



INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005

NÁRODNÍ KONFERENCE

s mezinárodní účastí

Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

TRANSMISSION ERROR MEASUREMENTS USING THE REAL TIME HILBERT TRANSFORMER

Jiří Tůma*

Summary: *The paper deals with the problem of angular vibration measurements. The source of information about angular vibrations is an incremental rotary encoder producing a string of impulses or another impulse generator. It is supposed that the impulse frequency is changed proportionally to the rotational frequency. The time record of an impulse signal is transformed to an analytical signal using the Hilbert transform. The approach to perform the Hilbert transform based on the FIR filter is discussed. The unwrapped phase of the analytical signal gives the rotation angle. Signals that are disturbed by noise are enhanced by filtration in the frequency domain. The measurement method described in the paper can be employed for inspection of the simple gear train transmission error as a tool for improving the design of the tooth profile and for quality control. The described signal processing method results in the time history of the transmission error during the few complete gear revolutions.*

1. Úvod

Autor tohoto referátu publikoval (2002 až 2005) jednu variantu postupu výpočtu chyby převodu (Transmission Error) soukolí ozubených kol na základě fázové demodulace impulsního signálu, který je fázově modulován úhlovými kmity každého ozubeného kola soukolí zvlášť. Pro měření jsou k hřídelím, na kterých jsou ozubená kola v záběru, připojeny úhlové snímače otočení. Záznam impulsního signálu z každého snímače je synchronně s otáčkami převzorkován tak, že jeden záznam pro analýzu odpovídá jednomu úplnému otočení ozubeného kola. Úhlové kmity jsou tímto postupem určeny pro každé ozubené kolo zvlášť. Vzájemný fázový posun jednotlivých záznamů je určen na základě vyhodnocení fázového posunu opakovaně měřeného pomocného signálu zrychlení na skříně převodovky společně s impulsním signálem úhlového snímače otočení. Při výpočtu fázového posunu je použito poznatku, podle kterého obě ozubená kola mají shodný časový průběh odezvy průměrného zubu ve zrychlení. Na základě časového posunu záznamů zrychlení jsou vzájemně posunuty záznamy impulsních signálů. Protože nelze stanovit, pro který pár zubů z obou ozubených kol průměrované záznamy za úplnou otáčku ozubených kol začínají, je vypočten průměrovaný záznam průběhu úhlových kmitů obou ozubených kol za otočení o jednu zubovou rozteč. Převod úhlových kmitů na změny délky kruhového oblouku na roztečných kružnicích

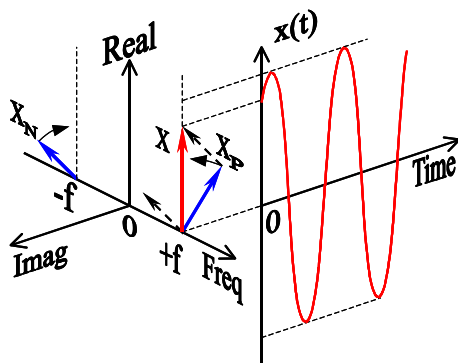
* Prof. Ing. Jiří Tůma, CSc.: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní; 17. listopadu 15; 708 33 Ostrava; tel.: +420 59 699 3482; e-mail: jiri.tuma@vsb.cz

dovoluje určit rozdíl ve vzájemném posunu obou ozubených kol ve směru tečny k roztečné kružnici a tím i veličinu, která se v literatuře označuje jako chyba převodu. Tato veličina, která se mění v intervalu otočení obou kol o jednu zubovou rozteč, je charakteristikou proměnlivosti tuhosti kontaktu zubů. Jak je známo, velikost změn tuhosti determinuje parametrické buzení kmitů a tím i vibrace a hluk převodovky na záběrové frekvenci a k této frekvenci příslušných harmonických.

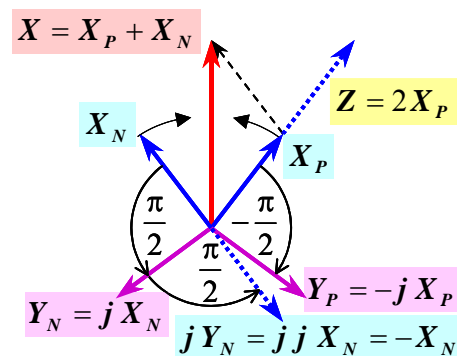
Výše popsaný algoritmus výpočtu chyby převodu využívá rychlou Fourierovou transformaci k výpočtu Hilbertovy transformace a tím i příslušného analytického signálu, jehož fáze určuje úhlové kmity. Jak již bylo uvedeno, lze zjistit jen zprůměrovaný časový průběh chyby převodu za otočení obou kol o jednu zubovou rozteč. Tato charakteristika může být vhodná k posouzení souvislosti parametrů ozubení a predikovaného hluku. Není však použitelná k prověření obvodové nerovnoměrnosti tvaru zubů v intervalu, kdy se opakuje záběr páru stejných zubů. K tomuto účelu je vypracován postup, který využívá výpočtu analytického signálu v reálném čase pomocí číslicového filtru.

2. Analytický signál

Analytický signál vznikne z reálného signálu, jestliže jsou z jeho spektra odstraněny všechny složky se zápornými frekvencemi. Postup výpočtu analytického signálu lze demonstrovat pomocí harmonického signálu, který lze modelovat dvojicí vektorů rotujících v komplexní rovině proti sobě shodnou konstantní rychlostí, přičemž oba vektory jsou v každém okamžiku komplexně sdružené. Vektor X_p rotuje v kladném směru a vektor X_N v záporném směru. Komplexní rovina je rozšířena v obr. 1 na třírozměrný prostor s třetí osou ve významu frekvence, která určuje úhlovou rychlost rotace ($\omega = 2\pi f$). Koncový bod součtu rotujících vektorů $X = X_p + X_N$ leží na reálné ose a jeho vzdálenost od počátku se mění v čase podle harmonické funkce $x(t) = |X| \cos(\omega t + \varphi)$.



Obr. 1 Model harmonického signálu

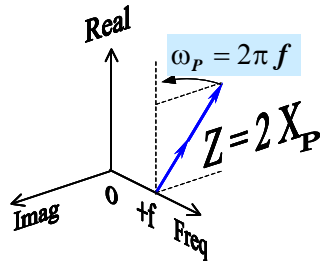


Obr. 2 Odvození analytického signálu

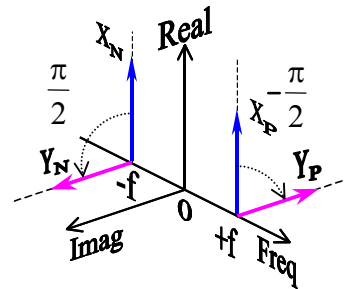
Hilbertova transformace signálu, který přísluší k vektoru X , je signál, který lze rovněž modelovat součtem dvou vektorů $Y = Y_p + Y_N$, které rotují shodnou rychlostí proti sobě jako složky vektoru X . O 90 stupňů pootočený vektor Y_N , tj. jY_N , kde j je komplexní jednotka, musí vyrušit vektor X_N , tj. platí $X_N - jY_N = 0$. Aby vektor Y měl koncový bod na reálné

ose, je třeba, aby vektory Y_P a Y_N byly vzájemně komplexně sdružené. Grafické zdůvodnění vazeb mezi zmíněnými vektory popisuje diagram na obr. 2.

Výsledek součtu $Z = X + jY$, označovaný jako analytický signál, má obsahovat jen složky, které rotují kladným směrem. Důsledkem výše uvedených vlastností je to, že platí $Z = 2X_P$, viz obr. 3.



Obr. 3 Analytický signál



Obr. 4 Analytický signál

Hilbertova transformace je užitečný nástroj k vytvoření komplexního signálu, který ve svém rozkladu obsahuje vektory rotující jen jedním směrem. U výše uvedeného příkladu harmonického signálu je výsledkem součtu vektor s konstantní délkou, která je shodná s amplitudou harmonického signálu. Hilbertovu transformaci lze demonstrovat na diagramu v obr. 4. Vektory, X_P a X_N příslušející výchozímu časovému signálu $x(t)$ (v příkladu na obr. 4 se jedná o funkci kosinus) se transformují otočením o 90 stupňů v opačném směru na vektory Y_P a Y_N , které příslušejí Fourierově transformaci časového signálu $y(t)$, jenž je Hilbertovou transformací výchozího signálu $y(t)$ (v příkladu na obr. 4 se jedná o funkci sinus)

V obr. 4 je znázorněn princip výpočtu Hilbertovy transformace pomocí Fourierovy transformace. Vzorkovaný signál je třeba pro výpočet rychlé Fourierovy transformace rozdělit do bloků, ze kterých se vypočte Fourierova transformace, jejíž složky se otočí o zmíněné úhly v závislosti, zda frekvence je menší než polovina vzorkovací frekvence (tzv. kladné frekvence) nebo větší než polovina vzorkovací frekvence (tzv. záporné frekvence). Po změnách fáze složek se provede zpětná Fourierova transformace, jejímž výsledkem je Hilbertova transformace. V tomto referátu však bude popsán postup, kdy výpočet FFT bude nahrazen FIR filtrem.

2. Výpočet analytického signálu s použitím FIR filtru

Z obr. 4 lze vytvoření Hilbertovy transformace popsat tak, že složky signálu s kladnou frekvencí se fázově zpozdí o $\pi/2$, což odpovídá násobení faktorem $-j$ a složky se zápornou frekvencí se fázově urychlí o $\pi/2$, což odpovídá násobení faktorem j . Frekvenční přenos soustavy, která se nazývá Hilbertův transformér (Hilbert Transformer), je tvaru

$$G_{HT}(j\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ j, & \omega < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Impulsní odezva soustavy s přenosem (1) je inverzní Fourierova transformace tohoto frekvenčního přenosu. Integrovaná funkce má bod nespojitosti pro $\omega = 0$ a integrál je

nevlastní, protože má nekonečné meze. Na dílčích intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$ nabývá nevlastní integral v limitě $-\infty$ a $+\infty$. Výpočet limit pro integrační meze je ve smyslu Cauchyho hlavních hodnot (V.P. - valeur principale, viz Koukal et al., 2002 nebo Cauchy principal value)

$$g_{HT}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{HT}(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega = V.P. \frac{1}{\pi t} \quad (2)$$

Impulsní odezva Hilbertova transforméru je nekauzální a obsahuje bod nespojitosti v čase $t = 0$. Takový filtr není realizovatelný.

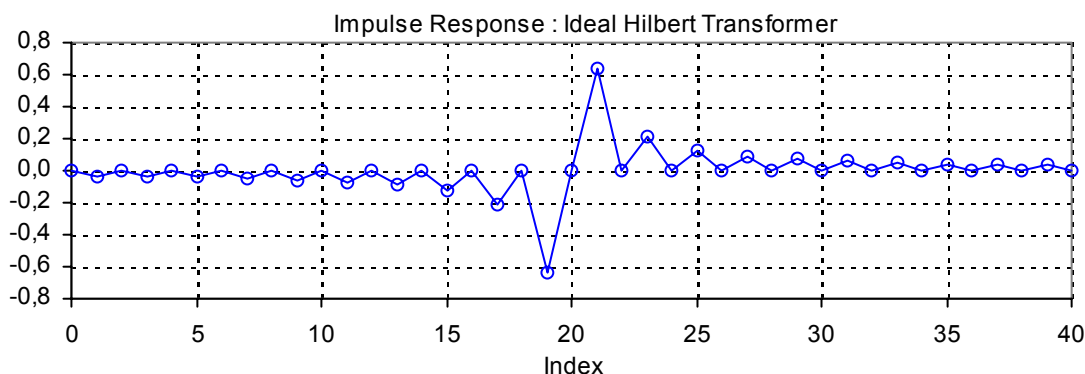
Přenos číslicového filtru, který realizuje Hilbertovou transformaci, má následující tvar

$$G_{HT}(\exp(j\omega)) = \begin{cases} -j, & +\pi > \omega > 0 \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases} \quad (3)$$

Impulsní odezva se vypočte podle vzorce

$$g_{HT}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} G_{HT}(j\omega) \exp(j\omega n) d\omega = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 2/\pi n, & n = 2k + 1 \end{cases} \quad (4)$$

kde n je celé číslo. Impulsní odezva číslicového filtru je také jako u spojitého přenosu nerealizovatelná podle vypočteného vzorce. Realizovatelnost odezvy se zajistí omezením počtu koeficientů tak, aby řád filtru byl konečný a sudý. Z nekausálního filtru vznikne kausální filtr s konečnou impulsní odezvou tak, že se tato impulsní odezva zpozdí o polovinu řádu filtru – viz obr. 5. Výsledný filtr bude mít konstantní skupinové zpoždění o velikosti 20 vzorkovacích intervalů.



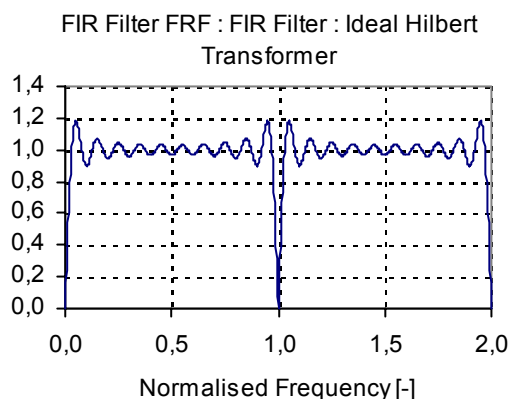
br.

Obr. 5 Impulsní odezva FIR filtru 20. řádu

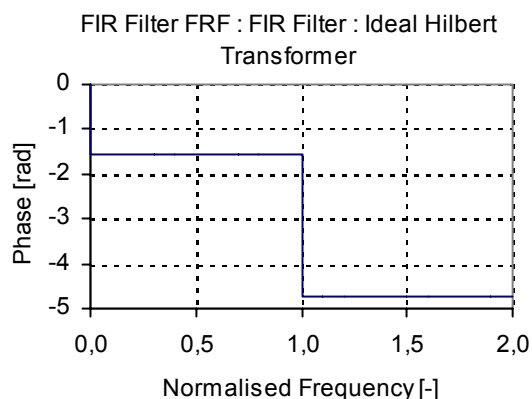
Výsledný FIR filtr je sudého řádu s antisymetrickými hodnotami koeficientů, což zaručuje linearitu závislosti fáze na frekvenci a tím i nezkreslení výstupního signálu filtru. Na obr. 6 a 7 je amplituda a fáze frekvenčního přenosu filtru. Frekvenční osa představuje poměrné hodnoty vzhledem k Nyquistově frekvenci. Amplituda přenosu vykazuje značné zvlnění, které může ovlivnit amplitudu postranních složek k nosné složce a tím vnést chybu do postupu výpočtu fáze.

V dalších výpočtech je však použit filtr řádu $n = 160$, který byl navržen algoritmem REMEZ v MATLABu. Část impulsní odezvy je znázorněna v obr. 8 a frekvenční charakteristika je na obr. 9. Jak je zřejmé z průběhu frekvenční charakteristiky, je zvlnění

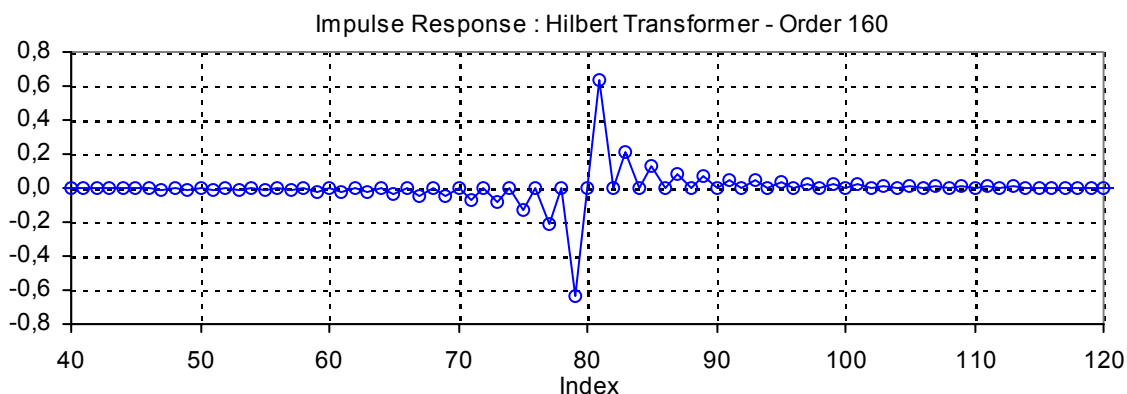
filtru v propustné oblasti zanedbatelné a nulový přenos je dosažen pro nulovou frekvenci a poloviční frekvenci vzorkování.



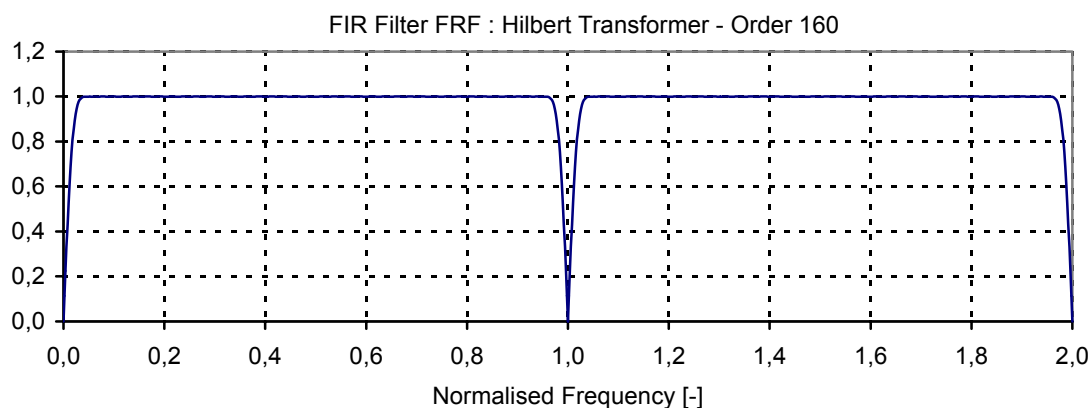
Obr. 6 Amplituda frekvenčního přenosu



Obr. 7 Fáze frekvenčního přenosu



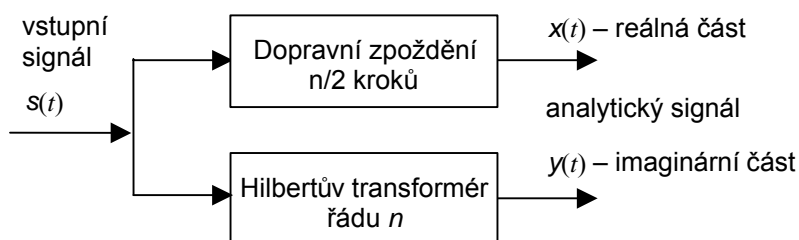
Obr. 8 ZOOM impulsní odezvy FIR filtru 160. řádu



Obr. 9 Amplituda frekvenčního přenosu Hilbertova transformeru 160. řádu

Analytický signál je komplexní signál, jehož reálná část je měřený signál a imaginární část je Hilbertova transformace jeho reálné části. Filtr, který plní funkci Hilbertova transformeru, má skupinové zpoždění o velikosti poloviny řádu filtru. Pro Hilbertův transformér z obr. 8 je toto skupinové zpoždění rovno 80násobku vzorkovacího intervalu. Blokový diagram pro

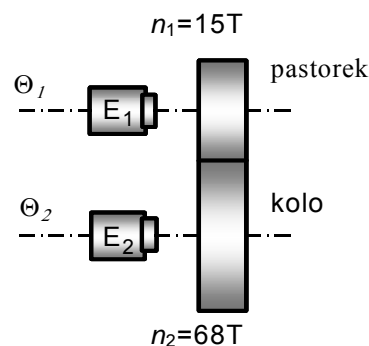
postup výpočtu analytického signálu s reálnou částí $x(t)$ a s imaginární částí $y(t)$ ze vstupního signálu $s(t)$ je na obr. 10.



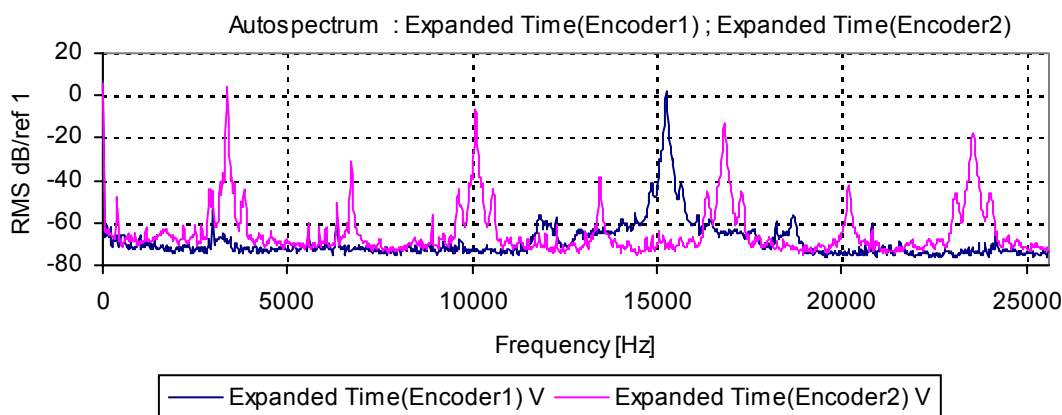
Obr. 10 Postup výpočtu analytického signálu

3. Příklad vyhodnocení chyby převodu

Jak již bylo uvedeno, k měření chyby převodu soukolí ozubených kol 15/68 zubů jsou použity dva snímače úhlového natočení E1 a E2 (viz obr. 11), které generují 500 impulsů za otáčku. Každý snímač je namontován na konec hřídele s ozubeným kolem. K záznamu signálů vzorkovací frekvencí 65535 Hz byl použit přístroj Time Capture v signálovém analyzátoru LabShop PULSE od firmy Brüel & Kjær a záznam byl po zadání funkce Expanded Time kopírován do programu Signal Analyser (vlastní tvorba). Všechny operace se signálem, které budou prováděny dále, jsou již ve zmíněném programu Signal Analyser, protože software analyzátoru PULSE tyto operace neobsahuje.



Obr. 11 Uspořádání měřicího systému

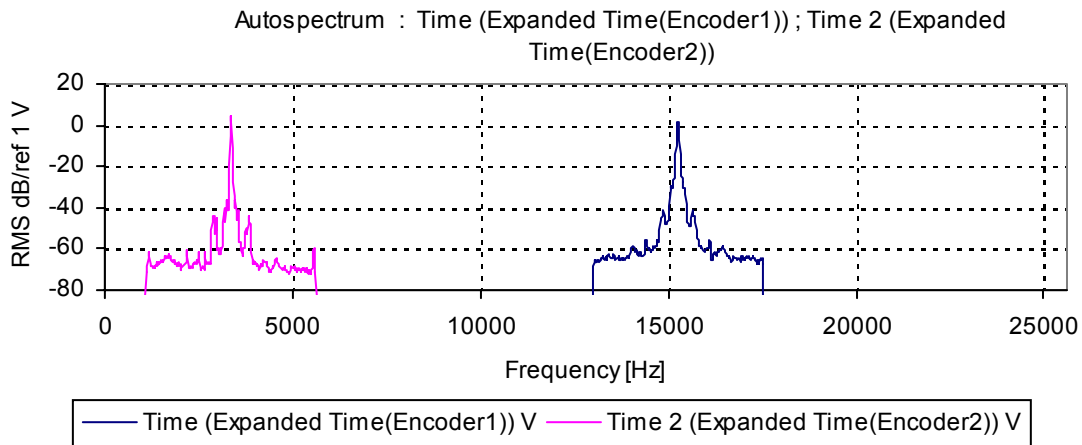


Obr. 12 Frekvenční spektra výchozího signálu

Spektra obou impulsních signálů jsou vypočtena v přístroji Autospectrum v programu Signal Analyser a jsou uvedena v obr. 12. Základní frekvence impulsního signálu ze snímače otočení Expanded Time (Encoder1) na hřídeli s ozubeným kolem, které má 15 zubů, je 15280 Hz. V rámci frekvenčního rozsahu analýzy lze pozorovat jen základní frekvenci impulsního signálu, protože druhá harmonická je již mimo frekvenční rozsah spektra. Základní frekvence impulsů ze snímače Expanded Time (Encoder2) na hřídeli s ozubeným kolem s 68 zuby je

3360 Hz. V rámci frekvenčního rozsahu analýzy lze pozorovat 6 harmonických tohoto impulsního signálu.

Prvým krokem analýzy impulsních signálů je pásmová filtrace s cílem izolovat nosnou složku a příslušné postranní pásmo, které obsahuje informaci o fázovém modulačním signálu. Šířka postranního pásma je určena tak, že obsahuje složky vzdálené od nosné složky o pětinasobek záběrové frekvence soukolí ozubených kol. Filtrace je provedena ve frekvenční oblasti s využitím přímé a zpětné Fourierovy transformace, přičemž před zpětnou transformací jsou složky mimo vymezené frekvenční pásmo nulovány. Tato filtrace je vykonána na záznamu o délce 65536 vzorků, tj. jedné sekundě záznamu obou impulsních signálů, přístrojem s označením Time, na jehož vstup je přiveden impulsní signál. V titulku grafu je jméno impulsního signálu argumentem funkce, kterou realizují přístroje Time a Time 2. Jména vstupních signálů jsou Expanded Time (Encoder1) a Expanded Time (Encoder2). Výsledek filtrace je uveden v obr. 13. Tento způsob značení matematických operací se signálem je použit také v titulku dalších grafů.



Obr. 13 Frekvenční spektra filtrovaného signálu

Fázová demodulace je provedena pomocí číslicových filtrů. Hilbertovou transformaci realizuje filtr typu FIR řádu 160, jehož frekvenční charakteristika je uvedena na obr. 8. Výsledkem filtrace je imaginární část analytického signálu. Reálnou část tvoří vstupní signál FIR filtru, který je zpožděn o 80 vzorků. Komplexní vzorky analytického signálu slouží k výpočtu fáze. Funkce arctan umožňuje stanovit fázi jen v rozsahu od $-\pi$ do $+\pi$. K rozbalení fáze je použit algoritmus vyplývající z podmínky, podle které se sousední fáze nemohou lišit o více než π radiánů pro frekvenci nižší než je polovina vzorkovací frekvence

$$\Delta\varphi < -\pi \Rightarrow \varphi + 2\pi \rightarrow \varphi, \Delta\varphi > +\pi \Rightarrow \varphi - 2\pi \rightarrow \varphi \quad (5)$$

Protože impulsů za jednu otáčku je 500, je rozbalená fáze impulsního signálu 500krát větší než je úhel otočení ozubeného kola. Velikost fáze po dělení počtem impulsů je znázorněna v obr. 14 a 15. Jedno otočení ozubeného kola odpovídá úhlu otočení o 360 stupňů.

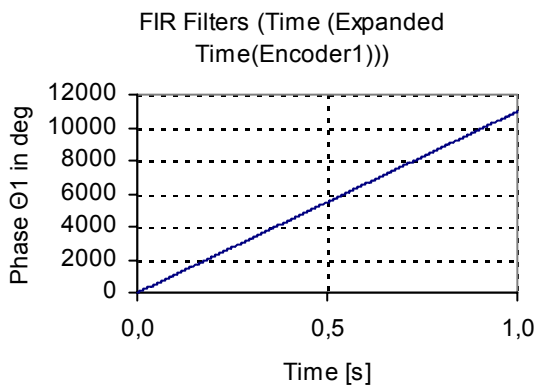
Závislost rozbalené fáze na čase se jeví jako lineární, protože při rozlišení zobrazení nelze pozorovat odchylky úhlu otočení od lineárního nárůstu. Chybu převodu lze vypočítat podle vzorce

$$TE(m) = \left(\Theta_1 - \frac{n_1}{n_2} \Theta_2 \right) r_1, \quad (6)$$

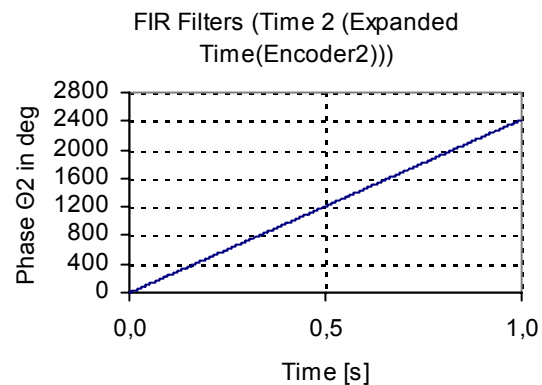
kde Θ_1 a Θ_2 jsou úhly otočení, n_1 a n_2 jsou počty zubů a r_1 je poloměr roztečné kružnice pastorku. K posouzení vzájemných úhlových posunů bude použit rozdíl úhlů otočení

$$\Theta_1 - \frac{n_1}{n_2} \Theta_2, \quad (7)$$

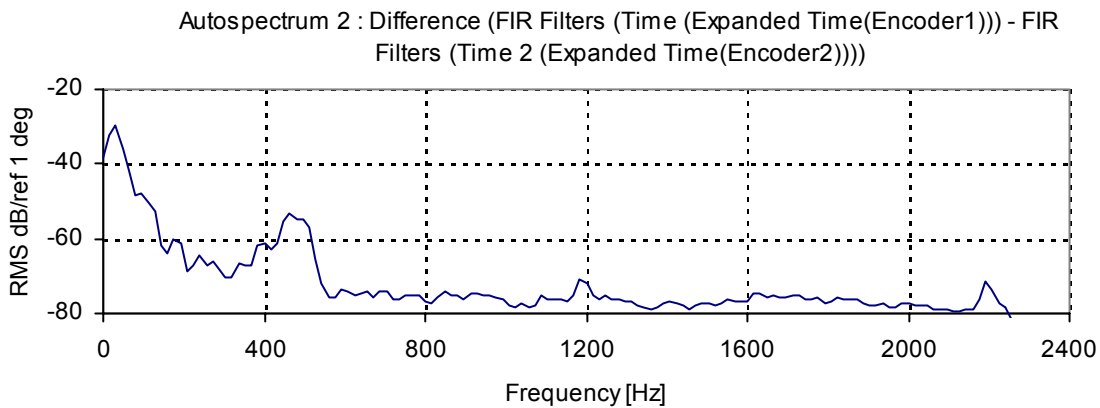
přičemž otočení kola s počtem zubů n_2 je korigováno převodovým poměrem. Spektrum úhlových rozdílů, které jsou vypočteny v přístroji Difference z programu Signal Analyser, je znázorněno na obr. 15. Záběrová frekvence soukolí ozubených kol je 460 Hz. Ve spektru však dominuje nízkofrekvenční složka o frekvenci 32 Hz, což odpovídá frekvenci otáček a může souviset s chybou rozteče impulsů snímače úhlového natočení v rámci poloviny otáčky. Pro vyhodnocení chyby převodu jsou rozhodující nepřesnosti rozteče impulsů v rámci otočení ozubeného kola o jeden zub, tj. na 1/15 a 1/68 otáčky.



Obr. 14 Rozbalená fáze signálu Encoder1

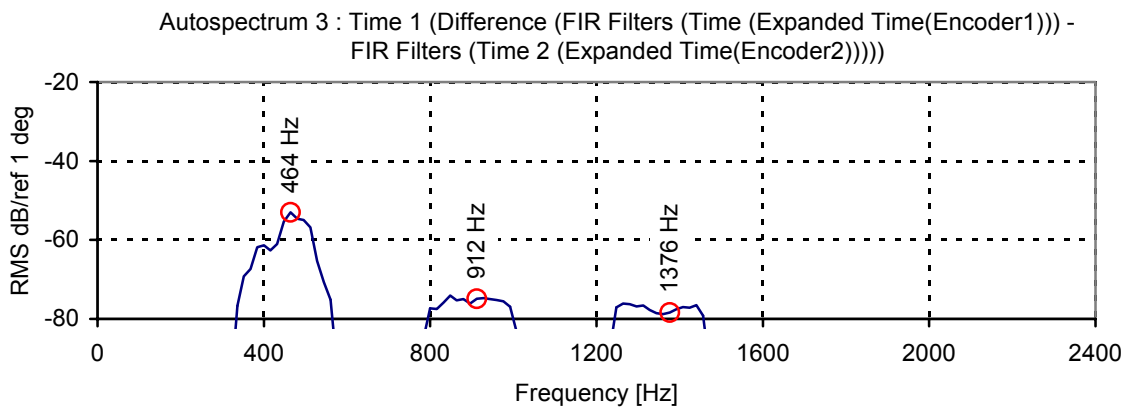


Obr. 15 Rozbalená fáze signálu Encoder2



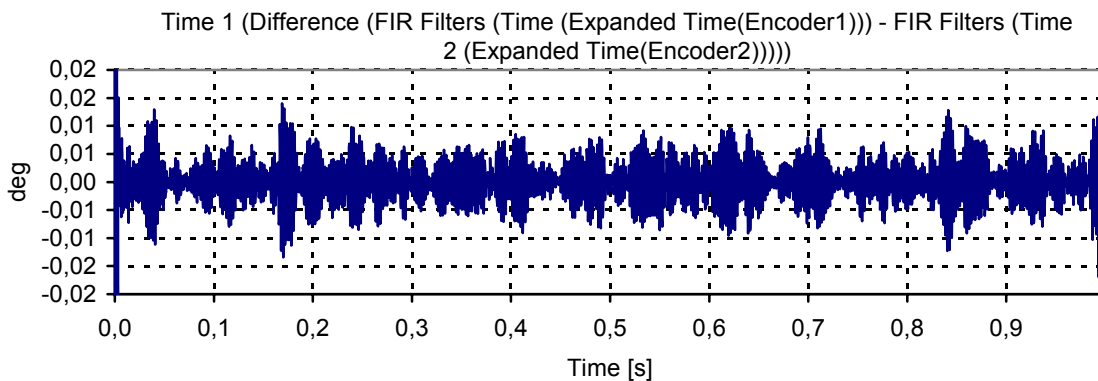
Obr. 16 Frekvenční spektrum rozdílů velikosti úhlů na obvodu kola s 15 zuby

Signál rozdílů úhlu otočení je třeba filtrovat tak, aby časový průběh chyby převodu byl vytvořen jen pro frekvenční pásma, která jsou situována kolem záběrové frekvence a několika jejich celočíselných násobků. Podle tvaru frekvenčního spektra na obr. 16 je významné pásmo kolem záběrové frekvence a pak druhé a třetí harmonické, která přísluší k záběrové frekvenci. Ve frekvenční oblasti byl přístrojem Time 1 realizována řada pásmových propustí pro harmonické složky záběrové frekvence. Spektrum filtrovaného signálu je znázorněno na obr. 17.

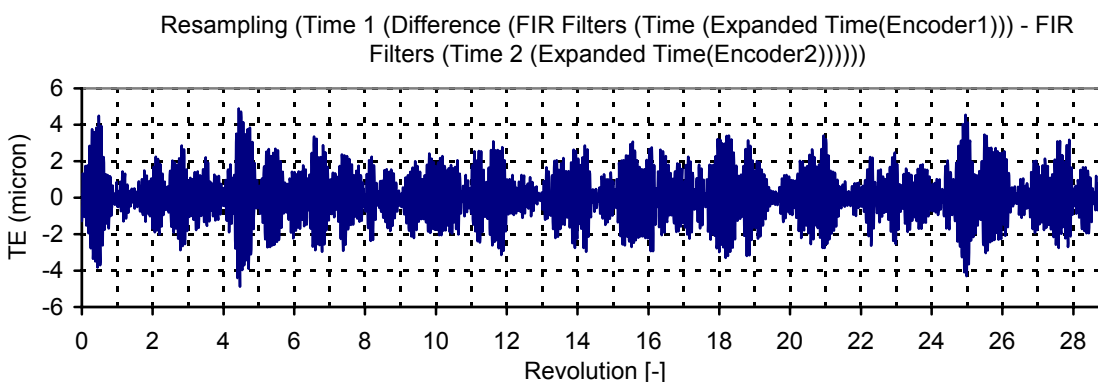


Obr. 17 Frekvenční spektrum z obr. 14 omezené na postranní pásma 5 harmonických záběrové frekvence soukolí

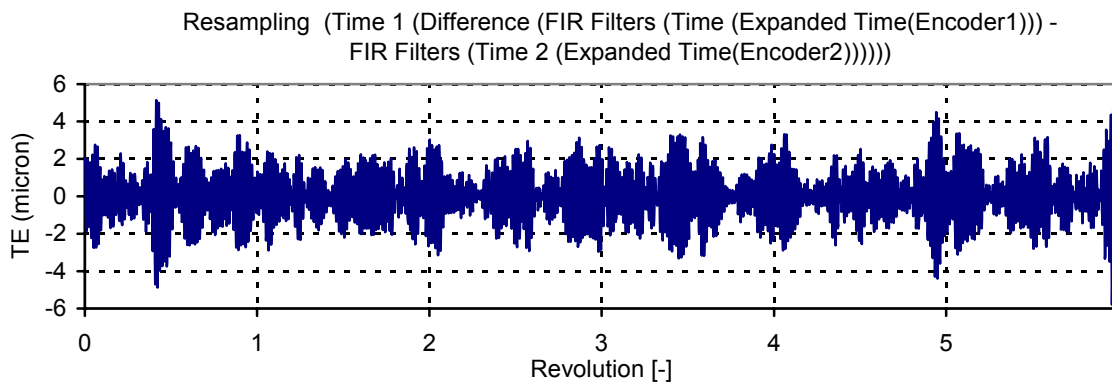
Časový průběh chyby převodu v intervalu jedné sekundy je znázorněn na obr. 18. Na začátku a konci analyzovaného časového průběhu chyby převodu se projevuje náběh FIR filtru. Impulsy od otáček obou ozubených kol umožňují převzorkovat časový průběh chyby převodu tak, aby časovou osu nahradila stupnice, která udává počet otočení (Revolution). Výsledek převzorkování je znázorněn na obr. 19 a 20.



Obr. 18 Časový průběh chyby převodu v průběhu 1 sekundy měření

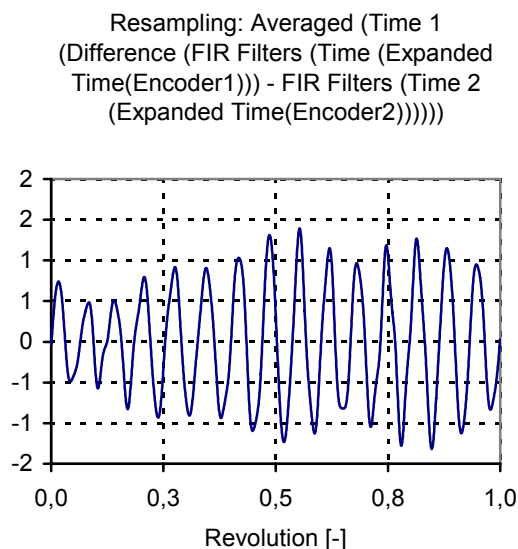


Obr. 19 Časový průběh chyby převodu převzorkovaný na otočení kola s 15 zuby

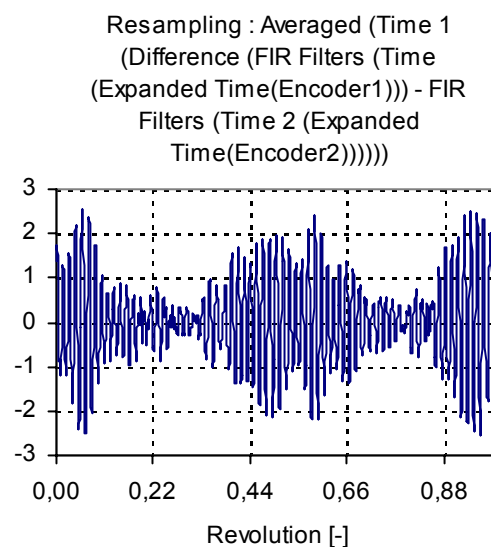


Obr. 20 Časový průběh chyby převodu převzorkovaný na otočení kola s 68 zuby

Převzorkované průběhy lze také synchronně filtrovat podle frekvence otáček. Výsledek této filtrace poskytuje zprůměrovaný průběh chyby převodu za jednu otáčku ozubeného kola. Výsledek synchronní filtrace je znázorněn na obr. 21 a 22. Průměrný časový průběh chyby převodu poskytuje informace o pravidelnosti záběru. Ozubené kolo s 15 zuby se otočí přibližně 4,5krát při otočení kola se 68 zuby o jednu otáčku. V grafu na obr. 22 je použita mřížka, který odpovídá jednomu otočení ozubeného kola s 15 zuby. Záběr kola s 15 zuby je pravidelný, zatímco záběr kola s 68 zuby vykazuje nepravidelnosti, na kterých se může podílet nerovnoměrná zátěž.



Obr. 21 Průměrný průběh chyby převodu za otáčku ozubeného kola s 15 zuby



Obr. 22 Průměrný průběh chyby převodu za otáčku ozubeného kola s 68 zuby

4. Závěr

Referát popisuje nový způsob vyhodnocení chyby převodu soukolí ozubených kol. Ve srovnání s dřívějšími postupy lze získat informaci o časovém průběhu chyby převodu za několik otáček ozubených kol v záběru. Tato metoda měření představuje nový analytický nástroj, který dovoluje určit nejen efekt konstrukčních změn, které jsou provedeny na ozubení

s cílem redukovat jeho hlučnost, ale také případné tvarové nerovnoměrnosti jako důsledek výrobních úchylek.

Algoritmy zpracování impulsních signálů s použitím Hilbertova transforméru byly implementovány do programu Signal Analyse, který vznikl na VŠB – TU Ostrava.

5. Poděkování

Výzkumné práce v oboru zpracování měření hluku a vibrací jsou podporovány Grantovou agenturou České republiky jako projekt č. 101/04/1530.

6. Literatura:

Tůma, J. Měření chyby převodu převodovek s ozubenými koly. In *Inženýrská mechanika 2002*. Svratka : VUT Brno, 13. - 16. 5. 2002, s. 1-10. ISBN 80-214-2109-6.

Tůma, J. Gear transmission error measurements based on the phase demodulation. *Mechanika*. AGH Krakov Poland 2003, Vol 22, No 3., pp. 463-470, ISSN 0239-5282.

Tůma, J. Gearbox Transmission Error Measurements Based on Phase Demodulation of Encoder Signals. *Journal of Middle European Construction and Design of Cars*, ČVUT Praha, Vol. 1, No. 1, pp. 9-15, ISSN 1214-0821.

Tůma, J. Signal Phase demodulation of impulse signals in machine shaft angular vibration measurements. In *Proceedings of Tenth international congress on sound and vibration*. Stockholm : IIAV, 7.-10..7. 2003, P 592.

Koukal S., Křížek M. Potůček R. Fourierovy nekonečné řady a metoda konečných prvků v komplexním oboru, 1st ed. Praha : Academia, 2002. ISBN: 80-200-1029-7

Tůma, J. Principle and software tools for machine shaft angular vibration measurements. In *Proceedings of DYNAMICS OF MACHINES 2005*. Praha, 8.-9..2. 2005.