

NUMERICAL HOMOGENIZATION OF PERFORATED PLATES

A. Somolová*, Jan Zeman*

Summary: *In this contribution, the problem of numerical homogenization of plates perforated by a large number of small openings is discussed. When the characteristic size of the opening with respect to an analyzed structure is small, modelling approaches based on homogenization theories are applicable to analysis of these structures. In this contribution, the formulation based on the concept of control points, which are used to parameterize macroscopic fields, is employed. Formulations for both thin (Kirchhoff) as well as thick (Mindlin) plates are introduced. Finally, a comparison with experimental data is performed to show the accuracy of obtained results.*

1 Úvod

Perforované desky, tedy desky oslabené celou řadou malých otvorů, jsou velmi atraktivním konstrukčním prvkem. Jako hlavní výhoda těchto konstrukcí bývá uváděn velmi výhodný poměr váha/únosnost konstrukčního prvku tvořeného perforovanou stěnou vzhledem k plné (tj. neperforované) konstrukci. Tento poměr je výhodný hlavně tehdy, je-li stupeň perforace konstrukčního prvku vysoký.

Při praktickém návrhu konstrukce z perforovaných desek je, obdobně jako u plnostěnných desek, nutno posoudit chování desky při jejím vybočení. To může být pro danou konstrukci rozhodujícím stavem namáhání. Příkladem studie, která se touto otázkou zabývá, je práce (Máca a Fajman, 1996). Autoři zde provedli detailní numerickou simulaci experimentů provedených v Ústavu teoretické a aplikované mechaniky AVČR, které systematicky zkoumaly vliv tvaru otvorů, tloušťky stěny a stupně perforace na velikost kritického zatížení stěny při jednosměrném tlakovém namáhání. Modely stěn byly vyrobeny z plexiskla. Protože byl rozměr analyzované konstrukce vzhledem k rozměru otvoru malý, bylo v tomto případě možné provést detailní stabilitní výpočet pro celou konstrukci bez zjednodušujících geometrických předpokladů. Výhodou tohoto přístupu je přesnost získaných výsledků, pro větší konstrukce je však jeho přímá aplikace značně výpočetně náročná.

Cílem této práce je provést numerickou simulaci experimentů, prezentovaných v (Máca a Fajman, 1996), na základě teorie homogenizace heterogenních deskových konstrukcí a to jak pro tenké, tak i pro tlusté desky. Výhodou tohoto postupu je snížení náročnosti vlastního výpočtu, na druhé straně je však tento přístup založen na jistých zjednodušujících předpokladech, které mohou mít negativní vliv na přesnost výsledků. Proto může porovnání provedené v předkládané práci sloužit jako názorná demonstrace výhod i nevýhod praktické aplikace homogenizačních postupů.

* Alena Somolová, Ing. Jan Zeman, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, tel: (+420)-2-2435-4482, fax: (+420)-2-2431-077, e-mail: somol@tiscali.cz

2 Základní vztahy

Základní vztahy použité v dalším textu jsou uvedeny pro obecnější Mindlinovu teorii s příslušným zjednodušením pro analýzu kirchhoffovských desek. Navíc uvažujeme pouze případ ohybu deskových konstrukcí, tj. předpokládáme, že zatížení působí kolmo na střednicovou rovinu desky. Detailní odvození těchto vztahů a jejich podrobnější diskusi lze nalézt například v (Lewiński a Telega, 1999).

2.1 Kinematické předpoklady a pole deformací

Posunutí libovolného bodu o souřadnicích (x, y, z) lze vyjádřit vztahy

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \varphi_y(x, y)z, \\ v(x, y, z) &= -\varphi_x(x, y)z, \\ w(x, y, z) &= w(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

kde osy x a y definují rovinu desky a osa z má směr normály desky. Symboly u , v a w označují posun daného bodu ve směru souřadných os; φ_x a φ_y mají význam pootočení střednicové roviny podle příslušných os. Připomeňme, že v teorii tlustých desek jsou proměnné w , φ_x a φ_y uvažovány jako nezávislé; v případě tenkých desek jsou svázány vztahy

$$\varphi_x(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y}(x, y), \quad \varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial x}(x, y). \quad (2)$$

Za předpokladu malých posunů u , v a w lze odvodit následující vztahy pro nenulové složky membránové deformace

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x, y, z) \\ \varepsilon_y(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \kappa_x(x, y) \\ \kappa_y(x, y) \\ \kappa_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}(x, y) \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

kde κ označuje (pseudo)křivost střednicové roviny desky. Tedy

$$\varepsilon(x, y, z) = z\kappa(x, y). \quad (4)$$

Vztah pro smykové složky deformace lze napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_y(x, y) + \frac{\partial w}{\partial x}(x, y), \\ \gamma_{yz}(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\varphi_x(x, y) + \frac{\partial w}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Pro případ tenkých desek, tedy platnosti vztahů (2), jsou tyto složky nulové, zatímco vektor křivostí κ lze vyjádřit v závislosti na průhybu w jako

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x(x, y) \\ \kappa_y(x, y) \\ \kappa_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y) \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x, y) \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

2.2 Fyzikální rovnice

V souladu s tradičním přístupem v teorii desek vycházíme z vrstvičkového modelu ohýbané desky. Za předpokladu, že normálové napětí σ_z je v každé vrstvě zanedbatelné, můžeme zde uvažovat stav rovinné napjatosti. Při zanedbání počátečních deformací a předpokladu, že materiálové vlastnosti desky se po tloušťce nemění, můžeme psát vztah pro rovinnou napjatost ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y, z) \\ \sigma_y(x, y, z) \\ \tau_{xy}(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}(x, y) & L_{12}(x, y) & L_{16}(x, y) \\ L_{21}(x, y) & L_{22}(x, y) & L_{26}(x, y) \\ L_{61}(x, y) & L_{62}(x, y) & L_{66}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x, y, z) \\ \varepsilon_y(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{Bmatrix},$$

kde indexy u matice materiálových vlastností se řídí zvyklostmi vektorového zápisu rovnic pružnosti (viz např. (Bittnar a Šejnoha, 1992)). Tedy

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z) = \mathbf{L}_m(x, y)\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z). \quad (6)$$

Obdobné vztahy platí i pro smykové složky

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}(x, y) \\ \tau_{yz}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{55}(x, y) & L_{54}(x, y) \\ L_{45}(x, y) & L_{44}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}(x, y) \\ \gamma_{yz}(x, y) \end{Bmatrix},$$

což ve vektorovém formátu zapíšeme jako

$$\boldsymbol{\tau}(x, y) = \mathbf{L}_s(x, y)\boldsymbol{\gamma}(x, y). \quad (7)$$

2.3 Měrné vnitřní síly

V analýze desek jsou často využívány měrné vnitřní síly namísto přímé analýzy pomocí napětí. Měrné ohybové a krouticí momenty jsou definovány vztahem

$$\mathbf{m}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma}(x, y, z) z \, dz, \quad (8)$$

kde h označuje tloušťku desky. Obdobným způsobem definujeme měrné posouvající síly:

$$\mathbf{q}(x, y) = \begin{Bmatrix} q_x(x, y) \\ q_y(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\tau}(x, y) \, dz.$$

Vzhledem k zavedení měrných vnitřních sil je nutné příslušným způsobem modifikovat fyzikální rovnice. Dosazení těchto rovnic pro membránové složky (6) do vztahu pro měrné momenty (8) vede na vztah

$$\mathbf{m}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{L}_m(x, y) \boldsymbol{\kappa}(x, y) z^2 \, dz = \frac{h^3(x, y)}{12} \mathbf{L}_m(x, y) \boldsymbol{\kappa}(x, y) = \mathbf{D}_\kappa(x, y) \boldsymbol{\kappa}(x, y), \quad (9)$$

kde D_K je matice deskové tuhosti. V případě měrné posouvající síly platí obdobný vztah

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x, y) &= k(x, y) \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{L}_s(x, y) \boldsymbol{\gamma}(x, y) dz = k(x, y) h(x, y) \mathbf{L}_s(x, y) \boldsymbol{\gamma}(x, y) \\ &= D_\gamma(x, y) \boldsymbol{\gamma}(x, y), \end{aligned} \quad (10)$$

kde $k(x, y)$ je součinitel zohledňující vliv rozložení smykových napětí.

2.4 Základní vztahy stabilitní analýzy

Silovou podmínku rovnováhy odvodíme pomocí principu virtuálních prací (viz např. (Bittnar a Šejnoha, 1992)). Při analýze vybočení je nezbytné uvažovat velké hodnoty průhybů w . Předpokládáme-li, že je deska ve střednicové rovině namáhána zatížením, které vyvozuje měrné normálové síly $\overline{n_x}$, $\overline{n_y}$ a $\overline{n_{xy}}$, má silová podmínka rovnováhy sestavená na deformované konstrukci tvar:

$$\overline{n_x}(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y) + 2\overline{n_{xy}}(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x, y) + \overline{n_y}(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y) + \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2}(x, y) + \overline{p}(x, y) = 0. \quad (12)$$

3 Homogenizační vztahy

Principem homogenizačních metod je nahrazení původní komplikované perforované stěny stěnou homogenní, jejíž vlastnosti v sobě zahrnují vliv tvaru jednotlivých otvorů a stupně perforace konstrukce. Z hlediska analýzy pak rozdělíme řešený problém na dvě úrovně:

- *Makroúroveň*, která odpovídá analýze na úrovni desky Ω jako celku a
- *mikroúroveň* popisující chování konstrukce na úrovni jednotkové buňky $\mathcal{Y}$.

Pro výstižnost tohoto řešení je nutno zajistit spolupůsobení mezi jednotlivými úrovněmi. Pokud je rozměr jednotkové buňky dostatečně malý vůči rozměrům konstrukce, analýza uvedená v (Lewiński a Telega, 1999) ukazuje, že vhodným modelem na makroúrovni je model tenké desky, nezávisle na modelu použitém na mikroúrovni. V tomto případě lze vlastní homogenizaci shrnout do následujícího vztahu

$$\mathbf{M}(\mathbf{X}) = D_K(\mathbf{X}) \mathbf{K}(\mathbf{X}), \quad (13)$$

kde $\mathbf{M}$ je průměrná hodnota ohybových momentů, $\mathbf{K}$ makroskopická (průměrná) hodnota křivosti a D_K označuje homogenizovanou matici deskové tuhosti, porovnej s (9).

Poznamenejme, že vlastní výpočet průběhu ohybových momentů se liší v závislosti na tom, zda na mikroúrovni uvažujeme model tenké nebo tlusté desky. Tato analýza je předmětem následujících dvou kapitol.

3.1 Homogenizace kirchhoffovských desek

V případě kirchhoffovských desek zatížených předepsanou makroskopickou hodnotou křivosti $\mathbf{K}$ můžeme vyjádřit pootočení kolem jednotlivých os x a y ve tvaru¹

$$\varphi_x(\mathbf{x}) = \varphi_x^{\text{hmg}}(\mathbf{x}) + \varphi_x^*(\mathbf{x}), \quad \varphi_y(\mathbf{x}) = \varphi_y^{\text{hmg}}(\mathbf{x}) + \varphi_y^*(\mathbf{x}), \quad (14)$$

kde φ^{hmg} označuje pootočení, která by vznikla v homogenní jednotkové buňce pod účinky předepsané křivosti $\mathbf{K}$, zatímco φ^* označují členy vzniklé v důsledku perforace na mikroúrovni. V důsledku periodického uspořádání jednotlivých otvorů jsou navíc tyto členy $\mathcal{Y}$ -periodické, tj. nabývají stejných hodnot na protilehlých stranách jednotkové buňky.

3.1.1 Konstrukce funkcí φ^{hmg}

V případě homogenní jednotkové buňky zatížené makroskopickou křivostí by byla v každém bodu $\mathbf{x} \in \mathcal{Y}$ konstantní hodnota křivosti. Pro dané podepření, viz Obr. 1, vyjádříme jednotlivá pootočení ve tvaru

$$\varphi_x^{\text{hmg}}(x, y) = -K_{xy}y - \frac{1}{2}K_{xy}x, \quad (15)$$

$$\varphi_y^{\text{hmg}}(x, y) = K_yx + \frac{1}{2}K_{xy}y. \quad (16)$$

Z hlediska dalších výpočtů se jeví výhodné parametrizovat průběh pootočení pomocí vybraných řídicích bodů **1, 2** a **4**, viz Obr. 1. Vzhledem k předpokládanému průběhu pootočení, viz (15)–(16), můžeme hodnoty pootočení v těchto bodech vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \varphi_x^{\text{hmg}(\mathbf{1})} &= \varphi_x^{\text{hmg}}(0, 0) = 0, & \varphi_y^{\text{hmg}(\mathbf{1})} &= \varphi_y^{\text{hmg}}(0, 0) = 0, \\ \varphi_x^{\text{hmg}(\mathbf{2})} &= \varphi_x^{\text{hmg}}(H, 0) = -\frac{1}{2}K_{xy}H, & \varphi_y^{\text{hmg}(\mathbf{2})} &= \varphi_y^{\text{hmg}}(H, 0) = K_yH, \\ \varphi_x^{\text{hmg}(\mathbf{4})} &= \varphi_x^{\text{hmg}}(0, L) = -K_xL, & \varphi_y^{\text{hmg}(\mathbf{4})} &= \varphi_y^{\text{hmg}}(0, L) = \frac{1}{2}K_{xy}L. \end{aligned}$$

To nám umožňuje přepsat rovnice (15)–(16) pro vztah mezi makroskopickou křivostí $\mathbf{K}$ a pootočeními v bodech **2** a **4** ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{L} & 0 \\ \frac{-2}{H} & 0 & 0 & \frac{2}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_x^{\text{hmg}(\mathbf{2})} \\ \varphi_y^{\text{hmg}(\mathbf{2})} \\ \varphi_x^{\text{hmg}(\mathbf{4})} \\ \varphi_y^{\text{hmg}(\mathbf{4})} \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

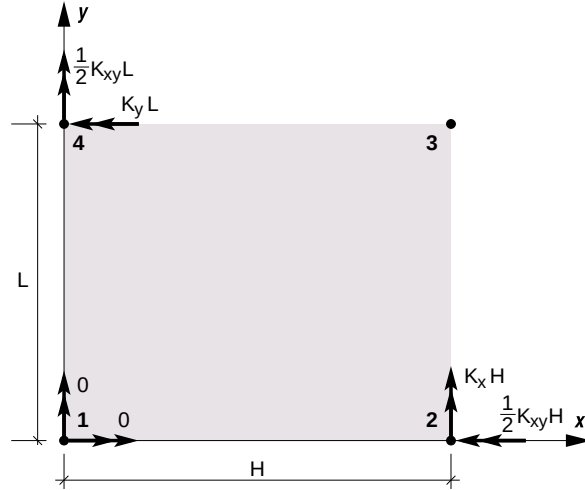
což budeme zkracovat jako

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}_\varphi \mathbf{r}_\varphi.$$

Inverzní vztah mezi uzlovými pootočeními a průměrnou křivostí pak má tvar

$$\mathbf{r}_\varphi = \mathbf{B}_K \mathbf{K}, \quad (18)$$

¹Viz též (Lewiński a Telega, 1999) pro detailní odvození těchto vztahů a opět článek (Somolová a Zeman, 2004) pro jejich podrobné odvození pro případ ohybu nosníků.



Obrázek 1: Podepření periodické jednotkové buňky – pootočení

kde matice B_K je definována vztahem

$$B_K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{H}{2} \\ H & 0 & 0 \\ 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Na závěr této kapitoly poznamenejme, že zatím byly specifikovány pouze podmínky pro pootočení φ . Aby bylo zabráněno posunutí celé konstrukce ve směru osy z jako tuhého celku, předepíšeme např. v bodu **1** nulovou hodnotu průhybu w .

3.1.2 Periodická část

Po specifikaci průběhu pootočení φ^{hmg} nyní přistoupíme k předepsání periodických okrajových podmínek. Pro tyto účely rozdělíme hranici řešené oblasti na čtyři části: horní $\mathcal{T}$, spodní $\mathcal{B}$, levou $\mathcal{L}$ a pravou $\mathcal{R}$.

Vyjádřením pootočení pro levou a pravou část hranice a jejich odečtením dostáváme vztahy

$$\varphi_x^{\mathcal{R}}(y) = \varphi_x^{\mathcal{L}}(y) + \varphi_x^{(2)}, \quad \varphi_y^{\mathcal{R}}(y) = \varphi_y^{\mathcal{L}}(y) + \varphi_y^{(2)}. \quad (20)$$

Obdobnou analýzou pro horní a dolní část hranice jednotkové buňky $\mathcal{Y}$ získáváme vztahy

$$\varphi_x^{\mathcal{T}}(x) = \varphi_x^{\mathcal{B}}(x) + \varphi_x^{(4)}, \quad \varphi_y^{\mathcal{T}}(x) = \varphi_y^{\mathcal{B}}(x) + \varphi_y^{(4)}. \quad (21)$$

Deformační stav příslušný dané hodnotě makroskopické křivosti K můžeme předepsat tak, že v bodu **1** jednotkové buňky podepřeme všechny stupně volnosti w , φ_x a φ_y , předepíšeme hodnoty rotací v uzlech **2** a **4** na základě vztahu (18) a pootočení na protějších hranách svážeme podmínkami (20) a (21). Poznamenejme, že pro průhyby w žádné další podmínky nepotřebujeme; v případě analýzy tenké desky jsou s pootočeními φ_x a φ_y svázány vztahy (1).

3.1.3 Průměrné hodnoty měrných momentů

Posledním krokem homogenizačního procesu je určení hodnoty ohybových momentů. V tomto případě opět vyjdeme z principu virtuálních prací, tentokrát psaného na úrovni jednotkové buňky $\mathcal{Y}$. Průměrné hodnoty ohybových momentů lze určit přímo z hodnot uzlových reakcí jako

$$\mathbf{M}(\mathbf{X}) = \frac{1}{LH} \mathbf{B}_K^\top \mathbf{R}_\varphi,$$

kde $\mathbf{R}_\varphi$ označuje vektor reakcí v uzlech **2** a **4**, ve kterých byly předepsány hodnoty uzlových rotací

$$\mathbf{R}_\varphi = \begin{Bmatrix} m_x^{(2)} \\ m_y^{(2)} \\ m_x^{(4)} \\ m_y^{(4)} \end{Bmatrix},$$

tedy

$$\begin{Bmatrix} M_x(\mathbf{X}) \\ M_y(\mathbf{X}) \\ M_{xy}(\mathbf{X}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{H} & 0 \\ -\frac{1}{2L} & 0 & 0 & \frac{1}{2H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x^{(2)} \\ m_y^{(2)} \\ m_x^{(4)} \\ m_y^{(4)} \end{Bmatrix}.$$

3.2 Homogenizace mindlinovských desek

V případě, kdy je na mikroúrovni jednotková buňka modelována jako tlustá mindlinovská deska, jsou pootočení φ_x a φ_y nezávislá na průhybu w . Proto je nutné k okrajovým podmínkám představeným v předchozí kapitole nutno přidat podmínky pro průhyby w . Obdobně jako v případě pootočení budeme předpokládat následující rozklad průhybů

$$w(\mathbf{x}) = w^{\text{hmg}}(\mathbf{x}) + w^*(\mathbf{x}),$$

kde w^{hmg} jsou průhyby odpovídající homogennímu materiálu a $\mathcal{Y}$ -periodická složka w^* vzniká jako důsledek perforace desky.

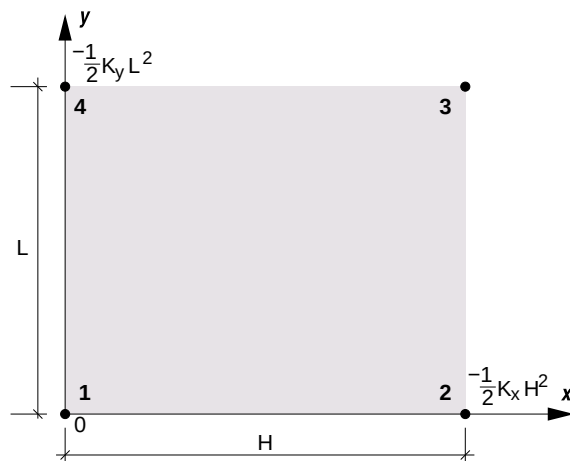
3.2.1 Konstrukce funkcí w^{hmg}

Připomeňme, že na makroúrovni je konstrukce modelována jako tenká deska, jediné kinematické informace jsou tedy reprezentovány vektorem makroskopické křivosti $\mathbf{K}$. Proto odvodíme složku w^{hmg} ze vztahu mezi křivostí a průhyby pro tenké kirchhoffovské desky, viz (5). Poznamenejme, že tato spíše intuitivní úvaha vede na stejné výsledky jako detailní analýza uvedená v (Lewiński a Telega, 1999).

Pokud má být v každém bodu jednotkové buňky konstantní hodnota křivosti, má rovnice průhybu w příslušejícímu této makroskopické křivosti $\mathbf{K}$ tvar

$$w^{\text{hmg}}(x, y) = -\frac{1}{2}K_x x^2 - \frac{1}{2}K_{xy}xy - \frac{1}{2}K_y y^2 + bx + cy + d.$$

Zbývající konstanty b, c a d vyplývají z podepření desky. Pokud volíme hodnoty předepsaných posunů v bodech **1**, **2** a **4** v souladu s následujícím schématem, viz Obr. 2, jsou tyto konstanty nulové.



Obrázek 2: Podepření periodické jednotkové buňky – průhyby

3.2.2 Periodická část w

Stejně jako v případě pootočení odvodíme vztahy pro periodickou část porovnáním hodnot na příslušných částech hranice jednotkové buňky. Odečtením průhybů na odpovídajících částech hranice dostáváme hledané vztahy mezi průhyby

$$w^{\mathcal{R}}(y) = w^{\mathcal{L}}(y) + w^{(2)} - \frac{1}{2}K_{xy}Hy, \quad w^{\mathcal{T}}(x) = w^{\mathcal{B}}(x) + w^{(4)} - \frac{1}{2}K_{xy}Lx.$$

S odvoláním na výsledky publikované v (Lewiński a Telega, 1999), je další postup pro určení homogenizované odezvy konstrukce identický případu tenkých desek; vektor průměrných momentů M se opět určí z momentových reakcí odpovídajících předepsaným rotacím uzlových bodů.

3.3 Numerické modelování

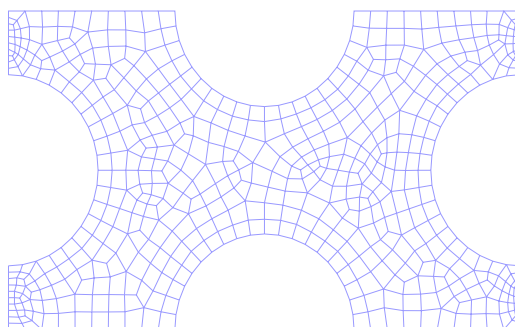
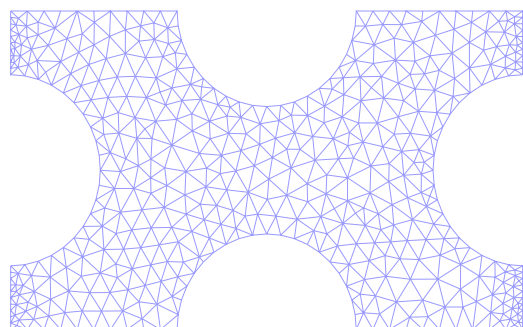
Předchozí vztahy jsou velmi vhodné pro numerické modelování na úrovni jednotkové buňky metodou konečných prvků. Všechny výsledky prezentované v této studii byly získány pomocí komerčního konečněprvkového programu **ADINA 8.1**. Pro modelování tenkých desek byl použit tříuzlový prvek DKT, pro modelování tlustých desek pak čtyřuzlový prvek MITC, viz (ADINA, 2003) pro další informace.

3.4 Homogenizované vlastnosti

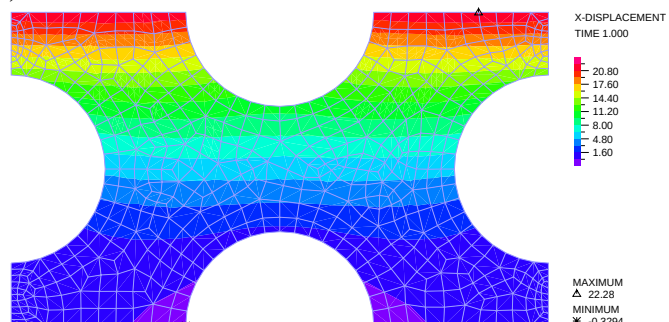
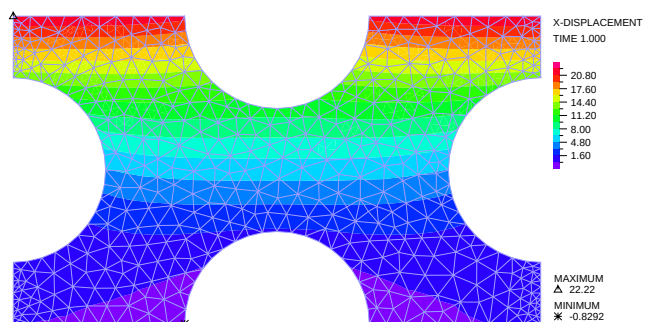
Pro ilustraci získaných výsledků jsou na Obr. 3 uvedeny příklady průběhů průhybů w a pootočení φ_x, φ_y pro zatížení makroskopickou křivostí $K_x = K_{xy} = 0, K_y = 1$. Dále jsou v rámci tohoto obrázku porovnány průběhy určené podle mindlinovské a kirchhoffovské teorie.

4 Porovnání s experimentem

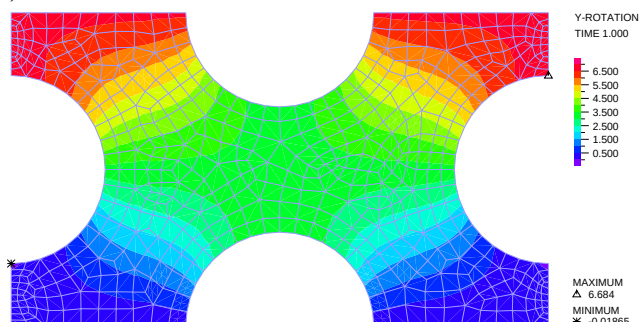
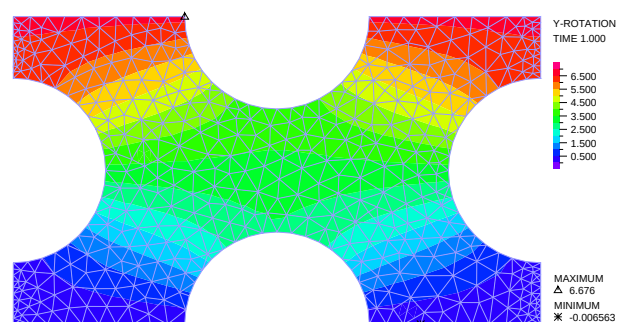
Po ověření výstižnosti navrženého přístupu bylo provedeno porovnání předpovědí homogenizační teorie a výsledků experimentů prováděných v ústavu Teoretické a aplikované mechaniky



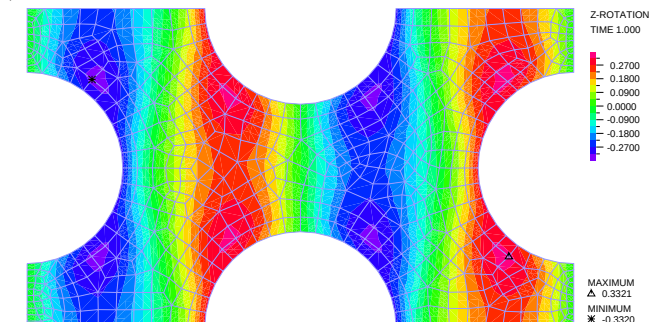
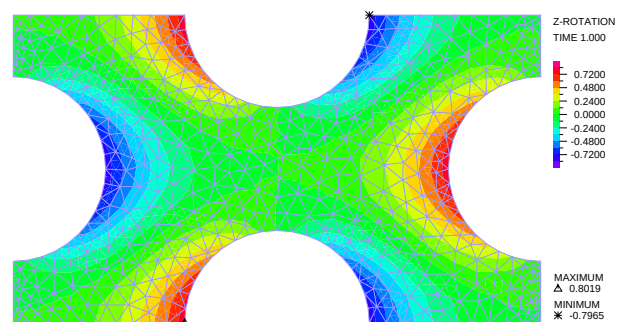
(a)



(b)



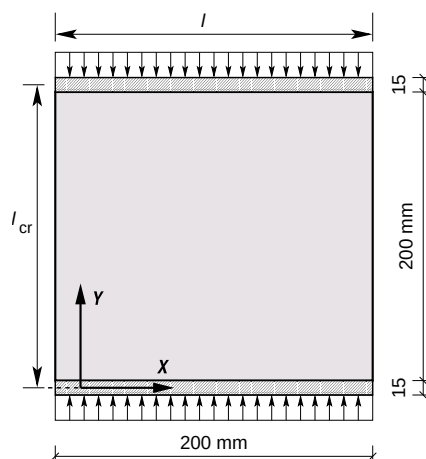
(c)



(d)

Obrázek 3: Analýza jednotkové buňky PWC3-4 pro zatížení křivostí $K_y = 1$. (a) Sítě konečných prvků, (b) Průběhy průhybů w , (c) Průběhy pootočení φ_x , (d) Průběhy pootočení φ_y . (V programu ADINA byla konstrukce zadána v souřadném systému yz . Proto není značení na obrázcích v souladu s údaji uváděnými v textu.)

AVČR. Při těchto experimentech byla měřena hodnota kritického zatížení perforovaných desek z plexiskla o rozměrech 230×200 mm, které byly uloženy ze dvou protilehlých stran do tuhého rámu. Uložení rámu bylo z obou stran 15 mm, viz Obr. 4. Pomocí rámu bylo vneseno do desky rovnoměrné zatížení a následně byla určena kritická síla, při které došlo k vybočení konstrukce. V rámci experimentů byla uvažována celá řada tvarů perforace a hustoty otvorů, proto jsou



Obrázek 4: Schéma experimentu

experimentální výsledky neobyčejně cenné z hlediska posouzení výstižnosti přijatého modelu. Poznamenejme, že ve všech výpočtech uvažujeme v souladu s (Máca a Fajman, 1996) hodnotu modulu pružnosti $E = 3\,000$ MPa a Poissonova čísla $\nu = 0,4$.

4.1 Vztah pro kritické zatížení

Připomeňme, že principem homogenizace je nahrazení původní heterogenní konstrukcí konstrukcí homogenní. Vztah pro kritické zatížení tedy odvodíme pro případ analýzy homogenní desky charakterizované maticí deskové tuhosti D_K .

Při určení hodnoty kritického zatížení vyjdeme z rovnice (11), popisující podmínku rovnováhy na deformované deskové konstrukci. Jejím vyřešením získáme hledaný vztah pro kritické zatížení

$$F_{cr} = b (D_K)_{22} \left(\frac{\pi}{l_{cr}} \right)^2. \quad (22)$$

Jak je zřejmé z předchozího vztahu, hodnota rozměru l_{cr} má dominantní vliv na přesnost předpovězené kritické síly. Tento vliv bude podrobněji diskutován v kapitole 4.2.

4.2 Porovnání s experimentem

V okamžiku, kdy jsou z numerického výpočtu známy hodnoty ohybové tuhosti, můžeme přistoupit k výpočtu kritické síly F_{cr} na základě vztahu (22). Jak již bylo uvedeno dříve, přesnost dosažených výsledků je do značné míry ovlivněna volbou vzpěrné délky l_{cr} . Tato skutečnost je demonstrována výsledky uvedenými v Tab. 1 pro Mindlinův model, který je z obou přesnější.

Jak je z uvedených výsledků zřejmé, pro volbu $l_{cr} = 0,20$ m jsou výsledky příliš tuhé a předpověď modelu je zatížena značnou chybou. Volíme-li však hodnotu $l_{cr} = 0,23$ m, jsou

Stěna	$F_{cr}^{exp} [N]$	$l_{cr} = 0,23 \text{ m}$		$l_{cr} = 0,22 \text{ m}$		$l_{cr} = 0,21 \text{ m}$		$l_{cr} = 0,20 \text{ m}$	
		$F_{cr} [N]$	$\eta [\%]$	$F_{cr} [N]$	$\eta [\%]$	$F_{cr} [N]$	$\eta [\%]$	$F_{cr} [N]$	$\eta [\%]$
PWC 3-3	107,7	105,8	1,8	115,6	7,3	126,9	17,8	139,9	29,9
PWC 3-4	154,4	130,7	15,3	142,9	7,5	156,8	1,6	172,9	12,0
PWC 3-12	147,4	138,7	5,9	151,6	2,9	166,4	12,9	183,5	24,5
PWC 4-3	146,3	198,5	35,7	216,9	48,3	238,1	62,7	262,5	79,4
PWC 4-12	169,3	171,1	1,0	187,0	10,4	205,2	21,2	226,2	33,6
PWC 5-3	118,8	175,5	47,8	191,9	61,5	210,6	77,2	232,1	95,4
PWC 5-4	186,0	192,9	3,7	210,8	13,3	231,4	24,4	255,1	37,1
PWC 5-12	249,7	257,4	3,1	281,4	12,7	308,9	23,7	340,5	36,4
PWC 6-12	271,6	301,7	11,1	329,8	21,4	361,9	33,3	399,0	46,9
PWC 6-24	178,4	230,0	29,0	251,5	41,0	276,0	54,7	304,3	70,6
PWC 6-240	294,6	344,6	17,0	376,6	27,8	413,3	40,3	455,7	54,7
PWS 5-26	282,3	301,2	6,7	329,2	16,6	361,3	28,0	398,3	41,1
PWS 6-27	396,4	409,6	3,3	447,7	12,9	491,3	23,9	541,8	36,7

Tabulka 1: Kritické zatížení pro Mindlinův model – porovnání s experimentem z (Máca a Fajman, 1996), (η je chyba výsledku)

výsledky homogenizační analýzy založené na mindlinovských předpokladech ve většině příkladů srovnatelně přesné s detailním modelováním celé konstrukce. Tento fakt je demonstrován hodnotami uvedenými v Tab. 1.

5 Závěr

V předkládané práci je představen přístup k numerické homogenizaci heterogenních deskových konstrukcí. Uvedený přístup lze chápat jako zobecnění koncepce parametrizace makroskopické deformace pomocí předepsání stupňů volnosti vybraných „řídících“ bodů, viz např. (Kouznetsova et al., 2001). Výhodou tohoto přístupu je jeho názornost, snadné zadání do většiny komerčně dostupných konečněprvkových balíků a přímé rozšíření pro nelineární úlohy.

Z porovnání výsledků numerické simulace s experimentálními hodnotami (viz Tab. 2) se ukazuje, že výstižnost modelu založeného na mindlinovských předpokladech je obecně větší než pro případ tenké kirchhoffovské desky, především v případě vyšší perforace desky. Přesnosti získaných výsledků jsou nicméně stále (někdy výrazně) nižší než v práci (Máca a Fajman, 1995). Tato skutečnost může být dle našeho názoru způsobena následujícími faktory:

- nejistotě ve volbě vzpěrné výšky desky l_{cr} ,
- relativně velkému poměru rozměru jednotkové buňky vzhledem k charakteristickému rozměru konstrukce,
- vlivu okrajových efektů v uložení desky,

viz též systematická studie těchto vlivů pro jednorozměrnou úlohu (Somolová a Zeman, 2004). Obecně se dá říci, že přesnost dosažených výsledků je uspokojivá (tj. cca 10%), není-li tloušťka desky porovnatelná s rozměrem jednotkové buňky a použijeme-li pro modelování jednotkové buňky deskový model založený na Mindlinových předpokladech. V opačném případě by pravděpodobně byla na místě plně trojrozměrná analýza jednotkové buňky, což je však nepoměrně

Stěna	$F_{cr}^{exp} [N]$	$F_{cr}^{num} [N]$	$F_{cr}^{kirchoff} [N]$	$F_{cr}^{mindlin} [N]$
PWC 3-3	107,7	106,6	121,8	105,8
PWC 3-4	154,4	155,2	144,3	130,7
PWC 3-12	147,4	147,6	144,8	138,7
PWC 4-3	146,3	154,0	251,4	198,5
PWC 4-12	169,3	161,7	196,0	171,1
PWC 5-3	118,8	147,6	267,8	175,5
PWC 5-4	186,0	183,5	279,6	192,9
PWC 5-12	249,7	235,2	323,2	257,4
PWC 6-12	271,6	296,0	433,2	301,7
PWC 6-24	178,4	183,7	309,9	230,0
PWC 6-240	294,6	302,7	422,8	344,6
PWS 5-26	282,3	294,1	309,3	301,2
PWS 6-27	396,4	407,1	420,1	409,6
PWT 6-20	293,6	285,2	369,1	×

Tabulka 2: Porovnání experimentálních výsledků a numerických výsledků pro celou konstrukci (Máca a Fajman, 1996) s homogenizačními metodami ($l_{cr} = 0, 23 \text{ m}$)

náročnější než studovaný přístup. Detailnější analýza jednotlivých vlivů a případné zvýšení přesnosti získaných výsledků bude tématem dalšího výzkumu.

Poděkování. Na tomto místě by autoři rádi poděkovali Doc. Ing. Jiřímu Mácovi, CSc. za poskytnutí detailní dokumentace výpočtů a experimentálních výsledků. Tento příspěvek vznikl za finanční podpory grantu GAČR 103/04/P254.

Reference

- ADINA (2003). *Theory and Modeling Guide. Volume I: ADINA*. ADINA R & D, Inc.
- Bittnar, Z. a Šejnoha, J. (1992). *Numerické metody mechaniky*, volume I. ES ČVUT, Praha.
- Kouznetsova, V., Brekelmans, W. A. M. a Baaijens, P. T. (2001). An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. *Computational Mechanics*, 27(1):37–48.
- Lewiński, T. a Telega, J. (1999). *Plates, laminates and shells : Asymptotic analysis and homogenization*, volume 52 of *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.
- Máca, J. a Fajman, P. (1995). Mechanika perforovaných stěn – numerická analýza. Výzkumná zpráva, Katedra stavební mechaniky, ČVUT v Praze.
- Máca, J. a Fajman, P. (1996). Numerical analysis of perforated webs. *Engineering Mechanics*, 3(5):331–335.
- Somolová, A. a Zeman, J. (2004). Homogenizace prizmatické konzoly. *Stavební obzor*, 13(9):282–287.