

DYNAMIC RESPONSE OF THE BEAM UNDER MOVING LOAD AND AXIAL PERIODIC FORCE AND WITH THE DAMPING DEPENDING ON THE AMPLITUDE OF VIBRATION

L. Pečínka^{*}

Summary: *Analysis of the dynamic response of the beam under moving load and axial periodic force and with constant damping result in well known solution of Mathieu equation. In fact structural damping depend on the velocity of deformation. In this paper the governing equations of damping defined are and the equation of motion of the beames derived. The solution is based on the expansion of amplitude $y(x,t)$ using beam functions and on the application of Van der Pole method. The results may be formulated as follows: (a) the frequency and the related band of parametric resonance are derived, (b) the influence of moving load velocity on the width of this band is discussed. (c) the increasing velocity reduce the width, (d) in general the width depend on the ratio of axial forces (static and dynamic) and critical force of buckling.*

1. Úvod

V předchozích pracích bylo analyzováno chování potrubí protékaného proudem media o vysoké rychlosti. Dosavadní výsledky lze stručně shrnout takto

- i) u Euler-Bernoulliho (E-B) nosníku zvyšující se rychlost proudění snižuje vlastní frekvence, po dosažení kritické rychlosti nastává vzpěr [1, 2]. U nadkritické rychlosti nastává nestabilita typu flutter [2],
- ii) obdobným způsobem se chová Lagrangeův (L) nosník [3],
- iii) Timoshenkova (T) nosníku při přejezdu břemene zvyšující se rychlost analogicky k E-B nosníku snižuje frekvenci až na nulu, ale ta s růstem rychlosti je čistě imaginární, což reprezentuje vzpěr. Nestabilita typu flutter zde neexistuje [3]. U druhé (vysoké) frekvence dochází k opačnému jevu: rostoucí rychlost ji zvyšuje, ale ne významně,
- iv) je-li nosník s konstantním tlumením zatížen osovou silou, pak pohybová rovnice má tvar rovnice Mathieu [4] a s tím souvisejícími oblastmi stability a nestability. Rostoucí rychlost při konstantním tlumení zvyšuje možnost dosažení hranice nestability. Po dosažení kritické rychlosti nedochází ke vzpěru, ale amplituda kmitání se s časem zvyšuje. Totéž platí i pro nadkritické rychlosti. Vliv Coriolisova zrychlení snižuje součinitel tlumení, čili rozšiřuje oblasti nestability.

^{*} Ing. Ladislav Pečínka, CSc., Ústav jaderného výzkumu Řež a.s., Husinec-Řež, čp. 130, PSC 250 68, tel. 266 172 610, fax 220 940 519, e-mail pel@ujv.cz

Cílem tohoto příspěvku je rozšířit případ iv) o tlumení, jehož hodnota závisí na rychlosti deformace vláken nosníku.

2) Pohybová rovnice nosníku s dissipací energie vnitřním třením

Při odvození pohybové rovnice budeme vycházet z předpokladu, že síly vnitřního tření budou lineární funkcí rychlosti deformace. Lze tudíž psát

$$\sigma = E \left(\varepsilon + b \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) \quad (1)$$

kde b je koeficient reprezentující vnitřní tření materiálu.

V případě, že v určitém intervalu frekvencí tlumení nebude záviset na frekvenci Ω , pak místo b je nutné použít vztah

$$b = \frac{b'}{\Omega} \quad (2)$$

což platí pro vynucené kmitání s frekvencí Ω . Vzhledem k úvodnímu předpokladu, že tlumení závisí na amplitudě kmitání, lze v obecném případě vycházet z rovnice

$$\sigma = E \left[\varepsilon + (b_0 + b_1 \varepsilon_0 \operatorname{sign} \varepsilon_0 + p_2 \varepsilon_0^2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right] \quad (3)$$

kde

ε_0 amplituda ε

$$\varepsilon = \frac{\xi}{\rho}$$

ξ vzdálenost vlákna od neutrální osy

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{d x^2} \quad \text{poloměr zakřivení}$$

Za těchto předpokladů ohybový moment působící v příčném řezu na libovolné vzdálenosti x má tvar

$$-M = EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{EJ}{\Omega} \left\{ b_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x^2} + \left[b_1 a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \operatorname{sign} X + b_2 a^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right] \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} \right\} \quad (4)$$

kde

b_0, b_1, b_2 jsou hodnoty tlumení získané z experimentů

a je amplituda výchylky.

Ze známé podmínky rovnováhy elementu o délce dx pak dostaneme výslednou pohybovou rovnici ve tvaru

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EJ}{\Omega} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \times \\ \times \left\{ \left[b_0 + b_1 a \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \operatorname{sign} X + b_2 a^2 \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right) \right] \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right\} + F_0 (1 + \alpha \cos 2\Omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

přičemž je již uvažována axiální periodická síla o amplitudách $F_0, F_0\alpha$ a frekvenci 2Ω .

Vliv pohyblivého zatížení se zavede analogicky k předchozím pracím [1÷4]. Výsledný tvar pohybové rovnice tudíž bude

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + (m_F U^2 + p A - S) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2m_F U \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} + m_T \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EJ}{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \times \\ \times \left\{ \left[b_0 + b_1 a \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \operatorname{sign} X + b_2 a^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 \right] \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right\} + F_0 (1 + \alpha \cos 2\Omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (6)$$

kde

- m_T hmotnost potrubí včetně média na jednotku délky ($m_T = M + m_F$)
 m_F hmotnost média na jednotku délky
 U rychlost média
 p tlak média
 A příčná plocha průtočného průřezu
 S axiální síla vyvolaná vnitřním tlakem p a působící na potrubí ($S > 0$ znamená tah, obvykle $p A - S = 0$)
 $F_0(1 + \alpha \cos 2\Omega t)$ vnější síla vyvolaná u impulzních trubek malého průměru vibracemi hlavního potrubí, ke kterému jsou připojeny

3) Řešení pohybové rovnice

Řešení se provede rozvojem dle vlastních funkcí, tj.

$$y(x, t) = \sum_{m=1}^M F_m(x) q_m(t) \quad (7)$$

Dosazením (7) do (6), vynásobením $F_m(x)$ a integrací po celé délce nosníku dostaneme jako mezivýsledek rovnici typu

$$(M + m_T) \ddot{q}_m(t) = \\ = - \left[EJ \frac{\int_0^L F_m^{IV}(x) F_m(x) dx}{\int_0^L F_m^2(x) dx} + m_F U^2 \frac{\int_0^L F_m''(x) F_m(x) dx}{\int_0^L F_m^2(x) dx} \right] q_m(t) - \\ - \frac{EJ}{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \int_0^L \left[b_0 + b_1 a \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \operatorname{sign} F'' + b_2 a^2 \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \right)^2 \right] \frac{F_m''(x) F_m(x) dx}{\int_0^L F_m^2(x) dx} \right\} \dot{q}_m(t) - \\ - \left[F_0 (1 + \alpha \cos 2\Omega t) \frac{\int_0^L F_m''(x) F_m(x) dx}{\int_0^L F_m^2(x) dx} \right] q_m(t) = 0 \quad (8)$$

Výpočet integrálu $\frac{\partial}{\partial x^2} \int_0^L F_m''(x) F_m(x) dx$ se provede integrací per partes s výsledkem, že

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \int_0^L F_m''(x) F_m(x) dx = \int_0^L F_m''^2(x) dx$$

Tím se rovnice (8) změní na

$$\begin{aligned} (M + m_T) \ddot{q}_m(t) = & - \left[\frac{E J \int_0^L F_m^{IV}(x) F_m(x) dx}{\int_0^L F_m^2(x) dx} + m_F U^2 \frac{\int_0^L F_m''(x) F_m(x) dx}{\int_0^L F_m^2(x) dx} \right] q_m(t) - \\ & \frac{E J}{\Omega} \dot{q}_m(t) \int_0^L \left[b_0 + b_1 a \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \operatorname{sign} F'' + b_2 a^2 \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \right)^2 \right] \frac{F_m''^2(x) dx}{\int_0^L F_m^2(x) dx} - \\ & - \left[F_0 (1 + \alpha \cos 2\Omega t) \frac{\int_0^L F_m''(x) F_m(x) dx}{\int_0^L F_m^2(x) dx} \right] q_m(t) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Analogicky k [4] označíme

$$\begin{aligned} (\omega_m^{\text{red}})^2 &= \omega_m^2 + \frac{m_F}{m_T} U^2 \frac{\int_0^L F_m''(x) F_m(x) dx}{\int_0^L F_m^2(x) dx} \\ &= \frac{\omega_{0m}^2}{1 + \kappa} \left[1 + \kappa \frac{U^2}{\omega_{0m}^2} \frac{\int_0^L F_m''(x) F_m(x) dx}{\int_0^L F_m^2(x) dx} \right] \\ &= \frac{\omega_{0m}^2}{1 + \kappa} [1 + \kappa \beta_m] \end{aligned} \quad (10)$$

kde

$$\kappa = \frac{m_F}{m_T}; \quad m_T = M(1 + \kappa); \quad \omega_m^2 = \frac{k_m^{(EJ)}}{m_T} = \frac{\omega_{0m}^2}{1 + \kappa}$$

$$\delta_m = \frac{U^2}{\omega_{0m}^2} \frac{\int_0^L F_m''(x) F_m(x) dx}{\int_0^L F_m^2(x) dx} < 0 \quad \text{je tzv. rychlostní parametr, který zmenšuje vlastní frekvenci nosníku zaplněného stojícím médiem}$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme jako výsledek

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_m(t) + \Omega^2 q_m(t) = \\
& = -\frac{\omega_{0m}^2}{1+\kappa} [1 + \kappa \delta_m] q_m(t) - \frac{EJ}{\Omega \rho A} \dot{q}_m(t) \int_0^L \left[b_0 + b_1 a \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \text{sign } F'' + b_2 a^2 \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\int_0^L F_m''^2(x) dx}{\int_0^L F_m^2(x) dx} - \\
& - \left[\frac{F_0}{\rho A} (1 + \alpha \cos 2 \Omega t) \frac{\int_0^L F_m''(x) F_m(x) dx}{\int_0^L F_m^2(x) dx} \right] q_m(t) = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Pro další výpočty označíme

$$\frac{\int_0^L F_m''^2(x) dx}{\int_0^L F_m^2(x) dx} = \gamma_2; \quad \frac{\int_0^L F_m''^3(x) dx}{\int_0^L F_m^2(x) dx} = \gamma_3; \quad \frac{\int_0^L F_m''^4(x) dx}{\int_0^L F_m^2(x) dx} = \gamma_4;$$

V teorii nosníkových funkcí se opět pomocí integrace per partes dokazuje, že [6]

$$\int_0^L F_m''^2(x) dx = \int_0^L F_m''(x) F_m''(x) dx = F' F'' - \int_0^L F'(x) F_m'''(x) dx \tag{12a}$$

kde vždy nezávisle na typu okrajové podmínky $F' F'' = 0$ a dále pak

$$\int_0^L F'(x) F_m'''(x) dx = F F''' - \int_0^L F(x) F_m^{IV}(x) dx = \frac{\beta^4}{L^4} \int_0^L F^2(x) dx \tag{12b}$$

přičemž opět nezávisle na typu okrajové podmínky $F F''' = 0$. Z rovnice (12a, b) pak plyne, že

$$\gamma_2 = \frac{\beta^4}{L^4}$$

Obdobně lze dokázat, že

$$\int_0^L F_m''(x) F_m(x) dx = - \int_0^L F_m'^2(x) dx \tag{12c}$$

Ve stabilitě pružných soustav se dokazuje [7], že kritická síla na mezi pevnosti je vyjádřena vztahem

$$F_{kr} = \frac{EJ \int_0^L F''^2(x) dx}{\int_0^L F'^2(x) dx} \tag{12d}$$

Lze tedy odvodit, že (viz (12 a, b))

$$\frac{\int_0^L F''(x) F(x) dx}{\int_0^L F^2(x) dx} = - \frac{\gamma_2 \int_0^L F'^2(x) dx}{\int_0^L F''^2(x) dx} = - \frac{\beta^4}{L^4} \frac{EJ}{F_{kr}} \tag{13}$$

Výsledný tvar pohybové rovnice tudíž je

$$\begin{aligned} \ddot{q}_m(t) + \Omega^2 q_m(t) = & \left[\Omega^2 - \frac{\omega_{0m}^2}{1+\kappa} (1+\kappa) \delta_m \right] q_m(t) - \frac{EJ}{\Omega \rho F} \dot{q}_m(t) [b_0 \gamma_2 + b_1 a \gamma_3 \operatorname{sign} F'' + b_2 a^2 \gamma_4] + \\ & + \frac{F_0}{F_{kr}} \omega_{0m}^2 (1 + \alpha \cos 2 \Omega t) q_m(t) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

4) Rozbor parametrické rezonance

Budeme hledat podmínky vzniku parametrické rezonance. Řešení provedeme pro základní tvar kmitu $m=1$ a použijeme metodu Van der Pola.

Pro další položíme

$$q_1(t) = S_1 \sin \Omega t + C_1 \cos \Omega t \quad (15)$$

kde C_1 a S_1 jsou pomalu se měnící funkce času přičemž $C_1^2 + S_1^2 = a^2$.

Pak pravá strana rovnice (14) bude mít tvar

$$\begin{aligned} \phi(t) = & \varphi_1(C_1 S_1) \sin \Omega t + \varphi_2(C_1 S_1) \cos \Omega t \\ = & \cos \Omega t \left\{ \Omega^2 - \frac{\omega_{0_1}^2}{1+\kappa} (1+\kappa \delta_1) C_1 - S_1 \omega_{0_1}^2 \left[b_0 + b_1 a \gamma_3 \frac{L^4}{\alpha_1^4} \operatorname{sign} F_1'' + b_2 a^2 \gamma_4 \frac{L^4}{\alpha_1^4} \right] + \omega_{0_1}^2 \frac{F_0}{F_{kr}} C_1 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right\} + \\ & \sin \Omega t \left\{ \left[\Omega^2 - \frac{\omega_{0_1}^2}{1+\kappa} (1+\kappa \delta_1) \right] S_1 - C_1 \omega_{0_1}^2 \left[b_0 + b_1 a \gamma_3 \frac{L^4}{\alpha_1^4} \operatorname{sign} F_1'' + b_2 a^2 \gamma_4 \frac{L^4}{\alpha_1^4} \right] + \omega_{0_1}^2 \frac{F_0}{F_{kr}} S_1 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) S_1 \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

přičemž se použilo vztahů [9] ($x = 2 \Omega$, $y = \Omega$)

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

a členy s argumentem 3Ω se v prvním přiblížení zanedbaly.

Tzv. určovací rovnice budou mít tvar [5]

$$\frac{d S_1}{d t} = \frac{1}{2 \Omega} \varphi_1(C_1 S_1); \quad \frac{d C_1}{d t} = \frac{1}{2 \Omega} \varphi_2(C_1 S_1) \quad (17)$$

Položíme-li $d S_1 / d t$ a $d C_1 / d t$ rovné nule dostaneme rovnice pro určení stacionární hodnoty amplitudy ve tvaru

$$\begin{aligned} S_1 \omega_{0_1}^2 \left[b_0 + b_1 a \gamma_3 \frac{L^4}{\alpha_1^4} \operatorname{sign} F_1'' + b_2 a^2 \gamma_4 \frac{L^4}{\alpha_1^4} \right] - C_1 \left\{ \left[\Omega^2 - \frac{\omega_{0_1}^2}{1+\kappa} (1+\kappa \delta_1) \right] + \frac{F_0}{F_{kr}} \omega_{0_1} \right\} \\ S_1 \left[\Omega^2 - \frac{\omega_{0_1}^2}{1+\kappa} (1+\kappa \delta_1) + \omega_{0_1}^2 \frac{F_0}{F_{kr}} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right] - C_1 \omega_{0_1}^2 \left[b_0 + a b_1 \gamma_3 \frac{L^4}{\alpha_1^4} \operatorname{sign} F_1'' + a^2 \gamma_4 b_2 \frac{L^4}{\alpha_1^4} \right] = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Determinant této soustavy musí být roven nule, což vede na rovnici

$$\begin{aligned} \left[\Omega^2 - \frac{\omega_{0_1}^2}{1+\kappa} (1+\kappa \delta_1) + \omega_{0_1}^2 \frac{F_0}{F_{kr}} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \left[\left[\frac{\omega_{0_1}^2}{1+\kappa} (1+\kappa \delta_1) - \Omega^2 + \frac{F_0}{F_{kr}} \omega_{0_1}^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right] 2 = \\ = \omega_{0_1}^4 \left[b_0 + b_1 a \gamma_3 \frac{L^4}{\alpha_1^4} \operatorname{sign} F_1'' + b_2 a^2 \frac{L^4}{\alpha_1^4} \right]^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Položíme-li v dalším $F_1 = \alpha F_0$ (viz rovnici (6)) dostaneme

$$b_1 a \gamma_3 \frac{L^4}{\alpha_1^4} \text{sign } F_1'' + b_2 a^2 \gamma_4 \frac{L^4}{\alpha_1^4} = \sqrt{\left(\frac{\Omega^2}{\omega_{0_1}^2} - \frac{1 + \kappa \delta_1}{1 + \kappa} + \frac{F_0}{F_{kr}} - \frac{F_1}{2F_{kr}}\right) \left(\frac{1 + \kappa \delta_1}{1 + \kappa} - \frac{\Omega^2}{\omega_{0_1}^2} + \frac{F_0}{F_{kr}} + \frac{F_1}{2F_{kr}}\right)} - b_0 \quad (20)$$

Z tohoto vztahu lze za předpokladu, že $\gamma_4 = 0$ určit amplitudu kmitání ve tvaru

$$a = \frac{\alpha_1^4}{L^4} \frac{1}{b_1 \gamma_3 \text{sign } F_1''} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\Omega^2}{\omega_{0_1}^2} - \frac{1 + \kappa \delta_1}{1 + \kappa} + \frac{F_0}{F_{kr}} - \frac{F_1}{2F_{kr}}\right) \left(\frac{1 + \kappa \delta_1}{1 + \kappa} - \frac{\Omega^2}{\omega_{0_1}^2} + \frac{F_0}{F_{kr}} + \frac{F_1}{2F_{kr}}\right)} - b_0 \right\} \quad (21)$$

5) Diskuze

Existují dva mezní případy

- vliv rychlosti proudícího média lze zanedbat. Pak bude $\delta_1 = 0$ a položíme-li ještě $\kappa = 0$, změní se rovnice (21) na

$$a = \frac{\alpha_1^4}{L^4} \frac{1}{b_1 \gamma_3 \text{sign } F_1''} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\Omega^2}{\omega_{0_1}^2} - 1 + \frac{F_0}{F_{kr}} - \frac{F_1}{2F_{kr}}\right) \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_{0_1}^2} + \frac{F_0}{F_{kr}} + \frac{F_1}{2F_{kr}}\right)} - b_0 \right\} \quad (22a)$$

- je právě dosaženo kritické rychlosti. Pak bude $1 + \kappa \delta_1 = 0$ a rovnice (21) se změní na

$$a = \frac{\alpha_1^4}{L^4} \frac{1}{b_1 \gamma_3 \text{sign } F_1''} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\Omega^2}{\omega_{0_1}^2} + \frac{F_0}{F_{kr}} - \frac{F_1}{2F_{kr}}\right) \left(-\frac{\Omega^2}{\omega_{0_1}^2} + \frac{F_0}{F_{kr}} + \frac{F_1}{2F_{kr}}\right)} - b_0 \right\} \quad (22b)$$

podmínky vymezující oblast parametrické rezonance dané požadavkem, že a musí být nezáporné číslo, pak budou následující

- v případě rovnice (22a)

$$\sqrt{1 - \frac{F_0}{F_{kr}} + \frac{F_1}{2F_{kr}} + b_{0_1}} < \frac{\Omega}{\omega_{0_1}} < \sqrt{1 + \frac{F_0}{F_{kr}} + \frac{F_1}{2F_{kr}} + b_{0_2}} \quad (23a)$$

- v případě rovnice (22b)

$$\sqrt{-\frac{F_0}{F_{kr}} + \frac{F_1}{2F_{kr}} + b_{0_1}} < \frac{\Omega}{\omega_{0_1}} < \sqrt{\frac{F_0}{F_{kr}} + \frac{F_1}{2F_{kr}} + b_{0_2}} \quad (23b)$$

přičemž b_{0_1} a b_{0_2} jsou funkcí b_0 .

Je-li kritická rychlost překročena pak bude $(1 + \kappa \delta_1)/(1 + \kappa) = -\varepsilon < 0$ a rovnice (21) se tím změní na

$$a = \frac{\alpha_1^4}{L^4} \frac{1}{b_1 \gamma_3 \text{sign } F_1''} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\Omega^2}{\omega_{0_1}^2} + \varepsilon + \frac{F_0}{F_1} - \frac{F_1}{2F_{kr}}\right) \left(-\varepsilon - \frac{\Omega^2}{\omega_{0_1}^2} + \frac{F_0}{F_{kr}} - \frac{F_1}{2F_{kr}}\right)} - b_0 \right\} \quad (24)$$

a podmínka vymezující oblast parametrické rezonance bude mít tvar

$$\sqrt{-\varepsilon - \frac{F_0}{F_{kr}} - \frac{F_1}{2F_{kr}} + b_{0_1}} < \frac{\Omega}{\omega_{0_1}} < \sqrt{-\varepsilon + \frac{F_0}{F_{kr}} - \frac{F_1}{2F_{kr}} + b_{0_2}} \quad (25)$$

Závěr

Z rovnic (23a, b) a (24) plyne následující

- v podmínkách neexistence proudícího média vliv axiální periodické síly a tlumení závisícího na rychlosti deformace vymezuje zcela určitou oblast parametrické rezonance. Její šířka závisí na poměru síly statického předpětí a amplitudy periodické síly ke kritické vzpěrné síle a hodnotě statické složky tlumení,
- vliv pohyblivého zatížení tuto oblast zužuje. Po dosažení právě kritické rychlosti má podmínka existence parametrického kmitání tvar

$$\frac{F_1}{2 F_{kr}} + b_{0_1} > \frac{F_0}{F_{kr}}$$

čili mimo jiné závisí i na složce stacionárního tlumení b_{0_1}

- po překročení kritické rychlosti pohyblivého zatížení má podmínka existence parametrického kmitání tvar

$$\frac{F_1}{2 F_{kr}} + b_{0_1} > \frac{F_0}{F_{kr}} + \varepsilon$$

což při stejné hodnotě b_{0_1} jako v předchozím případě vyžaduje vyšší hodnotu F_1

- ve všech uvedených případech se tyto oblasti vyskytují kolem bodu $\Omega = \omega_{0_1} / 2$
- stanovení kritické rychlosti pohybujícího se média je shodné s předchozími pracemi [1, 2, 3].

Literatura

- [1] Pečínka L. & Krupa V. (2002), Dynamic Response of the Piping under Moving Load *Inženýrská mechanika 2002*
- [2] Pečínka L. & kol. (2003), Vibration of straight piping under moving load with supercritical velocity, *Inženýrská mechanika 2003*, str. 242
- [3] Pečínka L. (2004), Dynamic Response of the Lagrange and Timoshenko Beam on the Moving Load, *Inženýrská mechanika 2004*, str. 220
- [4] Pečínka L. & Krásný I. (2004), Vliv protékajícího média na příčné kmitání nosníku zatíženého periodickou podélnou silou, *Výpočtová mechanika 2004*, str. 391÷396
- [5] Filipov A.P. (1965), Kolebanija mechanických systém, *Naukova dumka*, Kiev
- [6] Strutt J.V. (1955), Teorija zvuka, tom 1, *Gosudarstvennoje izdatel'stvo tekhniko-teoretičeskoj literatury*, Moskva 1955, str. 282
- [7] Bažant Z. & kol. (1944), Nauka o pružnosti a pevnosti, *Česká matice technická*, svazek třetí, Praha, str. 262
- [8] Brepta R. & kol. (1994), Mechanické kmitání, *Technický průvodce 71*, Sobotáles, Praha, str. 373
- [9] Prudnikov A.P. & kol. (1981), Intěgraly i rjady, „Nauka“, hlavní redakce fyzikálně-matematické literatury, Moskva