení hnaných členů
- sestavení pohybových rovnic, výpočty vnějších sil a momentů

Jednotlivé kroky řešení jsou přizpůsobeny simulačnímu programu DYNAST.

2.1 Kinematika



Obr.2: kinematické schéma horního čtyřkloubového mechanismu

Pro matematický popis byl zvolen *horní* čtyřkloubový mechanismus nůžek, jehož kinematické schéma je na obr. 2. Okamžitá poloha mechanismu je dána soustavou dvou vazebních rovnic

$$r_k \cos\varphi_k + l_o \cos\varphi_o + r_v \cos\varphi_v + l_x = 0, \tag{1a}$$

$$r_k \sin\varphi_k + l_o \sin\varphi_o + r_v \sin\varphi_v - l_y = 0, \tag{1b}$$

které se získají vektorovou metodou. Nezávislou souřadnicí je natočení kliky φ_k, neznámými souřadnicemi je natočení ojnice φ_o a vahadla φ_v. Rovnice (1a),(1b) jsou nelineární a schopnost jejich řešení byla rozhodující pro výběr simulačního softwaru.

Derivací vazebních rovnic podle času

$$-r_k\dot{\varphi}_k \sin\varphi_k - l_o\dot{\varphi}_o \sin\varphi_o - r_v\dot{\varphi}_v \sin\varphi_v = 0 \tag{2a}$$

$$r_k\dot{\varphi}_k \cos\varphi_k + l_o\dot{\varphi}_o \cos\varphi_o + r_v\dot{\varphi}_v \cos\varphi_v = 0 \tag{2b}$$

se získají explicitní vztahy pro úhlové rychlosti otáčení ojnice (3) a vahadla (4)

$$\omega_o = -\frac{r_k \sin(\varphi_k - \varphi_v)}{l_o \sin(\varphi_o - \varphi_v)}\omega_k \ , \tag{3}$$

$$\omega_v = \frac{r_k \sin(\varphi_k - \varphi_o)}{r_v \sin(\varphi_o - \varphi_v)} \omega_k \ , \tag{4}$$

přičemž bylo zavedeno značení: $\dot{\varphi}_k = \omega_k$, $\dot{\varphi}_o = \omega_o$, $\dot{\varphi}_v = \omega_v$

Ojnice vykonává obecný rovinný pohyb, který je základním rozkladem převeden na unášivý pohyb posuvný, definovaný pohybem těžiště S_o viz vztahy (5), (6), a relativní rotaci kolem těžiště s úhlovou rychlostí dříve vyjádřenou vztahem (3).

$$x_{So} = r_k \cos\varphi_k + l_{oS} \cos\varphi_o \tag{5a}$$

$$y_{So} = r_k \sin\varphi_k + l_{oS} \sin\varphi_o \tag{5b}$$

$$v_{xSo} = \dot{x}_{So} = \omega_k \left[-r_k \sin\varphi_k + l_{oS} \sin\varphi_o \frac{r_k \sin(\varphi_k - \varphi_v)}{l_o \sin(\varphi_o - \varphi_v)} \right] \tag{6a}$$

$$v_{ySo} = \dot{y}_{So} = \omega_k \left[r_k \cos\varphi_k - l_{oS} \cos\varphi_o \frac{r_k \sin(\varphi_k - \varphi_v)}{l_o \sin(\varphi_o - \varphi_v)} \right] \tag{6b}$$

Pro sestavení pohybových rovnic je dále důležité vyjádřit polohu a rychlost pohybu břitu nástroje N, neboť zde leží působiště vnějších sil.

$$x_N = r_k \cos\varphi_k + r_n \cos(\varphi_o + \varphi_n) \tag{7a}$$

$$y_N = r_k \sin\varphi_k + r_n \sin(\varphi_o + \varphi_n) \tag{7b}$$

$$v_{xN} = \dot{x}_N = \omega_k \left[-r_k \sin\varphi_k + r_n \sin(\varphi_o + \varphi_n) \frac{r_k \sin(\varphi_k - \varphi_v)}{l_o \sin(\varphi_o - \varphi_v)} \right] = \omega_k \cdot f_{xN} \tag{8a}$$

$$v_{yN} = \dot{y}_N = \omega_k \left[r_k \cos\varphi_k - r_n \cos(\varphi_o + \varphi_n) \frac{r_k \sin(\varphi_k - \varphi_v)}{l_o \sin(\varphi_o - \varphi_v)} \right] = \omega_k \cdot f_{yN} \tag{8b}$$

Vztahy odvozené pro rychlosti jednotlivých členů mají obecně tvar funkčních závislostí

$$v_i = \omega_k \cdot f_i(\varphi_k, \varphi_o, \varphi_v) \quad \text{popř.} \quad \omega_i = \omega_k \cdot f_i(\varphi_k, \varphi_o, \varphi_v)$$

Funkce f_i jsou zdvihové závislosti mezi pohybem kliky a daného členu. Při sestavení simulačního modelu v programu DYNAST se těchto funkcí s výhodou využívá k definici převodového poměru submodelu „Energy- transfer transformer“ (převod).

2. 2 Dynamika

Kinetická energie čtyřkloubového mechanismu se získá součtem pohybových energií jednotlivých členů. Setrvačné momenty kliky I_k a vahadla I_v jsou vztaženy k ose otáčení, moment setrvačnosti ojnice k těžišti S_o.

$$E_{k1} = \frac{1}{2} I_k \omega_k^2 + \frac{1}{2} m_o \left(v_{xoS}^2 + v_{yoS}^2 \right) + \frac{1}{2} I_{oS} \omega_o^2 + \frac{1}{2} I_v \omega_v^2 \tag{9}$$

Pro kinetickou energii celého pohonu nůžek platí

$$E_k = 2E_{k1} + \frac{1}{2} I_{Mred} \omega_k^2 = \frac{1}{2} I_{red} \omega_k^2 ,$$

Kde I_{Mred} je celkový moment setrvačnosti motorů a vložených převodů redukovaný na osu otáčení kliky. Celkový moment setrvačnosti mechanismu nůžek včetně pohonu redukovaný na osu otáčení kliky je

$$I_{red} = I_{Mred} + 2I_k + 2\frac{m_o \left(v_{xoS}^2 + v_{yoS}^2 \right) + I_{oS} \omega_o^2 + I_v \omega_v^2}{\omega_k^2} \tag{10}$$

Dosazením (6a),(6b),(3),(4) do (10) se ω_k vykrátí.

Pohybovou rovnici mechanismu lze sestavit např. metodou redukce.

$$I_{red} \ddot{\varphi}_k + \frac{1}{2} \frac{dI_{red}}{d\varphi_k} \omega_k^2 = M_{red} \tag{11}$$

Její numerické řešení komplikuje derivace redukovaného momentu setrvačnosti podle natočení kliky, která není známá. Tento problém však lze obejít následující úpravou:

$$\frac{1}{2} \frac{dI_{red}}{d\varphi_k} \omega_k^2 = \frac{1}{2} \frac{dI_{red}}{d\varphi_k} \frac{dt}{dt} \omega_k^2 = \frac{1}{2} \frac{dI_{red}}{dt} \frac{dt}{d\varphi_k} \omega_k^2 = \frac{1}{2} \frac{dI_{red}}{dt} \frac{1}{\omega_k} \omega_k^2 = \frac{1}{2} \frac{dI_{red}}{dt} \omega_k \tag{12}$$

Získat časovou derivaci momentu setrvačnosti nečiní simulačním softwarům potíže. Upravená pohybová rovnice má tedy tvar

$$I_{red} \ddot{\varphi}_k + \frac{1}{2} \frac{dI_{red}}{dt} \omega_k = M_k \cdot n_{mot} \cdot i + F_x \cdot f_{xN} + F_y f_{yN} \tag{13}$$

Kroutící moment jednoho motoru M_k je v pohybové rovnici násoben počtem motorů a převodovým poměrem i. Vnější síly F_x, F_y jsou celkové (nikoliv přepočtené na jeden čtyřkloubový mechanismus), funkce f_{xN}, f_{yN} jsou zdvihové závislosti definované vztahy 8a, 8b. V simulačním schématu na obr. 3 jsou zadány jako parametry převodových bloků omk2vxN, omk2vyN.

2.3 Model motoru a regulace

Simulační model motoru vychází z obvyklého náhradního schématu stejnosměrného motoru, pro který platí dvě diferenciální rovnice:

$$u = R_a i + L_a \frac{di}{dt} + U_e \ , \qquad (14)$$

$$I_{red} \frac{d\omega}{dt} = M_k - M_z \ , \qquad (15)$$

kde R_a, L_a je odpor resp. indukčnost vinutí motoru, U_e elektromotorické napětí, M_k kroutící moment motoru a M_z vnější zátěžný moment. Pro U_e a M_k platí:

$$M_k = k_M . i \ , \qquad (16)$$

$$U_e = k_M . \omega \ . \qquad (17)$$

Momentová konstanta motoru k_M je dána poměrem katalogových hodnot jmenovitého proudu a odpovídajícího kroutícího momentu motoru

$$k_M = M_{k\max} / I_{\max} \ . \qquad (18)$$

Simulační schéma pohonu je na obr. 3. Rovnice (14) je ve stavové podobě (19) zadána v bloku `sum1`:

$$\frac{di}{dt} = \frac{u}{L_a} - \frac{k_M}{L_a}\omega - \frac{R_a}{L_a} i \ = \mathrm{dIdt} \ . \qquad (19)$$

Vypočtená hodnota časové derivace proudu je dále zpracována v bloku omezovače (diLim), který omezuje nejvyšší dovolenou rychlost nárůstu proudu na dI_{max}.

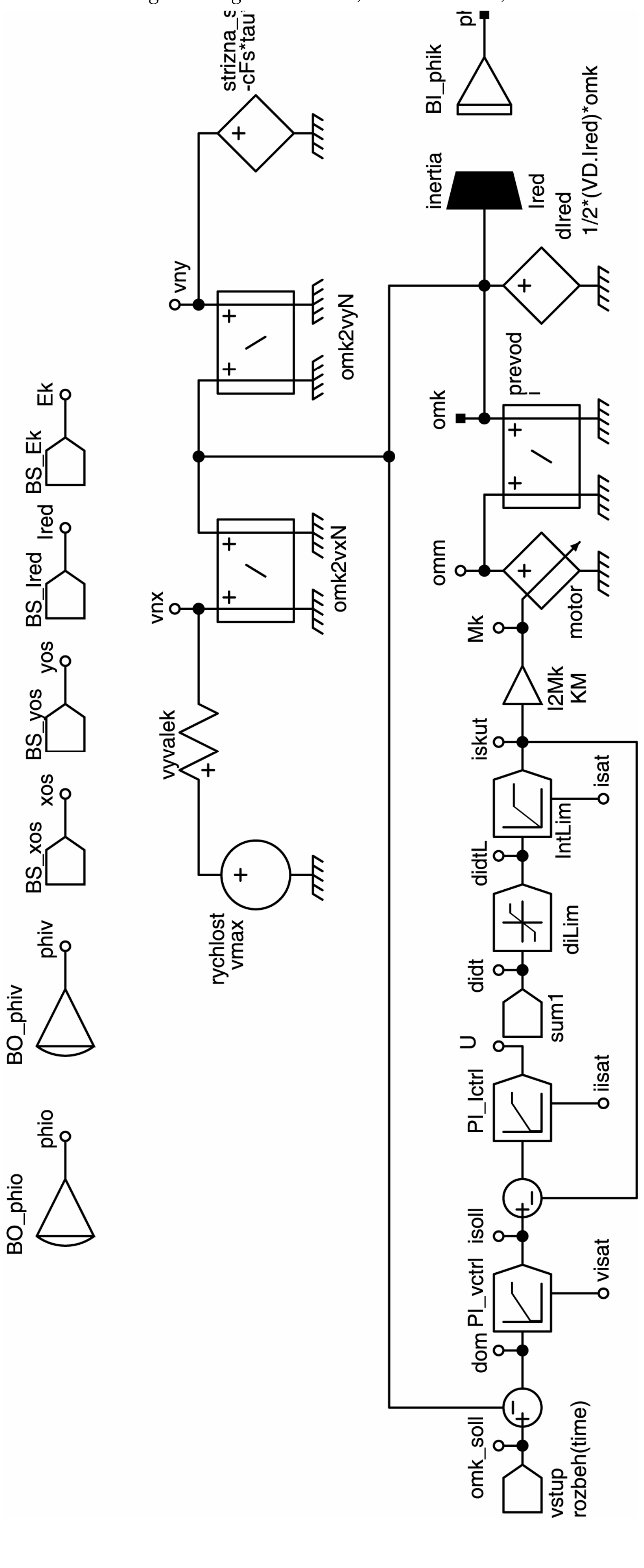
$$\mathrm{didtL} = \left(\frac{di}{dt}\right)_{\lim} = \begin{cases} di/dt \Leftrightarrow \left|di/dt\right| < dI_{\max} \\ dI_{\max} \cdot sign(di/dt) \Leftrightarrow \left|di/dt\right| \geq dI_{\max} \end{cases} \qquad (20)$$

Výstup je v bloku IntLim integrován s omezením maximální hodnoty proudu na I_{max}:

$$\mathrm{iskut} = \int f(t)dt$$

$$f(t) = \begin{cases} \left(\frac{di}{dt}\right)_{\lim} & \Leftrightarrow \quad \left|\left(\frac{di}{dt}\right)_{\lim}\right| < I_{\max} \\ \left(\frac{di}{dt}\right)_{\lim} & \Leftrightarrow \quad \left(\left|\left(\frac{di}{dt}\right)_{\lim}\right| \geq I_{\max}\right) \wedge \left(\left(\frac{di}{dt}\right)_{\lim} \cdot \int \left(\frac{di}{dt}\right)_{\lim} dt < 0\right) \\ 0 & \Leftrightarrow \quad \left(\left|\left(\frac{di}{dt}\right)_{\lim}\right| \geq I_{\max}\right) \wedge \left(\left(\frac{di}{dt}\right)_{\lim} \cdot \int \left(\frac{di}{dt}\right)_{\lim} dt > 0\right) \end{cases} \qquad (21)$$

Hodnota skutečného proudu protékajícího vinutím motoru I_{skut} je násobena momentovou konstantou k_M (blok I2Mk), čímž se získá hodnota kroutícího momentu jednoho motoru M_k. Ta je dále násobena počtem motorů n_{mot} a zadána jako proměnný parametr zdroje momentu (motor). Mechanická část modelu je modelována mnohapólovými prvky, jejichž propojení souvisí s přenosem mechanického výkonu. Rotační pohyb hřídele motoru daný úhlovou rychlostí ω_M (označ. omm) se blokem prevod převádí na rotační pohyb kliky $\omega_k = \omega_M / i$. Kroutící moment motorů je zároveň násoben převodovým poměrem i. V uzlu omk platí rovnice silové rovnováhy (13).

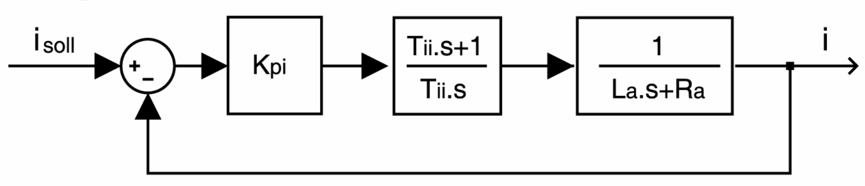


Obr.3: Simulační model pohonu nůžek sestavený kombinací blokového a mnohapólového modeování v programovém prostředí DYNASTu

Od hodnoty skutečného proudu iskut je odvozena zpětná vazba proudové regulace motoru. Jejím cílem je potlačit vliv indukčnosti vinutí a zlepšit dynamiku silového řízení motoru pro nadřízenou regulaci rychlosti. Pro regulátor proudu je uvažován dle obvyklých zvyklostí typ PI s omezeným výstupem integrační složky daným maximálním napětím motoru U_{max}. Pro stanovení proporciálního zesílení K_{pi} regulátoru proudu byl odvozen exaktní vztah, jehož parametrem je požadované propustné pásmo amplitudové frekvenční charakteristiky proudové regulace BW_i *[Hz]* a integrační časová konstanta regulátoru T_{ii}.

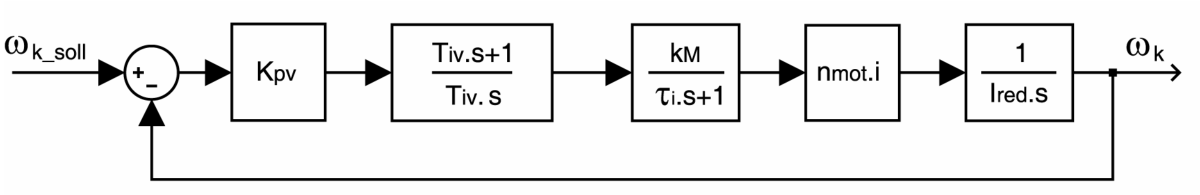
$$K_{pi} = \frac{R_a T_{ii}\Omega_i + \sqrt{2R_a^2 T_{ii}^2 \Omega_i^2 + T_{ii}^2 L_a^2 \Omega_i^4 - 2T_{ii} L_a \Omega_i^2 - 1}}{\Omega_i T_{ii}}, \qquad \Omega_i = 2\pi(BW_i) \qquad (22)$$

Výpočtové schéma pro vztah (22) je na obr. 4.



Obr. 4: Simulační schéma proudové regulace motoru

Velikost propustného pásma BW_i bývá v rozsahu 500-1200 Hz, příslušná integrační časová konstanta T_{ii} = 8~4 ms.
Rychlostní zpětná vazba je odvozena od úhlové rychlosti otáčení kliky. Výpočtové blokové schéma rychlostní regulace je na obr. 5. Proudová smyčka je v něm modelována přenosem prvního řádu s časovou konstantou $\tau_i = 1/2\pi(BW_i)$.



Obr.5: Simulační schéma rychlostní regulace

Proporciální zesílení K_{pv} rychlostního regulátoru se vypočte podle exaktního vztahu (23), jehož parametrem je, podobně jako u proudové regulace, požadované propustné pásmo amplitudové frekvenční charakteristiky proudové regulace BW_v *[Hz]* a integrační časová konstanta rychlostního regulátoru T_{iv}.

$$K_{pv} = \frac{1}{2}\frac{\left(-2T_{iv}\tau_i\Omega_v^2 - 2 + 2\sqrt{(\tau_i\Omega_v + T_{iv}\Omega_v)^2 + 2(1+T_{iv}^2\tau_i^2\Omega_v^4)}\right)\Omega_v^2 T_{iv}}{(1+T_{iv}^2\Omega_v^2)C}, \qquad (23)$$

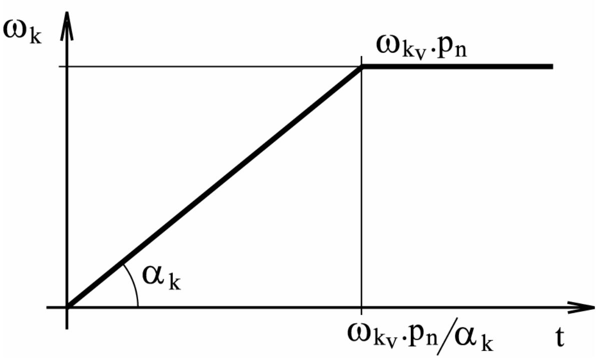
kde $\Omega_v = 2\pi(BW_v)$, $C = \dfrac{k_M n_{mot} i}{I_{red}}$

Ke kontrole dynamických vlastností regulačních smyček pohonu slouží program knuzky_reg.prb.
Pro výpočty je třeba zadat přibližně střední hodnotu Ired_avg celkového momentu setrvačnosti nůžek Ired zjištěnou z výpočtu programem `knuzky_k.prb` viz příklad na str.12.

Rozběh nůžek je realizován rampovou funkcí podle obr. 6, která je zadávána jako žádaná hodnota otáček regulátoru rychlosti nůžek omk_soll. Strmost rampy je dána úhlovým zrychlením α_k , které se stanoví ze vztahu

$$\alpha_k = \frac{1}{2}\frac{(\omega_{kv} \cdot p_n)^2}{\varphi_{ks} - \varphi_{k0}} \tag{24}$$

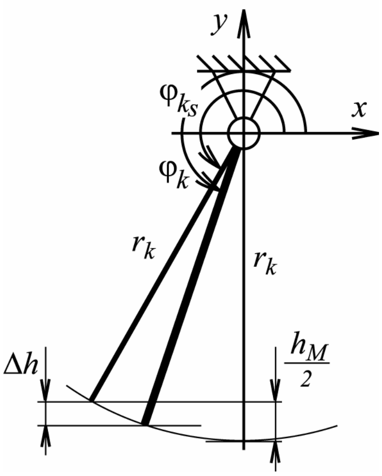
kde $\omega_{kv} \cdot p_n$ je požadovaná hodnota úhlové rychlosti otáčení kliky zvětšená o přirychlení a φ_{ks} je úhel natočení kliky odpovídající prvnímu kontaktu nástroje s vývalkem (viz obr.7).



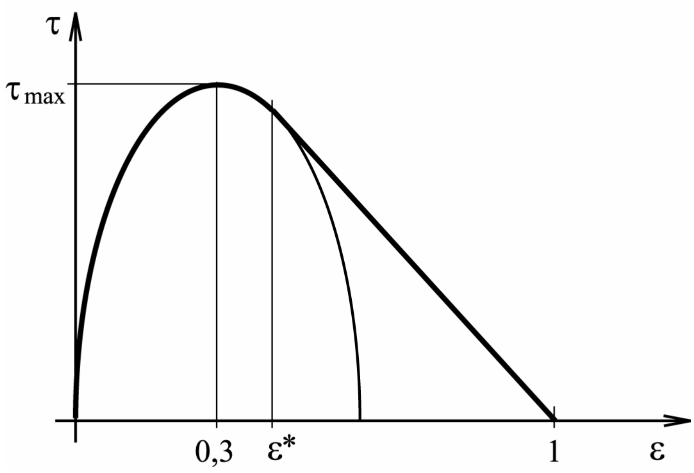
Obr.6: Rozběhová funkce

2.4 Vnější silové zatížení

Silové zatížení nůžek se předpokládá dvojí:
Vertikální zatížení dané střižným odporem materiálu (v obr. 2 označ. F_S)
Horizontální zatížené dané tahovou deformací vývalku (v obr. 2 označ. F_T)



Obr. 7: Geometrické schéma pro výpočet nastřižení



Obr. 8: Průběh střižného odporu

Průběh střižného odporu je nahrazen elipsou a přímkou (obr.8) v závislosti na nastřižení ε

$$\tau = \begin{cases} \tau_{max}\sqrt{1-\left(\dfrac{\varepsilon-0,3}{0,3}\right)^2} & \varepsilon < \varepsilon^* \\ \dfrac{\tau_{max}}{0,6325}(1-\varepsilon) & \varepsilon > \varepsilon^* \end{cases} \qquad \varepsilon^* = 0,4286 \tag{25}$$

kde

$$\varepsilon = \frac{2\Delta h}{h_M}, \tag{26}$$

$$\Delta h = \frac{h_M}{2} - r_k(1+\sin\varphi_k) \tag{27}$$

pozn. protože $\varphi_k \in \langle 180°; 270°\rangle$ je hodnota $\sin\varphi_k$ v rovnici (26) záporná.

Pro střižnou sílu pak platí

$$F_S = c_{Fs} \cdot \tau(\varepsilon) \cdot S \qquad (28)$$

Korekční součinitel $c_{Fs}=(1{,}1\text{-}1{,}25)$ zohledňuje zvětšení střižné síly v důsledku otupení nástroje.

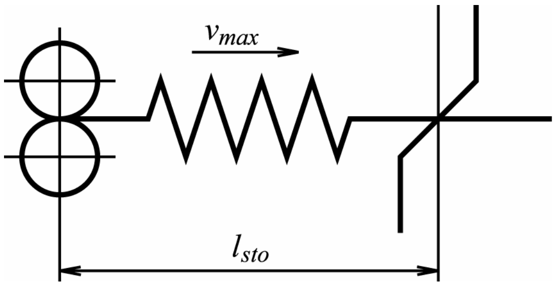
Střižnou sílou je zatížen horní i dolní klikový mechanismus, a proto musí být do simulačního modelu zavedena dvakrát.

Tahová síla se stanoví ze vztahu

$$F_T = \frac{SE}{l_{sto}} \int (v_{xN} - v_{\max}) dt \qquad (29)$$

kde S je plocha průřezu stříhaného materiálu, E modul pružnosti vývalku ($E=10^{11}$ Pa), l_{sto} vzdálenost nůžek od stolice (obr. 9) a v_{max} je rychlost vývalku.

Síla F_T je kladná, pokud se vývalek natahuje, záporná pokud se stlačuje.



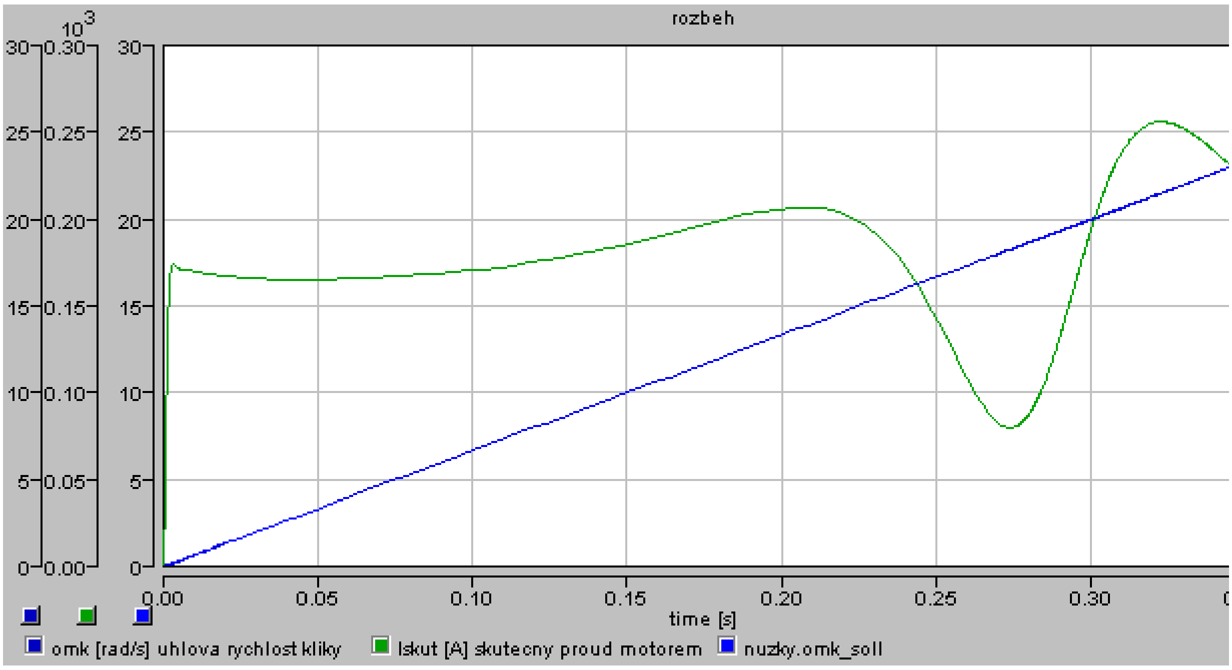
Obr. 9: Válcovací trať – vzdálenost stolice a nůžek je l_{sto}.

Konečný tvar pohybové rovnice (13) po dosazení vztahů (28) a (29) je

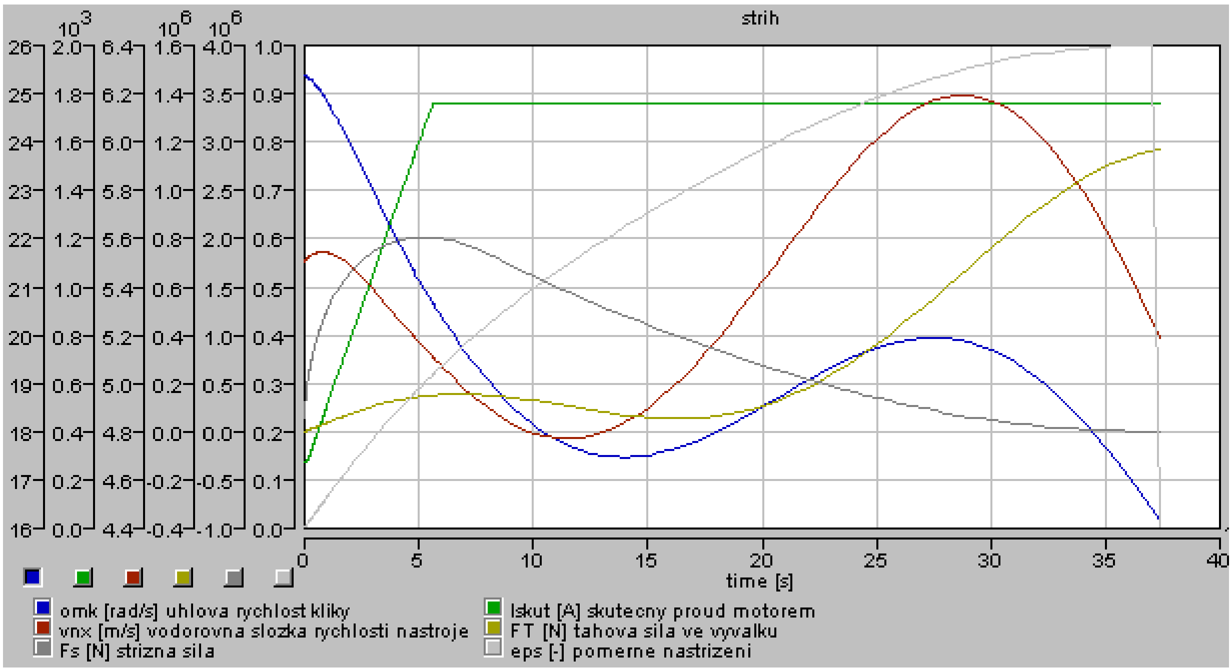
$$I_{red}\ddot{\varphi}_k + \frac{1}{2}\frac{dI_{red}}{dt}\omega_k = M_k \cdot n_{mot} \cdot i - F_T \cdot f_{xN} - 2F_S f_{yN} \qquad (30)$$

3. Příklady numerických výpočtů

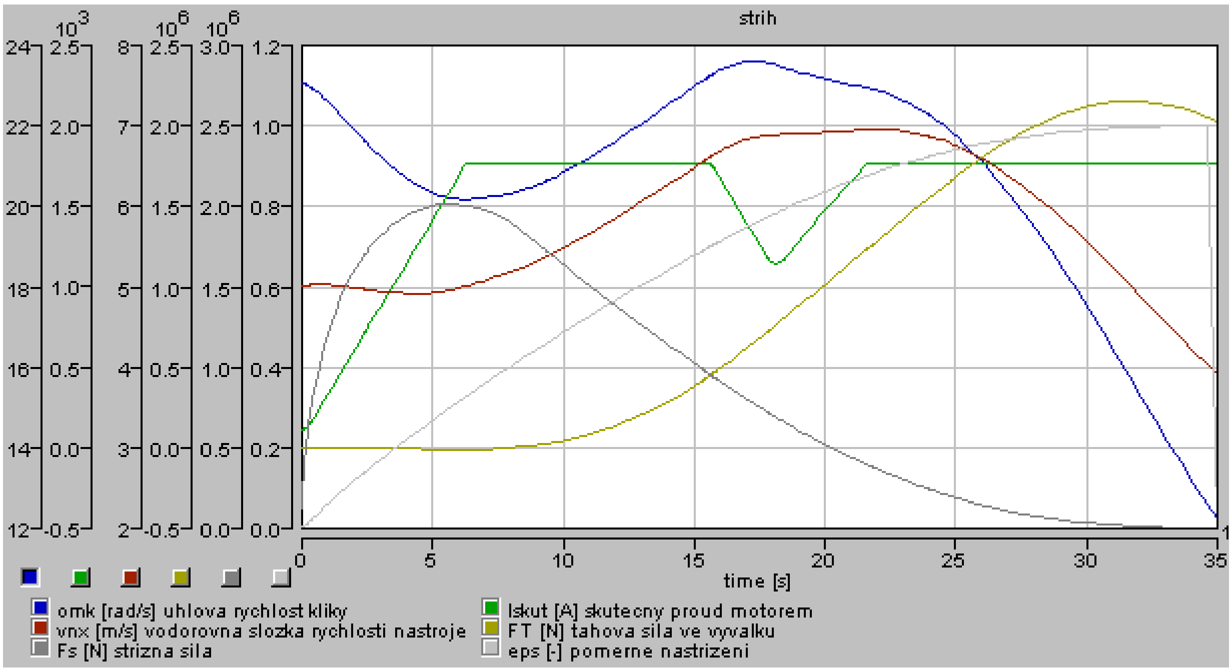
Ve výsledcích vypočtených pro střih je důležité sledovat časový průběh horizontální rychlosti nástroje a nastřižení `eps`. Horizontální rychlost nástroje by neměla poklesnout pod rychlost vývalku, což se projeví mj. změnou znaménka tahové síly ve vývalku v záporné. Průběh proudu motorem může dosahovat svého maxima. To svědčí o tom, že je jeho kroutící moment plně využíván pro střih (obr.13). V případě nedosažení maximální hodnoty proudu je možné, že je předimenzován. Z výsledků kinematické analýzy vyplývá, že mechanismus má v oblasti střihu snahu při konstantních otáčkách kliky horizontální rychlost nástroje zvyšovat. To se projeví zejména v případě, kdy je motor příliš silný. Horizontální složka rychlosti pak během střihu roste a energie se akumuluje v tahové deformaci vývalku (extrémní nárůst tahové síly) viz obr. 14. Na obr. 15 jsou vyneseny výsledky pro opačný případ slabého pohonu. Horizontální rychlost nástroje klesá pod rychlost vývalku. Deformační síla vývalku má záporné znaménko, což signalizuje jeho stlačování a tudíž nežádoucí zvlnění.



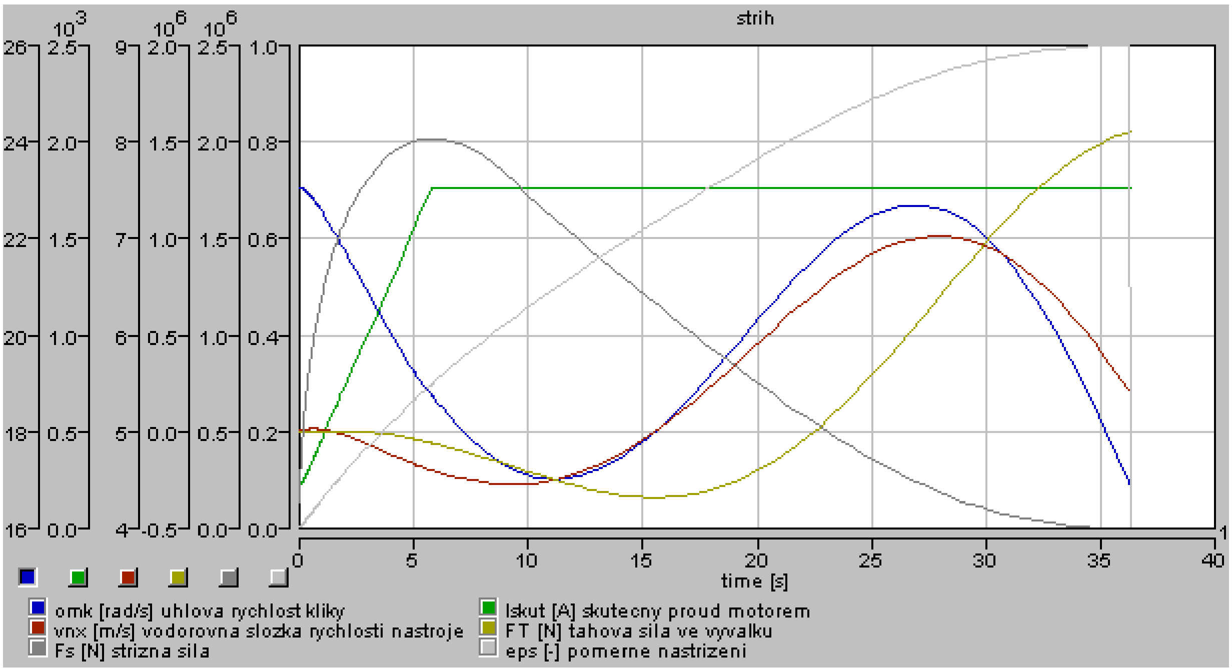
Obr.12: Rozběh klikových nůžek. Žádaný průběh úhlové rychlosti otáčení kliky `nuzky.omk_soll` a skutečný průběh `omk` se přibližně kryjí. Proud motorem dosahuje špičkově 260 A což je 19% maximální hodnoty (1356 A)



Obr.13: Průběh střihu s přirychlením nástroje o 10% na 5,5 m/s (rychlost vývalku 5m/s) Proud ve vinutí (`Iskut`) vzroste po začátku střihu na maximální hodnotu zvětšenou o dovolené přetížení (1,3.1356=1763 A). Tento nárůst je dán reálnou hodnotou rychlosti nárůstu proudu (200.1356 A/s) , a proto není skokový nýbrž rampový s dobou trvání 1763/(200.1356) =6,5 ms. Horizontální rychlost nástroje po započetí střihu klesá a krátkodobě klesne pod rychlost vývalku, což se projeví uvolněním tahové deformace vývalku, která ovšem nedosáhne záporné hodnoty (tlak). V druhé části střihu již dochází k urychlování nůžek.



Obr.14: Průběh střihu s příliš velkým kroutícím momentem pohonu
Oproti výpočtu v obr. 13 je v tomto případě dvojnásobný počet motorů. Proud ve vinutí (`Iskut`*) vzrostl po začátku střihu na max. hodnotu, horizontální rychlost nástroje díky tomu neklesá. Po poklesu střižné síly dochází k opětovnému urychlování mechanismu (*`omk` *a* `vnx` *roste), což jde na vrub nárůstu tahové síly vývalku.*



Obr.15: Průběh střihu s malým kroutícím momentem pohonu
Oproti výpočtu v obr. 13 je zde poloviční počet motorů. Přestože proud dosahuje své maximální hodnoty, vodorovná složka rychlosti vývalku ihned klesá pod synchronní hodnotu 5 m/s, což vede k záporným hodnotám síly ve vývalku. Vývalek je tedy stlačován a tudíž dochází k jeho nežádoucímu zvlnění.

4. Závěr

Simulační model pohonu nůžek byl vytvořen v rámci technického rozvoje f. ŽĎAS, a.s. v průběhu roku 2005. Umožňuje s velkou přesností vypočítat potřebné údaje pro volbu co možná nejvhodnějšího pohonu klikových nůžek a minimalizovat tím zbytečné výkonové rezervy pohonu, což je důležité z hlediska snížení pořizovacích nákladů výrobku.

Literatura

[1] Souček,P.: *Servomechanismy ve výrobních strojích*. ČVUT, Praha 2004.
[2] Interní literatuta f. ŽĎAS, a. s.