INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005

NÁRODNÍ KONFERENCE

s mezinárodní účastí

Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

THE ANALYSIS OF DYNAMICAL SYSTEMS FOR SIMULATION OF RELAXATION OSCILLATION

P. Pejchal[*], P. Janíček[**] , J. Petruška[***] , F. Procházka[****]

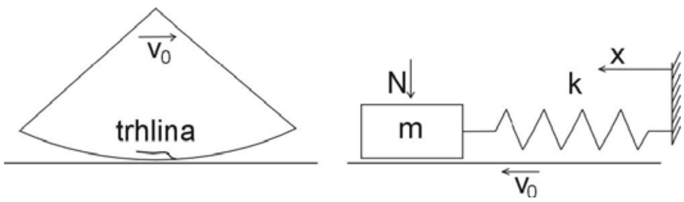
Summary: *The hypothesis was stated, that the relaxation oscillation emerge in the surface layers of wheel and rail, by the accelerating and braking period of the rail vehicles. The issue is to analyze the nonlinear dynamic systems, which are used to simulate these systems. This study focuses on the periodic and chaotic behaviour of the unforced and forced Van der Pol oscilator. The variation of control parametr is also considered. Moreover the behaviour of the same real system with Rayleigh, exponencial and constant with adhesion contact friction model is studied. This is preparatory study for potencial experimental validation of the occurence of relaxation oscillation.*

1. Úvod

Při provozu kolejových vozidel dochází ve styku železničního kola s kolejnicí ke značnému dynamickému namáhání povrchových vrstev. Probíhá zde řada dějů, z nichž některé způsobují degradaci materiálu a tím i jízdních ploch. Výzkumem degradačních procesů se již zabývala celá řada autorů, ale příčiny vzniku některých poruch nejsou dosud jasné. V souvislosti se vznikem některých poruch byla vyslovena hypotéza o možném vzniku samobuzeného a případně i relaxačního kmitání při podmínkách intenzivního brzdění (Beneš et al., 2004) a rozjezdu, tato hypotéza nebyla dosud dále dostatečně rozvedena.

Příspěvek se zabývá chováním jednoduchého dynamického systému, který je tvořen hmotou uchycenou na pružince, tato hmota leží na podložce pohybující se konstantní rychlostí, viz obrázek 1.

Tímto je modelováno smýkání kola po kolejnici při intenzivním brzdění, či rozjezdu. Hmota představuje povrchovou vrstvu kola resp. kolejnice např. v okolí defektů typu trhlin a podložka realizuje kolejnici resp. kolo smýkající se zadanou konstantní rychlostí.



Obrázek 1: Analyzovaný model

[*] Ing. Petr Pejchal, :Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, VUT v Brně; Technická 2896/2; 616 69 Brno; e-mail: pejchal.p@centrum.cz

[**] Prof. Ing. Přemysl Janíček, DrSc. :Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, VUT v Brně

[***] Doc. Ing. Jindřich Petruška, CSc. :Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, VUT v Brně

[****] Ing. František Procházka, PhD. :Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, VUT v Brně

Takovýto model byl vytvořen s ohledem na jednoduchost a názornost. Navíc je známo (Ekberk et al., 2004) , že se trhliny iniciované na povrchu zpočátku šíří do materiálu pod ostrým úhlem, následně se stočí do téměř radiálního směru a u železničních kol se v určité hloubce opět stočí (větví) a pokračuje v růstu v radiálním směru. K iniciaci únavových trhlin také často dochází pod povrchem a tyto trhliny se dále obvykle šíří v obvodovém směru. Lokalizaci trhliny poté můžeme zjednodušeně naznačit viz obrázek1.

Byly sledovány průběhy výchylky a rychlosti hmoty při různých parametrech systému a různých modelech tření ve stykové ploše. Konkrétně pro model tření podle Van der Pola, Rayleigho a dále tření s exponenciálním a skokovým průběhem vzhledem k rychlosti relativního pohybu hmoty a podložky. Pro jednotlivé parametry systému byly sestaveny diferenciální rovnice, které byly integrovány v čase. K integraci byl využit řešič ode45 programu Matlab, který řeší diferenciální rovnice Dormand – Princeovou metodou, což je explicitní Rungeova – Kutova metoda řádu 5.

2.Van der Pol

Pohybovou rovnici soustavy zobrazené na obrázku 1 můžeme zapsat ve tvaru:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx - F(v\ ) = 0 \qquad (1)$$

Kde člen rovnice b reprezentuje tlumení a F(v) je třecí síla, která je obecně funkcí normálové stykové síly N a rychlosti relativního pohybu hmoty vůči podložce v, tedy v = dx/dt - v_0 a F(v) = F(dx/dt - v_0). Pokud sílu F rozvineme v okolí bodu dx/dt = v_0 (rovnice 2) a dosadíme do rovnice 1 získáme rovnici 3.

$$F(\frac{dx}{dt} - v_0) = F(-v_0) + \frac{dx}{dt}\frac{dF_{v0}}{dv} \qquad (2)$$

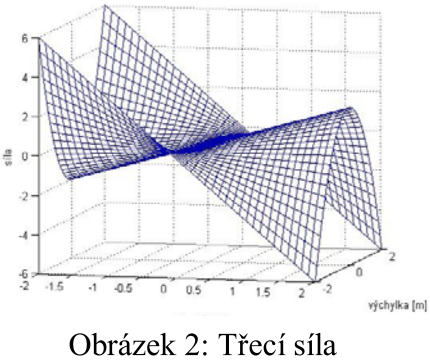
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + (b - \frac{dF_{v0}}{dv})\frac{dx}{dt} + kx = F(-v_0) \qquad (3)$$

Člen $F(-v_0)$ způsobí posunutí rovnovážné polohy o x = $F(-v_0)$/k, z tohoto důvodu provedeme transformaci x = $F(-v_0)$ /k + y. Dále označme β = b/m a ω^2 = k/m. Pro suché tření mezi dvěma tělesy je charakteristická závislost dle rovnice 4 [4], dosazením této závislosti do 3, provedením substituce $z = \sqrt{\delta/\alpha - b}\,y$ a označením $\varepsilon = \alpha - b/m$ dostaneme rovnici 6. Pro názornost byla provedena integrace rovnice 4 a pro δ =1, α =1, b=0 a nulovou integrační konstantu je na obrázku 2 uvedena závislost třecí síly na výchylce a rychlosti.

$$\frac{dF_{v0}}{dv} = -\delta y^2 + \alpha \qquad (4)$$

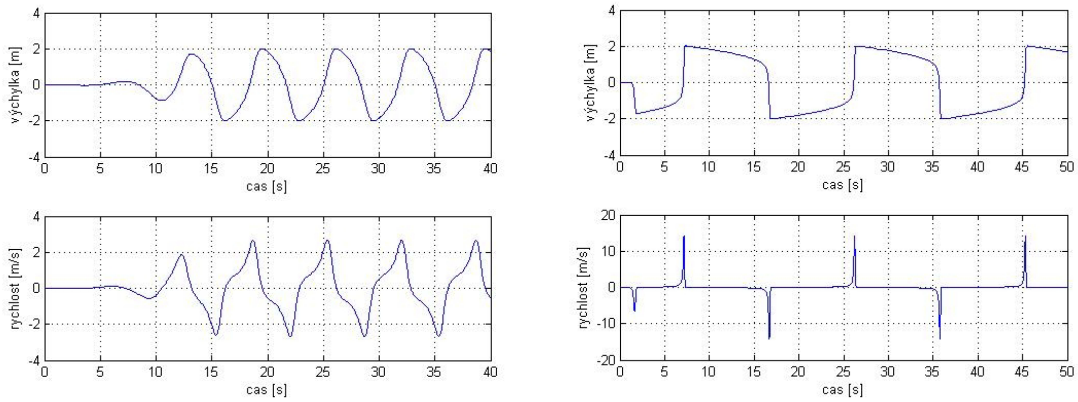
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{m}(\delta y^2 + b - \alpha)\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \varepsilon(z^2 - 1)\frac{dz}{dt} + \omega^2 z = 0 \qquad (6)$$



Obrázek 2: Třecí síla

Pohybová rovnice 6 je označována jako Van der Polova rovnice (Brepta, 1994) a její chování je řízeno velikostí parametru ε . Systém popsaný touto rovnicí se chová jako samobuzený a pro velké hodnoty ε zde dochází ke vzniku relaxačního kmitání. Relaxačním kmitáním je rozuměna rychlá - skoková změna některé kinematické veličiny. V našem případě se jedná jak o skokovou, nebo spíše impulsní, změnu rychlosti tak o skokovou změnu výchylky.



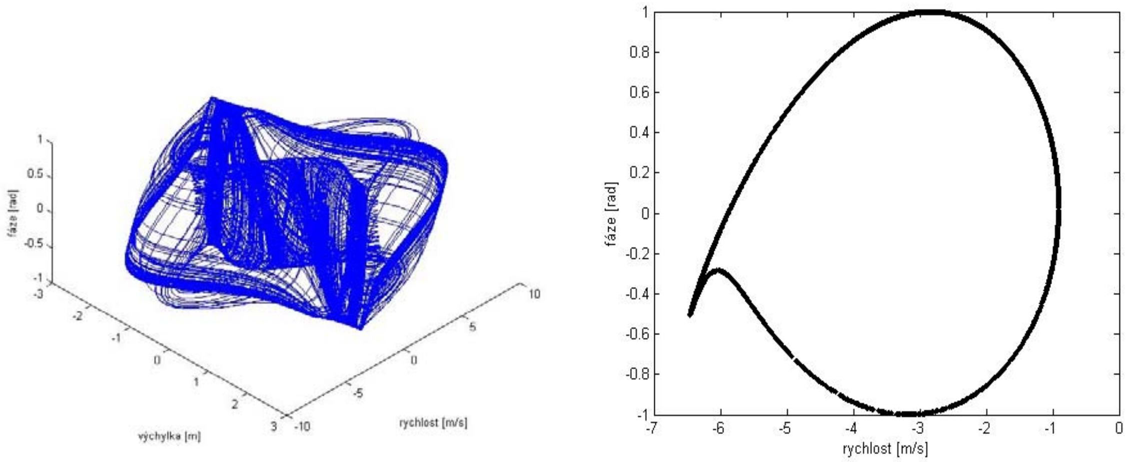
Obrázek 3: Časový průběh výchylky a rychlosti pro ε = 1 a ε = 10

Pokud by k takovýmto skokovým změnám rychlosti docházelo v povrchových vrstvách kola resp. kolejnice lze předpokládat, že by tento jev měl značné degradační účinky. Z uvedeného postupu není však zcela jasný fyzikální význam členů rovnice 4 a proto lze jen těžko rozhodnout o reálnosti daného výpočtového modelu.

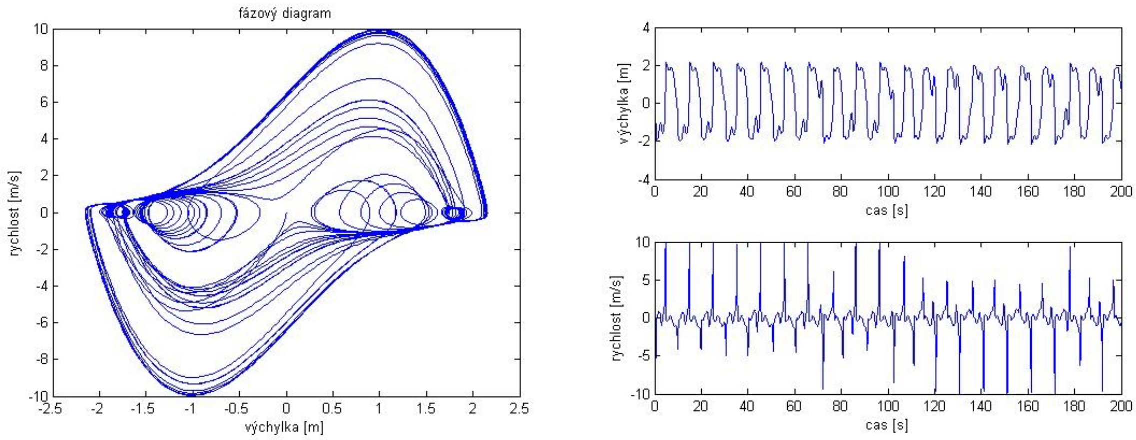
Specifickým případem je buzený Van der Polův oscilátor popsaný rovnicí 7. Pro určité hodnoty parametrů systému a buzení je chování tohoto systému značně komplikované a může být i chaotické (Kapitanik, 1998)

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \varepsilon (z^2 - 1)\frac{d\ z}{dt} + \omega^2 z = p\cos(\Omega t) \tag{7}$$

Pro hodnoty parametrů ε = 5, ω = 10, p = 5 a Ω = 2.466 je na obrázku 4 uveden fázový diagram jehož jednotlivé osy jsou: výchylka, rychlost a fáze buzení = $\cos(\Omega t)$. Dále je zde uveden Poincarého řez rovinou výchylka = 0 a to pouze pro zápornou hodnotu rychlosti. Na obrázku 5 je pohled na fázový diagram kolmo k rovině výchylka-rychlost a dále časový průběh výchylky s rychlostí.



Obrázek 4: Fázový diagram a Poincarého zobrazení



Obrázek 5: Pohled na fázový diagram a časový průběh výchylky a rychlosti

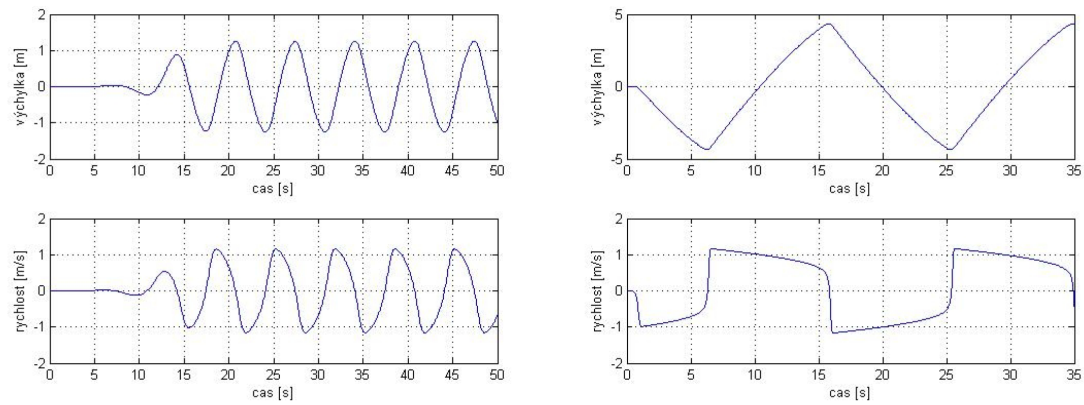
3. Rayleigh

Pokud provedeme stejné odvození pohybové rovnice jako v předešlém případě s tím rozdílem, že výraz v rovnici 4 nahradíme výrazem podle rovnice 8, dostaneme rovnici 9. Takto získáme Rayleigho diferenciální rovnici, která se používá k popisu autonomních oscilačních dějů (Brepta, 1994).

$$\frac{dF_{v0}}{dv} = -\delta \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \alpha \tag{8}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \varepsilon \left[\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - 1 \right] \frac{dz}{dt} + \omega^2 z = 0 \tag{9}$$

Stejně jako v předchozím případě je chování takto popsaného systému řízeno velikostí parametru ε. Na obrázku 4 jsou znázorněny průběhy výchylky a rychlosti získané časovou integrací rovnice 9 a to pro různé hodnoty parametru ε. Pro velké hodnoty parametru ε v systému dochází ke skokovým změnám rychlosti – relaxačnímu kmitání. Tento jev je opět potenciálně nebezpečný z hlediska degradace povrchových vrstev kola a kolejnice.

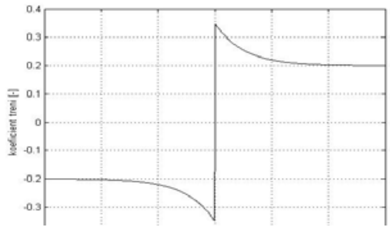


Obrázek 6: Časový průběh výchylky a rychlosti pro ε = 1 a ε = 10

3. Exponenciální průběh

Sestavíme-li diferenciální rovnici pro třecí sílu definovanou koeficientem smykového tření f podle rovnice 10 lze odvodit diferenciální rovnici soustavy ve tvaru rovnice 11. Grafické znázornění rovnice 10 je na obrázku 7.

$$f = fd + (fs - fd)\exp(-vd(\frac{dx}{dt} - v_0)) \qquad (10)$$

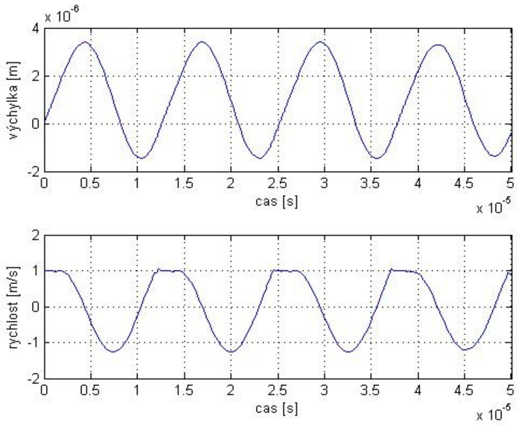


Obrázek 7:
Exponenciální model tření

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x - \frac{N}{m}sign(v_0 - \frac{dx}{dt})\left[fd + (fs - fd)\exp\left(-vd\left|v_0 - \frac{dx}{dt}\right|\right)\right] = 0 \qquad (11)$$

Rychlost pohybu podložky $v_0 = 1$ [m/s]
Hmotnost m = 1.56e-4 [kg]
Tuhost pružinzy k = 4.2e7 [N/m]
Přítlačná síla N = 200 [N]
Koeficient tření fd = 0.2, fs = 0.35, vd = 2

Pro uvedené parametry diferenciální rovnice je na obrázku 8 vynesena časová závislost výchylky a rychlosti. Zákmity křivek v okolí oblasti dx/dt = v_0 jsou způsobeny tím, že v této oblasti není k popisu chování soustavy rovnice 11 vhodná – v této oblasti má platit dx/dt = v_0, což vyžaduje sestavení druhé pohybové rovnice. V této oblasti ulpívá hmota na podložce a k odtržení dojde až tehdy, kdy síla pružného členu přesáhne sílu třecí. Poté dojde k zákmitu a opětovnému ulpění.



Obrázek 8:
Časový průběh výchylky a rychlosti

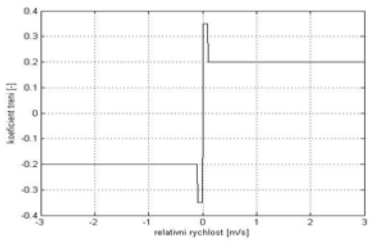
4. Konstantní s adhezí

Budeme-li uvažovat model konstantního smykového tření s adhezí podle rovnice 12, graficky znázorněném na obrázku 9 lze sestavit diferenciální rovnici ve tvaru 13.

$$f = fd + (fs - fd)\frac{1}{2}(sign(v_a - \left|v_0 - \frac{dx}{dt}\right|) + 1) \qquad (12)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x - \frac{N}{m}sign(v_0 - \frac{dx}{dt})(fd + (fs - fd)\frac{1}{2}(sign(v_a - \left|v_0 - \frac{dx}{dt}\right|) + 1)) = 0 \qquad (13)$$

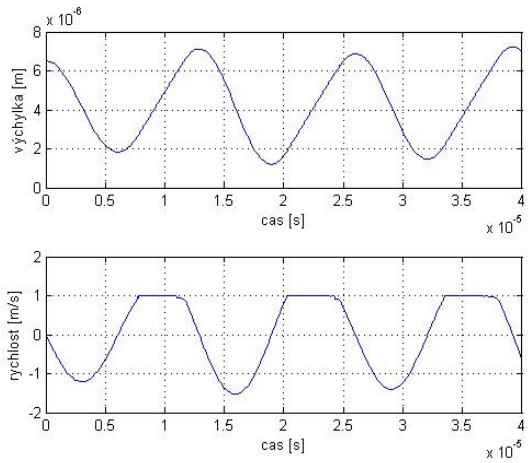
Na obrázku 7 jsou pro uvedené parametry průběhy výchylky a rychlosti. V oblasti kolem dx/dt = v_0 je podobný problém jako v předchozím. Ulpívání u obou těchto modelů je způsobeno specifickou závislostí koeficientu smykového tření v závislosti na rychlosti relativního pohybu. Ulpívání může nastat, pokud je koeficient smykového tření maximální



Obrázek 9:
Model tření

pro nulovou relativní rychlost a klesá se zvyšující se relativní rychlostí. Jev, kdy koeficient smykového tření je maximální v klidu nazýváme adhezí.

Rychlost pohybu podložky v_0 = 1 [m/s]
Hmotnost m = 1.56e-4 [kg]
Tuhost pružinzy k = 4.2e7 [N/m]
Přítlačná síla N = 500 [N]
Koeficient tření fs = 0.35, fd = 0.2, va = 0.1



Obrázek 10:
Časový průběh výchylky a rychlosti

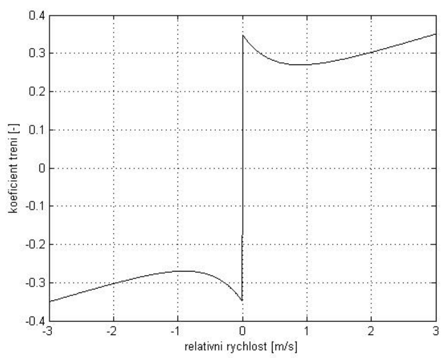
5. Exponenciálně přímkový

Z experimentálního měření závislosti smykového tření na relativní rychlosti vyplývá, že od určité hodnoty rychlosti s dalším nárůstem rychlosti zvyšuje i koeficient smykového tření. Pro popis takovéhoto chování byla sestavena třecí funkce ve tvaru rovnice 12, obrázek 11. Hodnoty všech členů zůstávají stejné jako pro případ exponenciálního průběhu. Diferenciální rovnice je v tomto případě tvaru rovnice 13.

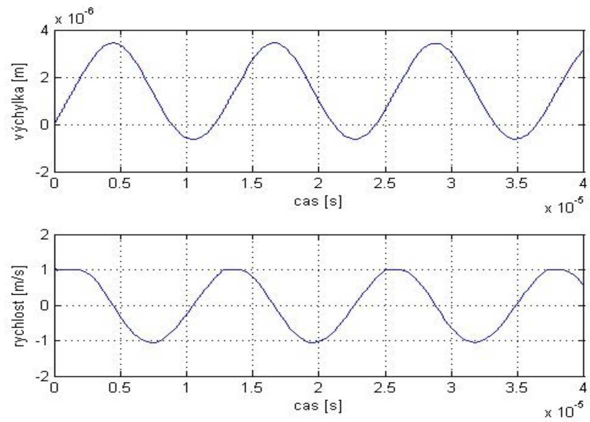
$$f = fd + (fs - fd)\exp(-vd(\frac{dx}{dt} - v_0) + 0.05(\frac{dx}{dt} - v_0)) \tag{12}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x - \frac{N}{m}sign(v_0 - \frac{dx}{dt})\left[fd + (fs - fd)\exp\left(-vd\left|v_0 - \frac{dx}{dt}\right|\right) + 0.05\left|v_0 - \frac{dx}{dt}\right|\right] = 0 \tag{13}$$

Na obrázku 12 jsou časové průběhy výchylky a rychlosti odpovídající tomuto modelu. Stejně jako u předchozích dvou modelů zde dochází v oblasti dx/dt = v_0 k ulpívání. Vlivem vyššího tření pro vyšší rychlosti však dochází k ulpívání pouze v kratším časovém okamžiku.



Obrázek 9: Model tření
Exponeciálně přímková závislost



Obrázek 10:
Časový průběh výchylky a rychlosti

6. Závěr

Za účelem ověření hypotézy možného vzniku relaxačního kmitání v povrchových vrstvách železničního kola resp. kolejnice byl vytvořen jednoduchý výpočtový model. Pro různé modely tření byla provedena analýza dynamického chování tohoto modelu.

U Van der Polova oscilátoru dochází při jistých parametrech systému k relaxačnímu kmitání, konkrétně ke skokovým změnám rychlosti i výchylky. Pokud navíc přidáme buzení, tak se systém může chovat i chaoticky.

U oscilátoru s modelem tření podle Rayleigho dochází taktéž pro jisté parametry systému k relaxačnímu kmitání, v tomto případě se však jedná pouze o skokovou změnu rychlosti.

U modelu tření exponenciálního, konstantního s adhezí a exponeciálně přímkového, dochází pro jisté počáteční podmínky v oblasti dx/dt = v_0 k ulpívání hmoty na podložce a následnému zákmitu. Pro jisté parametry systému (velká tuhost, malá hmotnost, velké tření) lze očekávat rychlejší změnu rychlosti při zákmitu a tudíž přiblížení charakteru průběhů kinematických veličin relaxačnímu kmitání.

7. Literatura

[1] Beneš,L. Kaloč,R. Ballivián,J. :Možný vznik relaxačních kmitů v povrchové vrstvě železničního kola, Sborník konference TechMat04, Česká Třebová 2004

[2] Brepta,R. :Mechanické kmitání, Sobotálés,Praha 1994

[3] Ekberk,A. Kabo,E. :Fatigue of Railway Wheel and Rails under Rolling Contact and Thermal Loading, Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden, 2003

[4] Kapitanik,T. :Chaos for Engineers, Springer, Heidelberg 1998

[5] www.matlab.com