INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005
NÁRODNÍ KONFERENCE
s mezinárodní účastí
Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

APPLICATION CHEN MODEL OF PLASTICITY TO HARDENING CONCRETE

M. Šípalová*, **J. Kruis**†, **P. Štemberk***

Summary: *Chen model of plasticity was originally derived for solid materials with different strengths in compression and tension, such as concrete or some types of soil. In this work, it is tried to extend the range of application of the Chen model to hardening concrete. At very early ages the microstructure of concrete is developing very rapidly which means that, once compared with already hardened concrete, the material parameters of the Chen model should be a function of the microstructure evolution. The proposed modification of the Chen model considers this effect in terms of the degree of hydration.This approach is described and all necessary equations and parameters are given. The results of the modified Chen model are compared with experimental results.*

1. Úvod

Beton je jeden z nejběžnějších stavebních materiálů a je používán pro svou pevnost a tvarovou variabilitu. Oproti oceli, která je při výstavbě již hotovým materiálem s návrhovými vlastnostmi, má beton tu nevýhodu, že se ve většině případů dodává na stavbu jako tekutá směs, ze které se až časem stane materiál s předpokládanými návrhovými vlastnostmi.

V současné době je navíc kladen důraz na rychlost výstavby a je třeba hledat možnosti, jak dobu výstavby zkrátit. U železobetonových monolitických konstrukcí se toto zkracování týká především betonáže hrubé stavby. Dalším, často zohledňovaným, faktorem je ekonomické hledisko stavby, které lze ovlivnit u železobetonové konstrukce množstvím potřebného bednění, pokud nebereme v úvahu statický návrh konstrukce. Možností, jak vyhovět co nejlépe těmto dvěma hlediskům, je zkracování technologické pauzy, která vzniká mezi betonáží a následným zatěžováním a odbedňováním konstrukce. To však často vede na přetěžování betonu v období jeho tuhnutí a tvrdnutí, tedy v době kdy jeho struktura není zcela vytvořena.

V tomto příspěvku je navržena kombinace Chenova modelu (Chen, 1982), který je vhodný pro modelování již ztvrdlého betonu, s funkcí vývoje mikrostruktury betonu, čímž je možné rozšířit použitelnost Chenova modelu i pro tvrdnoucí betony. Jako funkce vývoje mikrostruktury byl použit vztah uvedený v (Štemberk & Tsubaki, 2003a) pro rychletuhnoucí betony. Parametry uvedeného vztahu jsou velmi jednoduše identifikovatelné z výsledků získaných běžnými experimentálními metodami. Všechny materiálové parametry Chenova modelu plasticity

*Ing. Michaela Šípalová, Ing. Petr Štemberk, Ph.D.: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta stavební, Katedra betonových konstrukcí a mostů; Thákurova 7; 160 29 Praha 6; tel.: +420 224 354 364, fax: +420 233 335 797; e-mail: michaela.sipalova@fsv.cvut.cz, stemberk@fsv.cvut.cz

†Ing. Jaroslav Kruis, Ph.D.: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta stavební, Katedra stavební mechaniky; Thákurova 7; 160 29 Praha 6; tel.: +420 224 354 369, fax: +420 233 335 797; e-mail: jk@cml.fsv.cvut.cz

jsou tedy funkcí tohoto vztahu. Výsledky modifikovaného Chenova modelu jsou srovnány s experimentálními výsledky.

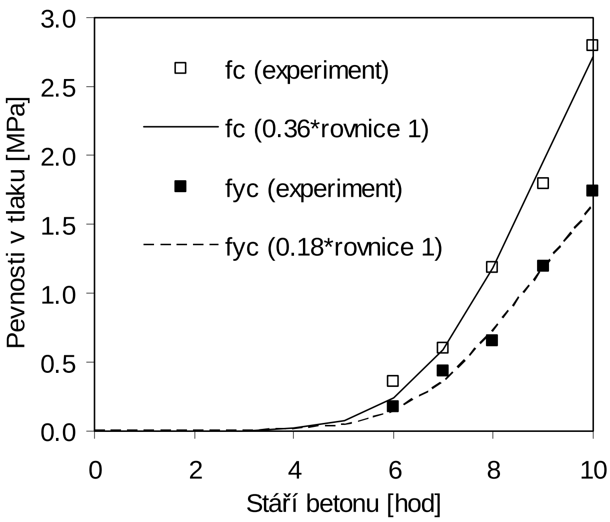
2. Vývoj mikrostruktury betonu

Při modelování tuhnoucích a tvrdnoucích betonů je nutné vzít v úvahu vliv probíhající hydratace. Ve velmi raných stádiích, čímž se myslí stáří betonu do jednoho dne, beton přechází z tekuté do tuhé konzistence a dále tvrdne. Z tohoto důvodu není možné materiálové parametry modelu tvrdnoucího betonu považovat za konstanty. Pro vyjádření vývoje vlivu hydratace lze použít různé koncepty kvantifikace hydratace, přičemž jako nejvýhodnější lze v tomto případě uvažovat koncept stupně hydratace. Na tomto základě byla vyvinuta funkce (Štemberk & Tsubaki, 2003a)

$$
\begin{aligned}
f(t_n) &= a_5 \cdot \left(\frac{a_3 t_n^{a_2}}{a_1 + a_3 t_n^{a_2}} \right)^{a_4} \\
a_1 &= 10 \\
a_2 &= 9{,}164 - 7{,}2W/C \\
a_3 &= 0{,}72 \\
a_4 &= 1 \\
a_5 &= 15 \ ,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

kde t_n je normalizovaný čas vzhledem ke konečnému času tuhnutí, W/C je vodní součinitel (poměr množství vody k množství cementu) a a_1, a_2, a_3, a_4 a a_5 jsou empirické parametry, které lze získat z experimentů.

Výhodou této funkce je relativně snadné získání jejích parametrů. Tato křivka byla vyvinuta pro rychletuhnoucí betony běžného složení pro vodní součinitele v rozmezí W/C=0,37 až 0,62, což zhruba odpovídá 28-denním pevnostem v tlaku 30 MPa až 60 MPa.



Obrázek 1: Porovnání vývoje tlakové pevnosti betonu zjištěné a vypočtené

Na obrázku 1 je ukázáno porovnání experimentálně získaného vývoje meze plasticity, f_y, a pevnosti v tlaku, f_{yc}, a jejich vyjádření pomocí rovnice 1 (uvažované násobky funkce jsou uvedeny v obrázku 1). Oba tyto parametry jsou uvažovány v Chenově modelu plasticity.

3. Chenův model plasticity

Model použitý v příspěvku vychází z Chenova modelu plasticity (Chen, 1982), který je tříparametrickým modelem se zahrnutým izotropním zpevněním. Tento model zahrnuje odlišné chování betonu při různých způsobech namáhání.

U Chenova modelu je kvůli rozdílnému chování betonu v tahu a tlaku rozdělena funkce zatěžování f na dvě části. První část, f^c, platí jen v oblasti tlaku a druhá část, f^t, určuje vznik plastického přetváření betonu namáhaného tahem nebo tlakem při obecné napjatosti. Vzhledem k tomu, že se jedná o odlišné funkce (v oblasti tlak-tlak o parabolu, v ostatních oblastech o hyperbolu) je nutné příslušné namáhání správně zatřídit. U dvouosé napjatosti je toto zatřídění zřejmé ze znázornění v rovině souřadnic hlavních napětí (σ_1, σ_2). Zónování obecné napjatosti je nejlépe patrné ze znázornění v rovině souřadnic invariantů $(I_1, \sqrt{J_2})$, kde jsou oblasti různých typů napětí odděleny jednoduchými lineárními funkcemi

$$\sqrt{J_2} + \frac{I_1}{\sqrt{3}} = 0 \tag{2}$$

$$\sqrt{J_2} - \frac{I_1}{\sqrt{3}} = 0 \tag{3}$$

I_1 je první invariant tenzoru napětí a J_2 druhý invariant deviátoru tenzoru napětí.

V našem příkladě v kapitole 4 se budeme pohybovat pouze v oblasti tlak-tlak, proto budou všechny rovnice ukázány pouze pro tuto oblast, která je definována podmínkou:

$$I_1 < 0, \quad \sqrt{J_2} + \frac{I_1}{\sqrt{3}} < 0 \tag{4}$$

Počáteční plocha plasticity (initial yield surface) je v oblasti tlak-tlak popsána rovnicí

$$f_0^c(\sigma, h) = J_2 + \frac{A_0(h)}{3} I_1 - \tau_0^2(h) = 0, \tag{5}$$

kde $A_0(h)$ a $\tau_0(h)$ jsou materiálové konstanty závislé na stupni hydratace betonu, které se určí na základě experimentálně zjištěných mezí plasticity $f_{yc}(h)$ při jednoosém namáhání betonu v tlaku a $f_{ybc}(h)$ při dvouosém tlaku. Konstanty $A_0(h)$ a $\tau_0(h)$ jsou odvozeny také pro jednotlivé zóny, v oblasti tlak-tlak to je:

$$A_0(h) = \frac{f_{ybc}^2(h) - f_{yc}^2(h)}{2f_{ybc}(h) - f_{yc}(h)}, \quad \tau_0^2 = \frac{f_{yc}(h) f_{ybc}(h)(2f_{yc}(h) - f_{ybc}(h))}{3(2f_{ybc}(h) - f_{yc}(h))} \tag{6}$$

Podmínka porušení (failure surface) je pro oblast tlak-tlak definována

$$f_u^c(\sigma, h) = J_2 + \frac{A_u(h)}{3} I_1 - \tau_u^2(h) = 0 \tag{7}$$

kde parametry $A_u(h)$ a $\tau_u(h)$ závislé na stupni hydratace, se kterým rostou pevnosti betonu, jsou pro jednotlivé oblast tlak - tlak odvozeny následovně:

$$A_u(h) = \frac{f_{bc}^2(h) - f_c^2(h)}{2f_{bc}(h) - f_c(h)}, \quad \tau_u^2 = \frac{f_c(h) f_{bc}(h)(2f_c(h) - f_{bc}(h))}{3(2f_{bc}(h) - f_c(h))}, \tag{8}$$

kde jsou $f_c(h)$ pevnosti betonu v tlaku při jednoosém a $f_{bc}(h)$ pevnosti v dvouosém tlaku, všechny tyto materiálové paramtery jsou opět závislé na stupni hydratace.

Následné plochy plasticity vznikají "rozpínáním" počátečních ploch plasticity až k ploše porušení a jsou definovány v zóně tlak-tlak:

$$f^c(\sigma,h) = J_2 + \frac{\beta(h)}{3} I_1 - \tau^2 \left(1 - \frac{\alpha(h)}{3} I_1\right) = 0 \tag{9}$$

Konstanty α a β jsou určeny výrazy:

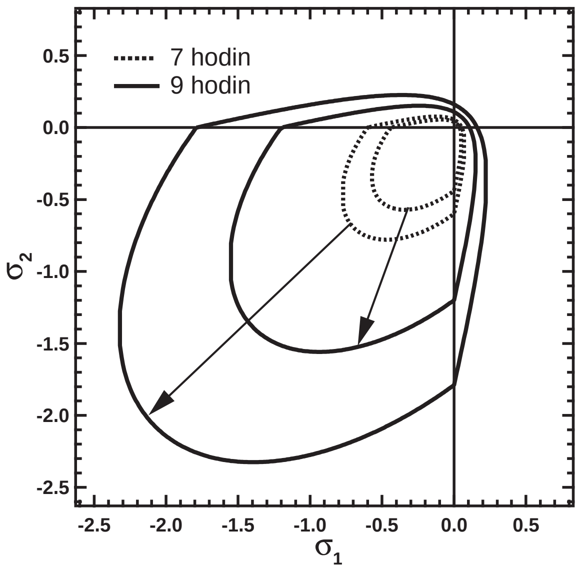
$$\alpha(h) = \frac{A_u(h) - A_0(h)}{\tau_u^2(h) - \tau_0^2(h)}, \quad \beta(h) = \frac{A_0(h)\tau_u^2(h) - A_u(h)\tau_0^2(h)}{\tau_u^2(h) - \tau_0^2(h)} \tag{10}$$

Parametr zpevnění τ je určen ekvivalentní plastickou deformací. Ekvivalentní plastická deformace

$$\varepsilon_{eq}^p = \sum d\varepsilon_{eq}^p = \sum \sqrt{\frac{2}{3}} \left[d\varepsilon_{x\ p}^2 + d\varepsilon_{y\ p}^2 + d\varepsilon_{z\ p}^2 + \frac{1}{2}\left(d\gamma_{yz\ p}^2 + d\gamma_{zx\ p}^2 + d\gamma_{xy\ p}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

se při jednoosém namáhání rovná plastické deformaci v uvažovaném směru.

Vzhledem k tomu, že všechny materiálové parametry použité v předchozích rovnicích jsou závislé na stupni hydratace, je zřejmé, že se s přibývajícím časem a rostoucím stupněm hydratace se mění i plochy plasticity. S narůstem pevností betonu se "rozpínají" plochy plasticity, tedy počáteční plocha plasticity, plocha charakterizující porušení materiálu i následné plochy plasticity mezilehlé předchozím dvěma jmenovaným plochám.



Obrázek 2: Rozpínání ploch plasticity v závislosti na stáří betonu

Na obrázku 2 je znázorněn vývoj počáteční plochy plasticity a plochy porušení pro dvouosou napjatost v rovině souřadnic hlavních napětí (σ_1, σ_2). Tečkovanou čarou jsou vykresleny plochy plasticity pro beton ve stáří sedmi hodin a plnou čarou jsou vykresleny plochy plasticity pro beton stáří 9 hodin. Vnitřní křivka z dvojice znázorňuje vždy počáteční plochu plasticity, vnější křivka z dvojice plochu porušení. Šipkami je znázorněn nárůst obou ploch v období dvou hodin během tvrdnutí betonu. Hodnoty vykreslené v tomto obrázku vychází z experimentálně zjištěných hodnot, které jsou použity v následujícím textu pro konkrétní příklad.

4. Příklad jedoosého tlakového namáhání

Pro tento příklad budou použita experimentální data uvedená v (Štemberk & Tsubaki, 2003b), viz tabulka 1.

Tabulka 1: Experimentálně zjištěné pevnosti betonu v tlaku

Stáří betonu	f_{yc}	f_c
6 hodin	0,17	0,36
7 hodin	0,44	0,60
8 hodin	0,65	1,18
9 hodin	1,20	1,79
10 hodin	1,74	2,79

V tabulce 1 jsou uvedeny experimentálně zjištěné pevnosti betonu v tlaku f_c a meze plasticity f_{yc} pro betony stáří od 6 hodin do 10 hodin. Chen ve svém článku (Chen & Chen 1975) uvádí jak lze získat z experimentálně změřené pevnosti v tlaku ostatní parametry modelu. Pokud je tedy známa pevnost betonu v tlaku f_c, lze ostatní hodnoty dopočítat z následujících vztahů

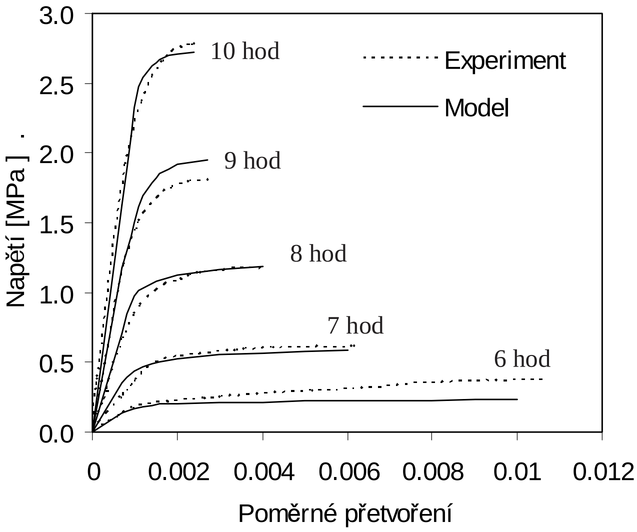
$$\begin{aligned} f_t &= 0{,}09 f_c \ , \\ f_{bc} &= 1{,}16 f_c \ , \\ f_{yc} &= 0{,}6 f_c \ , \\ f_{yt} &= 0{,}054 f_c = 0{,}09 f_{yc} \ , \\ f_{ybc} &= 0{,}6 f_{bc} = 1{,}16 f_{yc} \ . \end{aligned} \tag{12}$$

V našem příkladu jsme se zabývali pouze jednoosým tlakovým namáháním, které je zařazeno do oblasti tlak-tlak. Proto nám stačilo dle rovnic 12 dopočítat pevnost betonu v dvouosém tlaku f_{bc} a mez plasticity f_{ybc} v dvouosém tlaku. Mez plasticity v jednoosém tlaku f_{yc} byla experimentálně naměřena. Z tabulky 1 naměřených hodnot je zřejmé, že meze plasticity jsou 60% odpovídajících pevností betonu stejně tak, jako Chen uvádí ve svých vzorcích, což znamená, že použití rovnic 12 je oprávněné.

Na obrázku 3 je porovnání výpočtu dle rovnic uvedených v kapitole 3 s experimentálně získanými hodnotami. Z tohoto obrázku je patrné, že shoda výsledků získaných výpočtem dle uvedeného modelu a experimentálně je přijatelná.

5. Závěr

V tomto příspěvku byla popsána modifikace Chenova modelu plasticity, která umožňuje jeho použíti i pro tvrdnoucí betony. Z tohoto důvodu byly parametry Chenova modelu, tedy meze plasticity a pevnosti pro zatížení v tlaku, definovány jako funkce stupně hydratace. Stupeň hydratace pro tvrdnoucí beton byl již dříve získán z experimentálního šetření.



Obrázek 3: Porovnání výsledků zkoušky a výpočtu dle Chenova modelu

Výsledky získané takto modifikovaným Chenovým modelem plasticity byly porovnány s výsledky naměřenými při experimentech. Velmi dobrá shoda obou výsledků potvrdila možnost užití Chenova modelu plasticity nejenom pro již ztvrdlý beton, ale i pro tvrdnoucí beton, jehož struktura se stále vytváří.

6. Poděkování

Tato práce byla provedena za plné finanční podpory GA ČR (projekt číslo 103/05/2244), za kterou autoři děkují.

7. Literatura

Chen, A.C.T. & Chen, W.F. (1975) Constitutive Equations and Punch-Identation of Concrete. *Journal of the engineering mechanics division*, Vol.101, No.EM6, pp.889–906.

Chen, W.F. (1982) *Plasticity in reinforced concrete*. Osborne-McGraw-Hill, New York.

Štemberk P. & Tsubaki T. (2003a) Modeling of Solidifying Concrete under One-Dimensional Loading. *Proc. of JCI*, Vol.25, No.1, pp.587–592.

Štemberk P. & Tsubaki T.(2003b) Uniaxial Deformational Behavior and Its Modeling of Solidifying Concrete under Short-time and Sustained Loading. *Journal of Applied Mechanics*, Vol.6, pp.437–444.