INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005

NÁRODNÍ KONFERENCE

s mezinárodní účastí

Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

SOME PICKED CONNECTIONS BETWEEN STRESS AND DEFORMATIONS INVARIANTS IN THE THREE DIMENSIONAL SPACE

R. Novotný

Summary: *The article deals with the presentation aspects of the stress and deformations invariants in the three dimensional space. It deduces the stress invariants and their characteristic founded on the tensor algebra, and indicates also other possibilities of the stress invariants generetion. The article also defines the deformation invariants and relates them to the stress invariants in the condition of the isotopy of the rigid material.*

1. Úvod

Všeobecně vzato, při určování napjatostních poměrů v komplikovaněji členěných a zatížených konstrukčních prvcích nedává „pouhá“ znalost stanoveného lokálního tenzoru napjatosti jako takového ještě dokonalý názor na místní velikosti a směry extrémních normálových a tangenciálních napětí. Tím méně průzračná bývá představa o typu plochy (kvadriky), která tuto napjatost vystihuje a zobrazuje, jak o tom svědčí i poměrně časté omyly a nedorozumění, které se občas vyskytují dokonce i v některé základní literatuře. Je proto užitečné lokální napjatost vzhledem k danému tenzoru napětí nejen analyzovat, nýbrž i klasifikovat. Analogické zákonitosti lze ovšem sledovat, i pokud jde o místní tenzor deformace v napjatém bodu prvku. Přitom není možné se nesetkat s příslušnými invarianty uvažovaných tenzorů, jejich vlastnostmi a vztahy mezi nimi. Tento příspěvek souvztažnost těchto koincidentních invariantů za předpokladů ideální a lineární pružnosti studuje a poukazuje na možnost tvorby i dalších nezávislých invariantů.

2. Kvadriky napjatosti a jejich invarianty

Je-li dán v napjatém bodě B obecný symetrický tenzor napětí τ_{ij}, který je vztažen ke kartézské soustavě souřadnic $\{O \equiv B; x_1; x_2; x_3\}$, existuje i takové natočení tohoto systému do

Doc. Ing. Radimír Novotný, DrSc., Česká zemědělská univerzita v Praze, Fakulta lesnická a environmentální, katedra staveb, Kamýcká 1176, 165 21 Praha 6 – Suchdol, novotny@fle.czu.cz, tel: 224 382 658

té pozice $\{O \equiv B \equiv O^*; x_1^*; x_2^*; x_3^*\}$, že vzhledem k ní nabude daný tenzor diagonální podoby τ_{ij}^*, přičemž příslušné kvadratické formy $\tau_{kl} x_k x_l = \tau_{kl}^* x_k^* x_l^* = 1 = \text{invariant}$ vyjadřují centrálně symetrické kvadriky (elipsoidy nebo hyperboloidy napětí), což vyplývá z analyticko klasifikačních vztahů pro ně, viz o tom níže. Ukazuje se, že (postupně) první, druhý a třetí invariant jsou dány třemi vztahy

$$I_1 = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \tau_{11}^* + \tau_{22}^* + \tau_{33}^* \quad , \tag{1}$$

$$I_2 = \det\begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{Vmatrix} + \det\begin{Vmatrix} \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{Vmatrix} + \det\begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{13} \\ \tau_{31} & \tau_{33} \end{Vmatrix} = \tau_{11}^* \cdot \tau_{22}^* + \tau_{22}^* \cdot \tau_{33}^* + \tau_{33}^* \cdot \tau_{11}^* \quad \text{a} \tag{2}$$

$$I_3 = \det\begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{Vmatrix} = \tau_{11}^* \cdot \tau_{22}^* \cdot \tau_{33}^* \quad . \tag{3}$$

Uvážíme-li, že $\tau_{kl}^* x_k^* x_l^* = 1$ lze rozepsat jako $\tau_{11}^* \cdot x_1^{*2} + \tau_{22}^* \cdot x_2^{*2} + \tau_{33}^{*2} = 1$, ale i v normovém tvaru jako $\frac{x_1^{*2}}{a^{*2}} + \frac{x_2^{*2}}{b^{*2}} + \frac{x_3^{*2}}{c^{*2}} = 1$, je vidět, že platí $a^* = \frac{1}{\sqrt{\tau_{11}^*}}$, $b^* = \frac{1}{\sqrt{\tau_{22}^*}}$ a $c = \frac{1}{\sqrt{\tau_{33}^*}}$, kde poslední čísla jsou délky hlavních poloos elipsoidu napjatosti. Označme velikost sdružených poloos a , b , c (to je ve směru os x_1, x_2, x_3) téhož elipsoidu napjatosti daného $\tau_{kl} x_k x_l = 1$, a volme postupně $x_1 = a, x_2 = x_3 = 0$, dále $x_2 = b, x_1 = x_3 = 0$ a konečně $x_3 = c, x_1 = x_2 = 0$. Tak vyjde $\tau_{11} \cdot a^2 = 1$, nebo-li $a = \frac{1}{\sqrt{\tau_{11}}}$ a stejným postupem i $b = \frac{1}{\sqrt{\tau_{22}}}$ a $c = \frac{1}{\sqrt{\tau_{33}}}$.
Porovnáním hlavních i sdružených poloos se vztahem (1) máme

$$I_1 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^{*2}} + \frac{1}{b^{*2}} + \frac{1}{c^{*2}} \quad , \tag{4}$$

což znamená, že **součet reciprokých hodnot čtverců tří navzájem kolmých sdružených poloos elipsoidu napjatosti je invariantní vzhledem k pootočení kartézského souřadného systému a je roven prvému invariantu tenzoru napjatosti.**

Řízněme nyní plochu $\tau_{kl} x_k x_l = 1$ rovinou $x_3 = 0$. Dostaneme rovnici elipsy $\tau_{11} \cdot x_1^2 + 2 \cdot \tau_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \tau_{22} \cdot x_2^2 = 1$, jejíž poloosy nechť jsou a^+ a b^+ , v jejichž směrech nechť vyvstanou napětí τ_{11}^+ a τ_{22}^+ . Jejich velikost plyne z charakteristické rovnice $\det\begin{Vmatrix} \tau_{11} - \tau_{11}^+ & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \tau_{22}^+ \end{Vmatrix} = 0$. Normovou rovnici elipsy řezu vzhledem k bázi $\{B \equiv O; \vec{e}_1^{\,+}; \vec{e}_2^{\,+}\}$ určuje nyní také kvadratická forma tvaru $\tau_{11}^+ \cdot x_1^{+2} + \tau_{22}^+ \cdot x_2^{+2} = 1$, kde $a^+ = \frac{1}{\sqrt{\tau_{11}^+}}$ a $b^+ = \frac{1}{\sqrt{\tau_{22}^+}}$ a obsah plochy tohoto eliptického řezu je dán $A_3^+ = \pi \cdot a^+ \cdot b^+$. Odsud

$\tau_{11}^{+} \cdot \tau_{22}^{+} = \dfrac{\pi^2}{A_3^{+2}}$. Podobně z řezových rovin $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$ vyplyne $\tau_{22}^{+} \cdot \tau_{33}^{+} = \dfrac{\pi^2}{A_1^{+2}}$ a $\tau_{33}^{+} \cdot \tau_{11}^{+} = \dfrac{\pi^2}{A_2^{+2}}$. Vzhledem k tomu, že platí (2), jsme vlastně odvodili

$$\pi^2 \cdot \left(\frac{1}{A_1^{+2}} + \frac{1}{A_2^{+2}} + \frac{1}{A_3^{+2}} \right) = I_2 \quad .$$

(5)

Proto, **součet reciprokých hodnot čtverců obsahů průřezových elips třemi navzájem kolmými rovinami jdoucích středem jimi sečeného elipsoidu napjatosti je invariantní vzhledem k jejich natočení a je roven druhému invariantu tenzoru napjatosti lomeném kvadrátem Ludolfova čísla.**

Konečně, tenzor napjatosti τ_{kl} vztáhněme k ortogonální bázi $\left\{B \equiv O; \vec{e}_1^{\,*}; \vec{e}_2^{\,*}; \vec{e}_3^{\,*}\right\}$ a vyjádřeme třetí invariant tenzoru napjatosti podle (3)

$$I_3 = \det \begin{Vmatrix} \tau_{11}^{*} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22}^{*} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33}^{*} \end{Vmatrix} = \det \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{a^{*2}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{b^{*2}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{c^{*2}} \end{Vmatrix} = \frac{1}{a^{*2} \cdot b^{*2} \cdot c^{*2}} = \tau_{11}^{*} \cdot \tau_{22}^{*} \cdot \tau_{33}^{*} \quad .$$

Vyjádříme-li dále objem elipsoidu známým vztahem $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot a^{*} \cdot b^{*} \cdot c^{*}$, vychází

$$I_3 = \frac{16}{9} \cdot \frac{\pi^2}{V^2} \quad . \qquad (6)$$

Proto**, třetí invariant tenzoru napjatosti je dán násobkem reciprokého čtverce objemu elipsoidu napjatosti, přičemž objem elipsoidu je sám o sobě invariantem.**

Kromě lineárního, kvadratického a kubického invariantu napjatosti (jde o alternativní pojmenování invariantů (1), (2) a (3)) lze odvodit i další jiné invarianty napjatosti, jako kupř. invariant výsledných napětí I_v . Představme si v napjatém bodě B trs tří navzájem ortogonálních rovin, jejichž průsečnice definuje $\left\{O \equiv B; x_1; x_2; x_3\right\}$. V každé z těchto rovin lze naleznout dvě tangenciální napětí a jedno normálové napětí, takže trojice rovin udává 9 složek symetrického tenzoru napětí druhého řádu. Uvažujme v každé z rovin pythagorejský vztah $\tau_{iv}^2 = \tau_{i1}^2 + \tau_{i2}^2 + \tau_{i3}^2$, což je čtverec dílčího výsledného napětí v $i - tém$ směru, $i = 1,2,3$, vzniknuvší z odpovídajících komponent tenzoru napětí. Potom je

$$I_v = \tau_{1v}^2 + \tau_{2v}^2 + \tau_{3v}^2 = \tau_{11}^2 + \tau_{22}^2 + \tau_{33}^2 + 2 \cdot \tau_{12}^2 + 2 \cdot \tau_{23}^2 + 2 \cdot \tau_{31}^2 = \tau_{11}^{*2} + \tau_{22}^{*2} + \tau_{33}^{*2} \quad .$$

Přitom pro výsledné napětí platí $\vec{\tau}_v = \vec{\tau}_{1v} + \vec{\tau}_{2v} + \vec{\tau}_{3v}$. (Diagonální složky τ_{ii}^{*} tenzoru napětí τ_{kl}^{*} odpovídají „natočení“ $\left\{O \equiv B \equiv O^{*}; x_1^{*}; x_2^{*}; x_3^{*}\right\}$ a přes index i se nesčítá). Jsou-li tedy směry τ_{ii}^{*} ke všem třem navzájem kolmým rovinám ortogonální, neplatí obecně totéž o směrech dílčích výsledných napětí τ_{iv}. Kdyby byl totiž např. vektor $\vec{\tau}_{3v}$ skutečně kolmý k rovině obou zbývajících vektorů dílčích napětí, musely by nutně být všechny jeho souřadnice úměrné souřadnicím vektoru $\vec{\tau}_{1v} \times \vec{\tau}_{2v}$. Avšak pro poměr $i-tých$ souřadnic uvedených vektorů postupně vychází

$$\frac{\tau_{12}\cdot\tau_{23}}{\tau_{31}}-\tau_{22} \quad , \quad \frac{\tau_{31}\cdot\tau_{12}}{\tau_{23}}-\tau_{11} \quad , \quad \frac{\tau_{11}\cdot\tau_{22}-\tau_{12}^{2}}{\tau_{33}} \quad ,$$

což jsou evidentně obecně různá reálná čísla. A protože obdobné výsledky platí i pro zbývající další dva směry, potvrzuje se tím neortogonalita vektorů $\vec{\tau}_{iv}$. Pro invariant výsledných napětí platí

$$I_v = I_1^2 - 2\cdot I_2 \quad . \tag{7}$$

Ukázalo se tedy, že **součet kvadrátů dílčích výsledných napětí ke třem navzájem ortogonálním rovinám je invariantní.**

Invarianty I_1, I_2 a I_3 jsou jakýmisi bázovými invarianty, na jejichž základě lze vytvořit i všechny další invarianty napjatosti, viz např. vzorec (7). Lze-li tedy nejvýše ze třech nezávislých invariantů napjatosti odvodit každý další závislý invariant (aniž by kromě nich obsahoval byť i jedno hlavní napětí τ_{ii}^{*}, které by nebylo možno do některého nezávislého invariantu zahrnout), nelze takto vyjádřit žádný z invariantů I_1, I_2 a I_3 pomocí dvou zbývajících. Tak např. ze vztahů (1), (2) a (3) vyplývá, že

$$I_3 = \tau_{33}^{*3} - I_1\cdot\tau_{33}^{*2} + I_2\cdot\tau_{33} \quad .$$

Podobně lze např. odvodit vztah

$$I_3 = \frac{1}{3}\cdot\left(\tau_{11}^{*3}+\tau_{22}^{*3}+\tau_{33}^{*3}\right)+I_1\cdot I_2-\frac{1}{3}\cdot I_1^3 \quad ,$$

kde je invariant I_3 kromě na invariantech I_1 a I_2 závislý dokonce na třech hlavních napětích, apod.

3. Klasifikace kvadrik napjatosti

Uvažujme o výše definované kvadrice napjatosti. Její rozepsání dává

$$\tau_{ij}x_ix_j = \tau_{11}\cdot x_1^2+\tau_{22}\cdot x_2^2+\tau_{33}\cdot x_3^2+2\cdot\tau_{12}\cdot x_1\cdot x_2+2\cdot\tau_{23}\cdot x_2\cdot x_3+2\cdot\tau_{31}\cdot x_3\cdot x_1 = 1$$

resp.

$$\tau_{11}^{*}\cdot x_1^{*2}+\tau_{22}^{*}\cdot x_2^{*2}+\tau_{33}^{*}\cdot x_3^{*2} = 1 \quad .$$

Připojme ke třem navzájem nezávislým invariantům (1), (2) a (3) ještě tzv. „velký“ determinant či-li diskriminant kvadratické plochy I_4 (jehož subdeterminantem je právě I_3). Jeho podoba bude vzhledem k předpokladům o tvaru kvadriky napjatosti velice jednoduchá:

$$I_4 = \det \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} & 0 \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} = -\tau_{11}^{*} \cdot \tau_{22}^{*} \cdot \tau_{33}^{*} \quad .$$

Podle prostorové analytické geometrie, budeme-li předpokládat regulární případ, že všechny komponenty symetrického tenzoru napjatosti τ_{kl} budou vesměs nenulovými veličinami, pak pro obecně $I_3 \neq 0$ je zřejmě $I_4 = -I_3$ a k tomu dále platí

1) pro $I_4 \pi 0, I_2 \phi 0$ a $I_1 \cdot I_3 \phi 0$, je uvažovaná kvadrika reálným elipsoidem napjatosti.
2) Pro $I_4 \phi 0$ a alespoň jedno z reálných čísel $I_2, I_1 \cdot I_3$ je záporné, je kvadrika napjatosti je jednodílným hyperboloidem.
3) Pro $I_4 \pi 0$, přičemž alespoň jedno z reálných čísel $I_2, I_1 \cdot I_3$ je záporné, jde o dvojdílný hyperboloid napjatosti.
4) Poněvadž nemůže být současně splněno $I_4 = 0$ a zároveň $I_3 \neq 0$, nemůže uvažovaná kvadrika představovat reálný kužel napjatosti.
5) Poněvadž nelze současně splnit $I_3 = 0$ a zároveň $I_4 \neq 0$, potvrzuje se tímto, že kvadrika napjatosti nemůže být ani eliptickým, ani hyperbolickým paraboloidem.

4. Invarianty tenzoru deformace

Budeme předpokládat tzv. tenzor „malých“ deformací ε_{ij} , který je zákonitě druhého řádu a symetrický. Ten obsahuje v hlavní diagonále poměrná prodloužení a ostatních šest mimodiagonálních komponent, kterými jsou úhlové zkosy (to je poloviční rozdíly mezi původně pravými úhly ale po přetvoření obecnými úhly, které spolu svírají přilehlé stěny elementárního hranolu). Analýza a zobrazení kvadrik deformace v napjatém bodě jsou obdobné, jako tomu bylo u tenzoru napjatosti, proto uvádíme jen invarianty tenzoru deformace v pořadí prvý (lineární), druhý (kvadratický) a třetí (kubický):

$$J_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{11}^{*} + \varepsilon_{22}^{*} + \varepsilon_{33}^{*} \quad , \tag{8}$$

$$J_2 = \det \begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{Vmatrix} + \det \begin{Vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Vmatrix} + \det \begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{Vmatrix} = \varepsilon_{11}^{*} \cdot \varepsilon_{22}^{*} + \varepsilon_{22}^{*} \cdot \varepsilon_{33}^{*} + \varepsilon_{33}^{*} \cdot \varepsilon_{11}^{*} \quad , \tag{9}$$

a

$$J_3 = \det \begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Vmatrix} = \varepsilon_{11}^{*} \cdot \varepsilon_{22}^{*} \cdot \varepsilon_{33}^{*} \quad . \tag{10}$$

(Samozřejmě jsme předpokládali, že se tenzor ε_{ij} vztahuje k $\{O \equiv B; x_1; x_2; x_3\}$, zatímco diagonální tenzor ε_{ij}^* se vztahuje k $\{O \equiv B \equiv O^*; x_1^*; x_2^*; x_3^*\}$).

Uveďme příklad alespoň jediného „odvozeného“ (resp. závislého) invariantu deformace. Definujme $\varepsilon_V = \dfrac{\Delta V - \Delta V_o}{\Delta V_o}$ jako poměrnou změnu elementárního objemu napjaté elastické fáze pevného skupenství, kde $\Delta V_o = \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3$, zatímco pro změněný elementární objem platí $\Delta V = (1+\varepsilon_{11}^*) \cdot (1+\varepsilon_{22}^*) \cdot (1+\varepsilon_{33}^*) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3$. Podle (8), (9) a (10) se ukazuje, že $\varepsilon_V = J_1 + J_2 + J_3$. Uplatněním součtu na tři rovnice rozšířeného Hookeova zákona $\varepsilon_{ii} = \dfrac{1}{E} \cdot [\tau_{ii} - \mu \cdot (\tau_{jj} + \tau_{kk})]$ (přes zdvojené indexy se v tomto případě nesčítá, přičemž $i \neq j \neq k; i, j, k = 1,2,3$) vzhledem k (8) a (1), vyjde $J_1 = \dfrac{1}{E} \cdot (1 - 2 \cdot \mu) \cdot I_1$. Poslední (důležitý) vzorec ukazuje, že podmínka nestlačitelnosti lineárně pružného napjatého prostředí pevné fáze je $\varepsilon_V \approx J_1 = 0$, což je vzhledem k obecné platnosti $I_1 \neq 0$ možné jen pro $\mu = \dfrac{1}{2}$, (pro Poissonovo číslo teoreticky platí $\mu \in \langle 0; 0{,}5 \rangle$).

5. Závislosti mezi invarianty deformace a napjatosti v pružných izotropních prostředích

Z teoretického hlediska je užitečné uvést do vzájemných souvislostí invarianty napětí s invarianty deformace, to je odvodit vztahy $I_j = I_j(J_k)$ resp. $J_k = J_k(I_j)$, $j, k = 1,2,3$. To lze všeobecně provést jen za konkrétně definované míry anizotropie elastického napjatého kontinua, přičemž z matematického hlediska obvykle nejde o snadnou záležitost, jak se lze přesvědčit „již jen“ pro „nulovou“ míru anizotropie, či-li pro izotropní prostředí (se dvěma nezávislými elastickými koeficienty E a μ). Uveďme pro ní nejprve oba inverzní fyzikální vztahy

$$\tau_{ij} = \frac{E \cdot \mu}{(1+\mu) \cdot (1 - 2 \cdot \mu)} \cdot \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk} + \frac{E}{(1+\mu)} \cdot \varepsilon_{ij} \tag{11}$$

resp.

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\mu}{E} \cdot \delta_{ij} \cdot \tau_{kk} + \frac{(1+\mu)}{E} \cdot \tau_{ij} \quad , \tag{12}$$

v nichž se přes index k pochopitelně sčítá, poněvadž oba poslední vztahy mají jasný tenzorový charakter. Výše avizované závislosti pak jsou

$$J_1 = \frac{(1 - 2 \cdot \mu)}{E} \cdot I_1 \quad , \tag{13}$$

$$J_2 = \frac{(1+\mu)^2}{E^2} \cdot \left[I_2 - \frac{\mu \cdot (2 - \mu)}{(1+\mu)^2} \cdot I_1^2 \right] \quad , \tag{14}$$

$$J_3 = \frac{(1+\mu)^3}{E^3} \cdot \left[\frac{\mu^2}{(1+\mu)^3} \cdot I_1^3 - \frac{\mu}{(1+\mu)} \cdot I_1 \cdot I_2 + I_3 \right] \tag{15}$$

a

$$I_1 = \frac{E}{(1-2\cdot\mu)} \cdot J_1 \quad , \tag{16}$$

$$I_2 = \frac{E^2}{(1+\mu)^2} \cdot \left[\frac{\mu \cdot (2-\mu)}{(1-2\cdot\mu)^2} \cdot J_1^2 + J_2 \right] \quad , \tag{17}$$

$$I_3 = \frac{E^3}{(1+\mu)^3} \cdot \left[\frac{\mu^2 \cdot (1-\mu)}{(1-2\cdot\mu)^3} \cdot J_1^3 + \frac{\mu}{(1-2\cdot\mu)} \cdot J_1 \cdot J_2 + J_3 \right] \quad . \tag{18}$$

6. Závěr

Příspěvek pojednal o zobrazování napjatosti za trojrozměrných okolností, definoval invarianty tenzorů napjatosti i deformace včetně jejich geometrického významu. Byly rovněž ukázány některé méně známé a obecné vlastnosti těchto invariantů, vysvětlen způsob jejich odvozování a uvedeny vztahy mezi nimi za izotropních poměrů v kontinuu pevné fáze. Pokud jde o detailnější odvození prezentovaných výsledků, odkazujeme čtenáře na přehled použitelné literatury.

LITERATURA :

[1] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B. : Mechanika kontinua, Praha, Academia, 2000

[2] Novotný, R. : Kruhové válcové skořepinové konstrukce za některých speciálních okolností. Doktorská disertační práce, Praha, Stavební fakulta ČVUT, 2001

[3] Nečas, J., Hlaváček, I. : Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles, Praha, SNTL, 1983

[4] Klapka, J. : Analytická geometrie, Praha, SNTL, 1960

[5] Schulz-Piszachich, W. : Tensoralgebra und analysis, Leipzig, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1985

[6] Novotný, R. : Několik poznámek k rovinnému stavu napjatosti a jeho zobrazení, Stavební obzor, 7 , 1998 , č.1 , s. 7 – 11 .

Tento příspěvek je produktem grantového projektu ***GAČR č. 103/03/0655*** .