INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005

NÁRODNÍ KONFERENCE

s mezinárodní účastí

Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

SOME PROPERTIES AND APPLICATIONS OF EIGEN FUNCTIONS OF THE FOKKER - PLANCK OPERATOR

J. Náprstek*

Summary: *Fokker-Planck equation is a parabolic partial differential equation describing the response probability density function of the dynamic system being excited by additive and/or multiplicative random processes of Gaussian and other types. When a non-stationary solution is necessary to be looked for, the method of separation of time and space coordinates can be used. This procedure leads to problem of eigen-values and eigen-functions of the Fokker-Planck operator. The non-symmetry and a number of other properties of this operator should be respected and carefully analysed, before the eigen-function series as solution basis can be constructed and applied. The most important problems concerning the eigen-values and functions of the FP operator for one and multidimensional FP equation are discussed. Problems of the asymptotic convergence related with stationary solution existence and on the other hand prospective system metastability are analysed. Several illustrative examples of detailed analysis are presented.*

1. Úvod

Fokker - Planckova (FP) rovnice je parabolická parciální diferenciální rovnice pro výpočet vzájemné hustoty pravděpodobnosti odezvy soustavy při aditivním a parametrickém náhodném buzení procesem gaussovského, popř. jiného typu (sčítání přes indexy):

$$\frac{\partial h(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\frac{\partial(\kappa_i(\mathbf{x},t)h(\mathbf{x},t))}{\partial x_i} + \frac{\partial^2(\kappa_{ij}(\mathbf{x},t)h(\mathbf{x},t))}{\partial x_i \partial x_j} = \mathbf{L}\{\mathbf{x},t\}h(\mathbf{x},t) \tag{1}$$

$\kappa_i(\mathbf{x},t)$	-	koeficienty driftu;
$\kappa_{ij}(\mathbf{x},t)$	-	koeficieny difuze $(i,j=1,..,n)$;
$\mathbf{L}\{\mathbf{x},t\}h(\mathbf{x},t)$	-	FP operátor aplikovaný na funkci $h(\mathbf{x},t)$;
$\mathbf{x}=[x_1,..,x_n]$	-	vektor prostorových proměnných, které reprezentují složky odezvy soustavy;
$h(\mathbf{x},t)$	-	hustota pravděpodobnosti odezvy soustavy.

Rozbor vlastností a různé aplikace rovnice (1) jsou předmětem velkého množství literatury, jako např. (Ben-Haim, 2001; Bolotin, 1979; Itô, McKean, 1965; Pugačev, Sinicyn, 1987; atd). Pokud jsou koeficienty driftu a difuze nezávislé na čase, je z hlediska aplikací obvykle snaha zaměřit se na stacionární řešení, neboť dává nejdůležitější informace o dlouhodobém chování systému. Je-li odezva systému stacionární, hustota pravděpodobnosti odezvy není závislá na čase, a proto se anuluje levá strana rovnice (1). Úloha se potom omezuje na rovnici:

$$\mathbf{L}\{\mathbf{x}\}h(\mathbf{x}) = 0 \tag{2}$$

*Ing. Jiří Náprstek, DrSc., Ústav teoretické a aplikované mechaniky AV ČR; Prosecká 76, 190 00 Praha 9
naprstek@itam.cas.cz

V řadě případů je nezbytné hledat nestacionární řešení rovnice (1), i když jsou koeficienty driftu a difuze nezávislé na čase. Důvodem může být fyzikální podstata problému, nutnost posoudit přechodový jev anebo skutečnost, že stacionární řešení neexistuje, např. Soize (2001). Úloha se v takovém případě značně komplikuje. Nicméně FP rovnice je lineární (pokud se nejedná o různé zobecněné verze), a proto se dá uvažovat o analogiích různých metod, které jsou známy z klasické deterministické analýzy, např. Andersen (1965), Morse, Feshbach (1953) a další. Je však nezbytné respektovat specifické vlastnosti operátoru (2), které mohou použitelnost těchto metod v konkrétních případech ovlivňovat či znemožňovat.

2. Nestacionární řešení skalární FP rovnice rozkladem podle vlastních funkcí

Jsou-li koeficienty driftu a difuze nezávislé na čase, má smysl psát řešení rovnice (1) ve tvaru součinu:

$$h(\mathbf{x},t) = h(\mathbf{x}) \cdot \varphi(t) \tag{3}$$

Dosadíme-li výraz (3) do rovnice (1), dostaneme:

$$h(\mathbf{x}) \cdot \dot{\varphi}(t) = \varphi(t) \cdot \mathbf{L}\{\mathbf{x}\}h(\mathbf{x})$$

odkud skoro pro všechny body $(\mathbf{x}, t)$ plyne:

$$\dot{\varphi}(t)/\varphi(t) = \mathbf{L}\{\mathbf{x}\}h(\mathbf{x})/h(\mathbf{x}) \tag{4}$$

Vztah (4) je možné splnit pouze tehdy, jsou-li obě strany rovny téže konstantě $(-\lambda)$. Za tohoto předpokladu lze levé straně (4) vyhovět tehdy, je-li $\varphi(t) = \exp(-\lambda t)$. To znamená:

$$\mathbf{L}\{\mathbf{x}\}h(\mathbf{x}) + \lambda h(\mathbf{x}) = 0 \tag{5}$$

Rovnice (5) znamená spolu s příslušnými okrajovými podmínkami problém vlastních čísel a funkcí $\lambda_{(i)}, h_{(i)}(\mathbf{x})$ FP operátoru. Vzhledem k levé straně (4) můžeme řešení (3) chápat ve tvaru řady:

$$h(\mathbf{x},t) = h_{(i)}(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_{(i)}t} \tag{6}$$

Upozorníme na některé důležité vlastnosti vlastních čísel a funkcí $\lambda_{(i)}, h_{(i)}(\mathbf{x})$ nejprve pro skalární operátor $\mathbf{L}\{\mathbf{x}\} = \mathbf{L}\{x\}$. Ve 4. kapitole se pokusíme o zobecnění na případ $n-$rozměrného vektoru $\mathbf{x}$, jak odpovídá praktické potřebě. Těmito vlastnostmi se v jiných souvislostech zabývala řada autorů, např. Weinstein, Benaroya (1994) nebo monografie autorů Grasman, van Herwaarden (1999).

Operátor FP není a priori symetrický v obvyklém smyslu, viz např. Michlin (1970), což z hlediska přibližných metod řešení může působit problémy. Zavedeme potenciál, jehož základní strukturu lze odhadnout na základě řešení obyčejné rovnice prvního řádu: $(\kappa_2(x) = \kappa_{11}(x))$

$$\Phi(x) = \lg \kappa_2(x) - \int_{x_0}^{x} \kappa_1(\xi)/\kappa_2(\xi)\mathrm{d}\xi\ ; \quad \text{resp.} \qquad \mathrm{e}^{\Phi(x)} = \kappa_2(\xi) \cdot \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} \kappa_1(\xi)/\kappa_2(\xi)\mathrm{d}\xi} \tag{7}$$

Operátor $\mathbf{L}\{x\}(n = 1)$ rozšíříme a přepíšeme ve tvaru:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}\{x\}h(x) &= -\frac{\partial}{\partial x}\kappa_1(x)h(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\kappa_2(x)h(x) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} \kappa_1(\xi)/\kappa_2(\xi)\mathrm{d}\xi} \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} \kappa_1(\xi)/\kappa_2(\xi)\mathrm{d}\xi} \cdot \left(-\frac{\kappa_1(x)}{\kappa_2(x)}\kappa_2 h(x) + \frac{\partial}{\partial x}\kappa_2(x)h(x)\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\kappa_2(x)\mathrm{e}^{-\Phi(x)}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{\Phi(x)}h(x)
\end{aligned} \tag{8}$$

Na základě (8) ukážeme, že operátor

$$\mathbf{L}^{\varphi}\{x\} = \exp(\Phi(x)) \cdot \mathbf{L}\{x\} \tag{9}$$

je symetrický. Z definičního oboru operátoru vybereme dvě různé funkce $h_1(x), h_2(x)$. Za použití per partes integrace s přihlédnutím k homogenním okrajovým podmínkám ve všech souřadnicích píšeme:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_1} h_1(x)\exp(\Phi(x)) \cdot \mathbf{L}\{x\} h_2(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} h_1(x)\mathrm{e}^{\Phi(x)}\tfrac{\partial}{\partial x}\kappa_2(x)\mathrm{e}^{-\Phi(x)}\tfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{\Phi(x)}h_2(x)\mathrm{d}x = \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \left(\tfrac{\partial}{\partial x}h_1(x)\mathrm{e}^{\Phi(x)}\right)\kappa_2(x)\mathrm{e}^{-\Phi(x)}\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{\Phi(x)}h_2(x)\right)\mathrm{d}x = \\
&= \int_{x_0}^{x_1} h_2(x)\mathrm{e}^{\Phi(x)}\tfrac{\partial}{\partial x}\kappa_2(x)\mathrm{e}^{-\Phi(x)}\tfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{\Phi(x)}h_1(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} h_2(x)\exp(\Phi(x)) \cdot \mathbf{L}\{x\} h_1(x)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{10}$$

z čehož vyplývá symetrie operátoru (9) a následně také operátoru:

$$\mathbf{L}^{\psi}\{x\} = \exp(\Phi(x)/2) \cdot \mathbf{L}\{x\} \exp(-\Phi(x)/2) \tag{11}$$

Doplňme ještě, že vlastním funkcím $h_{(i)}(x)$ operátoru $\mathbf{L}$ odpovídají vlastní funkce operátoru $\mathbf{L}^{\varphi}$ podle vztahu, který vyplývá z předchozí rovnice:

$$h^{\varphi}_{(i)}(x) = \exp(\Phi(x)/2) \cdot h_{(i)}(x) \tag{12}$$

přičemž vlastní čísla $\lambda_{(i)}$ jsou stejná pro oba operátory.

Protože operátor $\mathbf{L}^{\varphi}$ je symetrický, vlastní čísla jsou reálná a dvě vlastní funkce $h^{\varphi}_{(i)}(x), h^{\varphi}_{(j)}(x)$ příslušející k různým vlastním číslům $\lambda_{(i)} \neq \lambda_{(j)}$ musí být ortogonální. Jsou-li normalizovány, platí:

$$\int_{x_0}^{x_1} h^{\varphi}_{(i)}(x) \cdot h^{\varphi}_{(j)}(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \exp(\Phi(x)) \cdot h_{(i)}(x) \cdot h_{(j)}(x)\mathrm{d}x = \delta_{ij} \tag{13}$$

Dosadíme-li do (10) $h_1(x) = h_2(x) = h_{(i)}(x)$, dostaneme:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} h_{(i)}(x) \cdot \mathrm{e}^{\Phi(x)} \cdot \mathbf{L}\{x\} h_{(i)}(x)\mathrm{d}x &= \int_{x_0}^{x_1} h^{\varphi}_{(i)}(x) \cdot \mathbf{L}\{x\} h^{\varphi}_{(i)}(x)\mathrm{d}x = -\lambda_{(i)} = \\
&= -\int_{x_0}^{x_1} (\tfrac{\partial}{\partial x}h_{(i)}(x)\mathrm{e}^{\Phi(x)/2})^2\kappa_2\mathrm{e}^{-\Phi(x)}\mathrm{d}x \leq 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Znaménko rovnosti v (14) platí pouze pro stacionární řešení (pokud existuje) FP rovnice, jak vyplývá intuitivně již z rovnice (5):

$$h^{\varphi}_{(0)} = \sqrt{N}e^{-\Phi(x)/2}\ ; \quad \lambda_{(0)} = 0\ ; \quad N\text{- konstanta normalizace} \tag{15}$$

Řešení (15) odpovídá Boltzmannovu řešení FP rovnice pro skalární případ se stavovou nelinearitou, která splňuje podmínky existence integrálu v (7). Všechna další vlastní čísla $\lambda_{(i)}(i > 0)$ musí v souladu s (14) být větší než nula. Z povahy těchto výrazů ovšem vyplývá, že potenciál $\Phi(x)$ musí být pozitivní a růst s rostoucím $|x|$ alespoň asymptoticky.

S ohledem na (6) bude celé řešení konvergovat k řešení stacionárnímu. Všechny další členy postupně zaniknou s rostoucím časem vlivem exponenciálního faktoru, neboť vlastní čísla pro $i > 0$ jsou reálná a kladná. Není-li splněna podmínka pro potenciál $\Phi(x)$, nebude existovat stacionární řešení, a tedy ani nulové vlastní číslo (15). Další vlastní čísla pak budou záporná a řešení bude nestabilní, exponenciálně rostoucí pro rostoucí čas. Speciální vlastnosti však mohou mít případy, kdy soustava obsahuje lokální oblasti nestability, které mohou vést k nestabilitám v konečném časovém intervalu.

3. Příklady skalární FP rovnice

Demonstrujme výklad z minulé kapitoly na skalární FP rovnici, která odpovídá obyčejné stochastické rovnici prvního řádu:

$$\dot{x} = -f'(x) + a\Gamma(t) \tag{16}$$

$\Gamma(t), a, \varepsilon$	-	centrovaný gaussovský bílý šum, resp. jeho měřítko a intenzita;
$f'(x), f(x)$	-	vazbová síla, resp. její potenciál.

Pro koeficienty κ_1, κ_2 platí:

$$\kappa_1(x) = -f'(x) \ ; \quad \kappa_2 = \frac{1}{2}a^2\varepsilon \tag{17}$$

to jest podle (5):

$$(f'(x)h_{(i)}(x))' + \frac{1}{2}a^2\varepsilon h''_{(i)}(x) = -\lambda_{(i)}h_{(i)} \tag{18}$$

Zaveďme nyní do (18) kvadratický potenciál:

$$f(x) = \frac{1}{2}C \cdot x^2 \ ; \quad f'(x) = Cx \tag{19}$$

který odpovídá lineární soustavě s charakteristikou C. Snadno se přesvědčíme, že rovnici (18) s charakteristikou (19) odpovídají tato vlastní čísla a vlastní funkce:

$$\begin{aligned} \lambda_{(i)} &= C \cdot i \ ; \\ h_{(0)}(x) &= \sqrt[4]{\frac{C}{2\pi a^2\varepsilon}} \cdot \exp(-\frac{C}{a^2\varepsilon}x^2) \\ h_{(i)}(x) &= \sqrt[4]{\frac{C}{2^{2i+1}i!^2\pi a^2\varepsilon}} \cdot H_i(\sqrt{\frac{C}{a^2\varepsilon}}x) \cdot \exp(-\frac{C}{a^2\varepsilon}x^2) \end{aligned} \tag{20}$$

kde $H_i(x)$ jsou l'Hermiteovy polynomy. Použijeme-li sumační formuli (6), ve které použijeme vlastní čísla a funkce (20), dostaneme vzhledem k součtovým vzorcům pro l'Hermiteovy polynomy (např. Janke, Emde, Lösch, 1960 a mnoho dalších) vzorec pro přechodovou hustotu pravděpodobnosti vztaženou k počátečnímu bodu $(x = 0; t = 0)$:

$$h(x,t) = \sqrt{\frac{C}{\pi a^2\varepsilon\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2Ct}}}} \exp\left(-C\frac{x^2}{a^2\varepsilon(1-\mathrm{e}^{-2Ct})}\right) \tag{21}$$

Vzorec (21) platí pro jakékoli reálné x a pro jakékoli reálné nezáporné t. Je zřejmé, že pro velké hodnoty t se časový faktor uplatní velmi málo a pro $t \to \infty$ dospěje ke vzorci pro stacionární případ, který plně odpovídá známému Boltzmannovu řešení (viz např. Dimentberg 1982 a mnoho dalších publikací). Jak odpovídá přenosu lineární soustavou, odezva na aditivní gaussovské buzení je opět gaussovská. Zároveň je zřejmé, že pro malá t se Gaussova křivka stále více přibližuje Diracově funkci, jak odpovídá základní úloze formulované FP rovnicí. Počáteční podmínka tedy stanoví deterministickou hodnotu odezvy v bodě $t = 0$, která s rostoucím t nabývá vlivem pravé strany v (16) náhodný charakter s rostoucím rozptylem.

Zaveďme nyní potenciál $f(x)$ ve tvaru

$$f(x) = -\frac{1}{2}C \cdot x^2 \ ; \quad f'(x) = -Cx \tag{22}$$

což znamená lineární soustavu (16) avšak s negativní charakteristikou. Formálně lze napsat výrazy pro vlastní čísla i vlastní funkce, jestliže ve (20) zaměníme C za $-C$ a podobně také v (21). Z takto upravených výrazů je však zřejmé, že vlastní čísla nezačínají na nule, ale na hodnotě $-C$ a klesají po záporné poloose. Stacionární řešení v takovém případě tedy neexistuje. Systém je metastabilní, což vyplývá i z prostého náhledu, např. Náprstek (1996). Tím, že vlastní čísla jsou záporná, výraz (6) diverguje a nevede ke stabilnímu řešení. Z fyzikálního hlediska by bylo třeba prověřit základní matematický model systému.

Ukažme vlastnosti vlastních čísel a funkcí pro případ, že potenciál umožňuje soustavě pohyb pouze v daném pásmu o šířce $2d$, to jest $x\epsilon(-d;d)$, což modelujeme potenciálem, resp. vazbovou silou:

$$f(x) = -2Cd^2 \cdot \lg(\cos\frac{\pi x}{2d}) \ ; \ \text{resp.} \qquad f'(x) = Cd\pi \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2d} \ ; \quad x\epsilon(-d;d) \tag{23}$$

Charakteristika (23) je v uvedeném intervalu spojitá a hladká. Neznamená však zcela volný pohyb soustavy v intervalu $x\epsilon(-d;d)$, pouze se k tomuto stavu přibližuje úměrně velikosti konstanty $C \cdot d$.

Nejnižší vlastní číslo je nulové a existuje tedy stacionární řešení, které ihned vyplývá z rovnice (18):

$$\lambda_{(0)} = 0 \ ; \quad h_{(0)}(x) = N_0(\cos\frac{\pi x}{2d})^{4Cd^2/a^2\varepsilon} \tag{24}$$

což lze snadno ověřit pomocí Boltzmannova řešení. Vyšší vlastní čísla a funkce mají tvar:

řešení se sudým indexem:

$$\lambda_{(2i)} = C\pi^2(n^2+n) \ ; \quad h_{(2i)}(x) = N_{2i}\left[\cos(2n+1)\frac{\pi x}{2d}\right]^{4Cd^2/a^2\varepsilon} \tag{25}$$

řešení s lichým indexem:

$$\lambda_{(2i-1)} = C\pi^2(n^2-\frac{1}{4}) \ ; \quad h_{(2i-1)}(x) = N_{2i-1}\left[\sin(n\frac{\pi x}{2d})\right]^{4Cd^2/a^2\varepsilon} \tag{26}$$

Konstanty N_0, N_{2i}, N_{2i-1} ve vzorcích (24) až (26) značí konstanty normalizace. Přechodovou hustotu pravděpodobnosti odvodíme opět ze vztahu (6). Odtud snadno odvodíme, že hustota pravděpodobnosti odezvy v okamžiku $t = 0$ má charakter Diracovy funkce, která postupně přechází v útvar vyplňující celý interval $x\epsilon(-d;d)$. Ve stacionárním stavu, kdy vlastní funkce (25), (26) ztratily jakýkoli vliv a uplatňuje se pouze (24), je hustota pravděpodobnosti v bodech $x = \pm d$ nulová, i když od maxima v bodě $x = 0$ ve větší části intervalu $x\epsilon(-d;d)$ klesá na obě strany jen velmi pomalu. Odezva má tedy výrazně negaussovský charakter, což odpovídá silně nelineární povaze soustavy, viz např. Grigoriu (1995), Cho-To (2000) a další.

Všimněme si ještě případu, kdy charakteristika soustavy má hevisideovský charakter bez omezení intervalu x. Ve stylu předchozího výkladu píšeme:

$$\begin{aligned} f(x) = D\alpha|x| \ ; \quad f'(x) \ &= -D\alpha \ ; \qquad x<0 \\ &= \pm C\alpha\delta(x) \ ; \ x=0 \\ &= +D\alpha \ ; \qquad x>0 \end{aligned} \tag{27}$$

Stacionární řešení opět existuje:

$$\lambda_{(0)} = 0 \ ; \qquad h_{(0)} = \sqrt{\frac{D\alpha}{a^2\varepsilon}}\exp(-\frac{2D\alpha}{a^2\varepsilon}|x|) \tag{28}$$

Odpovídá konstantnímu oboustrannému atraktoru ve stacionárním stavu. V okolí počátku je úbytek hustoty pravděpodobnosti nejrychlejší.

Další vlastní čísla netvoří diskrétní množinu, ale spojitou funkci v proměnné $i \to \omega_i$:

$$\lambda_{(i)} = \frac{1}{2}(D \cdot \alpha^2 + \omega_i^2 a^2 \varepsilon) \tag{29}$$

Odpovídající vlastní funkce jsou:

řešení symetrická:

$$h^s_{(i)}(x) = N_s((4\omega^2 + \alpha^2)\pi)^{-1/2} \cdot (2\omega_i \cdot \cos(\omega_i x) - \alpha \cdot \sin(\omega_i |x|) \tag{30}$$

řešení antimetrická:

$$h^a_{(i)}(x) = N_a \cdot \sin(\omega_i x)\ ;\ N_s, N_a \ \text{- konstanty normalizace} \tag{31}$$

Přechodovou hustotu pravděpodobnosti odezvy dostaneme opět z (6), kde místo sčítání přes index (i) zavedeme integraci podle proměnné ω_i.

4. FP rovnice o více souřadnicích

Vraťme se k původní rovnici (1) a předpokládejme, že její řešení lze vyjádřit pomocí vlastních čísel a funkcí ve smyslu součtového vzorce (6). Předpokládejme stejně jako v předchozím výkladu, že koeficienty driftu κ_i jsou nezávislé na čase a že koeficienty difuze κ_{ij} jsou nezávislé na čase i na souřadnicích $\mathbf{x}$ a jsou tedy konstantní. Takováto omezení obecného tvaru rovnice (1) odpovídají hamiltonovské dynamické soustavě se stacionárním aditivním buzením a elastickým potenciálem, který vede obecně na nelineární vnitřní elastické vazby.

Pokud v soustavě nepůsobí žádné vnitřní tlumení, anebo tlumení je lineární (odpovídá kvadratickému potenciálu útlumu) a proporcionální příslušným intenzitám aditivního bílého šumu, existuje stacionární Boltzmannovo řešení.

$$h_{(0)}(\mathbf{x}) = N \cdot \exp(-\eta H(\mathbf{x})) \tag{32}$$

$H(\mathbf{x})$	-	hamiltonián zkoumané soustavy;
N	-	konstanta normalizace;
η	-	poměr koeficientu útlumu a intenzity bílého šumu působícího v odpovídající souřadnici.

Výraz (32) lze pokládat za nejnižší vlastní funkci FP operátoru příslušnou vlastnímu číslu $\lambda_{(0)} = 0$. Pokud je potenciál elastických sil polynomiální a konvexní, existuje stacionární řešení i v případě, že útlum a intenzity buzení nejsou vzájemně proporcionální. Exponent v (32) je pak složitější, odpovídá však lineární kombinaci konečného počtu polynomiálních forem, jejichž koeficienty lze určit zpětným dosazením obecného vzorce do FP rovnice.

$$h_{(0)}(\mathbf{x}) = N \cdot \exp(-\Phi(\mathbf{x})) \tag{33}$$

kde $\Phi(x)$ lze pokládat za jisté zobecnění funkcionálu $H(\mathbf{x})$, i když bez fyzikální interpretace. Byly nalezeny i další speciální případy, kdy existuje stacionární řešení rovnice (1). V obecném případě je však třeba vzít v úvahu vzorec (6) v plném rozsahu, to jest počítat s časovou závislostí hustoty pravděpodobnosti odezvy na čase.

Protože operátor $\mathbf{L}\{\mathbf{x}\}$ obecně není symetrický, je třeba respektovat, že vlastní funkce tvoří biortogonální soustavu. Jinými slovy, je třeba pracovat s vlastními funkcemi, které plynou z rovnic:

$$\mathbf{L}\{\mathbf{x}\}h(\mathbf{x}) + \lambda h(\mathbf{x}) = 0\ (a)\ ;\quad \mathbf{L}^*\{\mathbf{x}\}h^*(\mathbf{x}) + \lambda h^*(\mathbf{x}) = 0\ (b) \tag{34}$$

kde $\mathbf{L}^*\{\mathbf{x}\}$, resp. $h^*(\mathbf{x})$ je adjungovaný operátor, resp. jeho vlastní funkce. Pokud jsou vlastní čísla komplexní, je komplexně sdružené číslo také vlastní číslo téhož operátoru, neboť operátor $\mathbf{L}\{\mathbf{x}\}$ je reálný. Snadno se ukáže, že vlastní čísla plynoucí z (34a) a (34b) jsou stejná. Ze skalárního součinu

$$(h_{(i)}, h^*_{(j)}) = \int h_{(i)}(\mathbf{x}), h^*_{(j)}(\mathbf{x})\ \mathrm{d}V \tag{35}$$

vyplývá jednak rovnost $\lambda_{(i)} = \lambda^*_{(i)}$:

$$-\lambda_{(i)}(h_{(i)}, h^*_{(i)}) = (\mathbf{L}\{\mathbf{x}\}h_{(i)}, h^*_{(i)}) = (h_{(i)}, \mathbf{L}^*\{\mathbf{x}\}h^*_{(i)}) = -\lambda^*_{(i)}(h_{(i)}, h^*_{(i)}) \quad \Rightarrow \quad \lambda_{(i)} = \lambda^*_{(i)}$$

a dále biortogonalita vlastních funkcí $(h_{(i)}, h^*_{(j)}) = \delta_{ij}$:

$$-\lambda_{(i)}(h_{(i)}, h^*_{(j)}) = (\mathbf{L}\{\mathbf{x}\}h_{(i)}, h^*_{(j)}) = (h_{(i)}, \mathbf{L}^*\{\mathbf{x}\}h^*_{(j)}) = -\lambda^*_{(j)}(h_{(i)}, h^*_{(j)})$$

V dalším výkladu budeme předpokládat, že vlastní funkce plynoucí z (34) tvoří úplnou biortogonální řadu. Pokud tedy existuje stacionární řešení FP rovnice, můžeme psát:

$$\lambda_{(0)} = 0\ ; \quad h_{(0)}(\mathbf{x}) = h_{stac}(\mathbf{x})\ ; \quad h^*_{(0)} = 1 \tag{36}$$

Přechodovou hustotu pravděpodobnosti potom zapíšeme ve tvaru (6).

Proveďme rozšíření operátoru $\mathbf{L}\{\mathbf{x}\}$ obdobně jako v (8). U vícerozměrného operátoru je však toto rozšíření složitější:

$$\mathbf{L}\{\mathbf{x}\} = \frac{\partial}{\partial x_i}\kappa_{ij}\mathrm{e}^{-\Phi(\mathbf{x})}\frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{e}^{\Phi(\mathbf{x})} - \frac{\partial}{\partial x_i}\kappa^a_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\kappa_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_i}[\mathrm{e}^{\Phi(\mathbf{x})}(\frac{\partial}{\partial x_j}\kappa_{ij}\mathrm{e}^{-\Phi(\mathbf{x})}) + \kappa^a_i] \tag{37}$$

(operátor v hranatých závorkách nepůsobí mimo tyto závorky)
Podobně jako u skalárního případu, první část operátoru ve vyjádření (37) se dá převést na symetrický operátor přenásobením $\exp(\Phi(\mathbf{x})/2)$ zleva a $\exp(-\Phi(\mathbf{x})/2)$ zprava. Uplatníme-li tuto transformaci, dostaneme:

$$\mathbf{L}^\psi\{\mathbf{x}\} = \exp(\Phi(\mathbf{x})/2)\cdot\mathbf{L}\{\mathbf{x}\}\exp(-\Phi(\mathbf{x})/2) = \mathbf{L}^{\psi s}\{\mathbf{x}\} + \mathbf{L}^{\psi a}\{\mathbf{x}\} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{\psi s}\{\mathbf{x}\} &= \mathrm{e}^{\Phi(\mathbf{x})/2}\tfrac{\partial}{\partial x_i}\kappa_{ij}\mathrm{e}^{-\Phi(\mathbf{x})}\tfrac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{e}^{\Phi(\mathbf{x})/2} = \mathbf{L}^{\psi s *}\{\mathbf{x}\} \\ \mathbf{L}^{\psi a}\{\mathbf{x}\} &= -\mathrm{e}^{\Phi(\mathbf{x})/2}\tfrac{\partial}{\partial x_i}\kappa^a_i\mathrm{e}^{-\Phi(\mathbf{x})/2} = -\mathbf{L}^{\psi a *}\{\mathbf{x}\} \end{aligned} \tag{39}$$

Výraz (38) znamená rozklad na symetrickou a antimetrickou část:

$$\mathbf{L}^{\psi s}\{\mathbf{x}\} = (\mathbf{L}^\psi\{\mathbf{x}\} + \mathbf{L}^{\psi *}\{\mathbf{x}\})\ ; \quad \mathbf{L}^{\psi a}\{\mathbf{x}\} = (\mathbf{L}^\psi\{\mathbf{x}\} - \mathbf{L}^{\psi *}\{\mathbf{x}\}) \tag{40}$$

Za těchto okolností přejde (34a), (34b) na problém vlastních čísel a funkce dvojice rovnic:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^\varphi\{\mathbf{x}\}h^\varphi_{(i)}(\mathbf{x}) &= \mathbf{L}^{\varphi s}\{\mathbf{x}\}h^\varphi_{(i)}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}^{\varphi a}\{\mathbf{x}\}h^\varphi_{(i)}(\mathbf{x}) &= -\lambda_{(i)}h^\varphi_{(i)}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{L}^{\varphi *}\{\mathbf{x}\}h^{\varphi *}_{(i)}(\mathbf{x}) &= \mathbf{L}^{\varphi s}\{\mathbf{x}\}h^{\varphi *}_{(i)}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}^{\varphi a}\{\mathbf{x}\}h^{\varphi *}_{(i)}(\mathbf{x}) &= -\lambda_{(i)}h^{\varphi *}_{(i)}(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{41}$$

Z transformace (38) vyplývá vztah mezi vlastními funkcemi $h_{(i)}, h^\varphi_{(i)}$, resp. $h^*_{(i)}, h^{\varphi *}_{(i)}$:

$$h_{(i)}(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{-\Phi(\mathbf{x})}h^\varphi_{(i)}(\mathbf{x}), \quad \text{resp.} \quad h^*_{(i)}(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{\Phi(\mathbf{x})}h^{\varphi *}_{(i)}(\mathbf{x}) \tag{42}$$

Ukážeme, že vlastní čísla jsou reálná a kladná i v případě mnohorozměrného FP operátoru. Předpokládejme nejprve, že vlastní čísla $\lambda^s_{(i)}$ jsou skutečně reálná a že reálné jsou i vlastní funkce $h^s_{(i)}$ symetrického operátoru $\mathbf{L}^{\varphi s}\{\mathbf{x}\}$, to jest:

$$\mathbf{L}^{\varphi s}\{\mathbf{x}\}h^s_{(i)}(\mathbf{x}) + \lambda^s_{(i)}h^s_{(i)}(\mathbf{x})\} = 0 \tag{43}$$

Předpokládejme, že všechna vlastní čísla jsou jednoduchá a vlastní funkce ortonormalizovány:

$$\int h^s_{(i)}(\mathbf{x})h^s_{(j)}(\mathbf{x})\mathrm{d}V = \delta_{ij} \tag{44}$$

Protože operátor $\mathbf{L}^{\varphi s}\{\mathbf{x}\}$ je symetrický a reálný, platí důkaz provedený pro skalární případ. Z něj vyplývá nezáporná hodnota všech vlastních čísel, pokud existuje stacionární řešení, kterému přísluší vlastní číslo nulové. Všechna ostatní vlastní čísla jsou tedy kladná a lze je uspořádat ve vzestupném pořadí:

$$0 = \lambda_{(0)} < \lambda^s_{(1)} \le \lambda^s_{(2)} \le \lambda^s_{(3)} \le \dots \tag{45}$$

Uvažujme nyní obecný případ komplexních vlastních čísel i funkcí nesymetrického operátoru $\mathbf{L}^{\varphi}\{\mathbf{x}\}$ podle (41). Z (44), (45) vyplývá, že:

$$\mathbf{L}^{\varphi a}\{\mathbf{x}\}\sqrt{h_{stac}(\mathbf{x})} = \sqrt{N_{stac}}\mathbf{L}^{\varphi a}\{\mathbf{x}\}e^{-\Phi(\mathbf{x})/2} = -\sqrt{N_{stac}}e^{\Phi(\mathbf{x})/2}(\frac{\partial}{\partial x_i}\kappa^a_i e^{-\Phi(\mathbf{x})}) = 0 \tag{46}$$

To znamená, že:

$$h_{0)}(\mathbf{x}) = h^s_{0)}(\mathbf{x}) = \sqrt{N_{stac}}e^{-\Phi(\mathbf{x})/2} \tag{47}$$

$$h^{\varphi}_{i)} = c_{ij}h^{\varphi s}_{(j)}\ ; \quad j > 0 \tag{48}$$

$$\lambda_{(i)} = \frac{\int h^{\varphi *}_{(i)}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{L}^{\varphi s}\{\mathbf{x}\}h^{\varphi}_{(i)}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}^{\varphi a}\{\mathbf{x}\}h^{\varphi}_{(i)}(\mathbf{x}))\mathrm{d}V}{\int h^{\varphi *}_{(i)}(\mathbf{x})h^{\varphi}_{(i)}(\mathbf{x})\}\mathrm{d}V} \tag{49}$$

Vzhledem k (44), (45) dostaneme pro $i > 0$:

$$\Re\{\lambda_{(i)}\} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty}|c_{ij}|^2\lambda^s_{(j)}}{\sum\limits_{j=1}^{\infty}|c_{ij}|^2} \ge \lambda^s_{(1)} > 0 \tag{50}$$

Z těchto výsledků vyplývá, že všechna přechodová řešení FP rovnice se s rostoucím časem asymptoticky blíží řešení stacionárnímu, pokud takové existuje. V opačném případě se jedná o systém s lokální či globální nestabilitou. Stacionární řešení může existovat v jisté omezené oblasti, kde zároveň mohou platit všechny předchozí závěry. Nicméně takový problém je třeba analyzovat individuálně, viz předchozí kapitola.

5. Příklad FP rovnice o dvou souřadnicích

Zabývejme se dynamickým systémem o jednom stupni volnosti, jenž je popsán rovnicí:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + f'(x) = b \cdot \Gamma(t) \tag{51}$$

$\Gamma(t), a, \varepsilon$	-	centrovaný gaussovský bílý šum, resp. jeho měřítko a intenzita;
$f'(x), f(x)$	-	vazbová elastická síla, resp. její potenciál, je funkcí pouze výchylky x;
γ	-	koeficient útlumu;

Rovnice (51) rozepsaná v normálním tvaru má známý tvar:

$$\dot{x} = y\ ; \quad \dot{y} = -\gamma y - f'(x) + b \cdot \Gamma(t)\ ; \quad \mathbf{x} = [x, y] \tag{52}$$

Koeficienty driftu a difuze mají zjednodušený tvar vzhledem k absenci parametrických šumů, např. Náprstek (2003):

$$\begin{array}{ll} \kappa_x = y\ ; & \kappa_y = -\gamma y - f'(x) \\ \kappa_{xx} = \kappa_{xy} = \kappa_{yx} = 0\ ; & \kappa_{yy} = \frac{1}{2}b^2\varepsilon \end{array} \tag{53}$$

FP rovnice příslušná k soustavě (52):

$$\frac{\partial h(x,y,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\partial}{\partial x}y + \frac{\partial}{\partial y}(\gamma y + f'(x)) + \frac{1}{2}b^2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)h(x,y,t) = \mathbf{L}\{x,y\}h(x,y,t) \tag{54}$$

Operátor $\mathbf{L}\{x,y\}$ rozložíme na dvě části:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\{x,y\} &= \mathbf{L}^s\{x,y\} + \mathbf{L}^a\{x,y\}\ ; \quad \beta^2 = b^2\varepsilon/2\gamma \\ \mathbf{L}^s\{x,y\} &= \gamma\tfrac{\partial}{\partial y}(y + \beta^2\tfrac{\partial}{\partial y})\ ; \quad \mathbf{L}^a\{x,y\} = -y\tfrac{\partial}{\partial x} + f'(x)\tfrac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \tag{55}$$

Z fyzikálního hlediska odpovídá operátor $\mathbf{L}^a\{x,y\}$ homogenní dynamické deterministické soustavě o jednom stupni volnosti bez vnitřního útlumu:

$$\dot{x} = y\ ; \quad \dot{y} = -f'(x) \tag{56}$$

zatímco operátor $\mathbf{L}^s\{x,y\}$ odpovídá rovnici (18), to jest náhodnému difuznímu procesu prvního řádu a tedy rovnici (16). Tento operátor lze převést na symetrický podobnými kroky jako ve druhé kapitole. Zavedeme transformaci na celý operátor $\mathbf{L}\{x,y\}$, resp. současně na obě jeho složky podle (55):

$$\mathbf{L}^\varphi\{x,y\} = \mathrm{e}^{(\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{2}f(x))/\beta^2}(\mathbf{L}^s\{x,y\} + \mathbf{L}^a\{x,y\})\mathrm{e}^{(-\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}f(x))/\beta^2} = \mathbf{L}^{\varphi s}\{x,y\} + \mathbf{L}^{\varphi a}\{x,y\} \tag{57}$$

přičemž platí, že:

$$\mathbf{L}^{\varphi s}\{x,y\} = \mathbf{L}^{\varphi s*}\{x,y\}\ ; \quad \mathbf{L}^{\varphi a}\{x,y\} = -\mathbf{L}^{\varphi a*}\{x,y\}\ ; \quad \mathbf{L}^{\varphi a}\{x,y\} = \mathbf{L}^a\{x,y\} \tag{58}$$

Z (58) vyplývá, že operátor $\mathbf{L}^{\varphi s}\{x,v\}$ je symetrický, $\mathbf{L}^{\varphi a}\{x,v\}$ je antimetrický a zároveň intaktní vůči transformaci zavedené v (57).

Rozeberme rovnici (51) pro případ lineární tuhosti, to jest:

$$f(x) = \frac{1}{2}\omega_0^2x^2\ ; \quad f'(x) = \omega_0^2 x\ ; \quad \omega_0^2 > 0 \tag{59}$$

kde ω_0 je kruhová vlastní frekvence linearizovaného systému (51).

Úkolem je řešit vlastní čísla a funkce příslušné rovnici:

$$\mathbf{L}^\varphi\{x,y\}h^\varphi_{(i)}(x,y) + \lambda_{(i)}h^\varphi_{(i)}(x,y) = 0 \tag{60}$$

Z (57) vyplývá vztah mezi vlastními funkcemi $h^\varphi_{(i)}$ a $h_{(i)}$:

$$h^\varphi_{(i)}(x,y) = \mathrm{e}^{(\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{4}\omega_0^2x^2)/\beta^2}h_{(i)}(x,y) \tag{61}$$

Stacionární řešení $\lambda_{(0)}$ se určí z rovnice (60) rozkladem operátoru anebo jako Boltzmannovo řešení:

$$h^\varphi_{(0)}(x,y) = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{2\pi\beta^2}}\ \mathrm{e}^{(-\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{4}\omega_0^2x^2)/\beta^2} \tag{62}$$

Posloupnost vyšších vlastních čísel lze odhadnout podle struktury (20) platné pro problém lineární difuze. Naznačuje to porovnání operátoru platného pro problém difuze (18) a dílčích operátorů $\mathbf{L}^{\varphi s}\{x,y\}, \mathbf{L}^{\varphi a}\{x,y\}$ zkoumaných v této kapitole:

$$\lambda_{(i1,i2)} = \lambda_1\cdot i_1 + \lambda_2\cdot i_2\ ; \quad \lambda_{(0,0)} = \lambda_{(0)} = 0\ ; \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}) \tag{63}$$

Zpětným dosazením a poměrně pracnými úpravami se dopracujeme k obecným výrazům pro biortogonální řadu vlastních funkcí:

$$\begin{aligned} h^{\varphi}_{(i1,i2)}(x,y) &= (i_1!\cdot i_2!)^{-1/2}(\mathbf{K}_{1+})^{i1}(\mathbf{K}_{2+})^{i2}\cdot h^{\varphi}_{(0,0)}(x,y)/(\lambda_1-\lambda_2) \\ h^{\varphi}_{(i1,i2)}(x,y) &= (i_1!\cdot i_2!)^{-1/2}(\mathbf{K}^*_{1-})^{i1}(\mathbf{K}^*_{2-})^{i2}\cdot h^{\varphi}_{(0,0)}(x,y)/(\lambda_1-\lambda_2) \end{aligned} \tag{64}$$

Ve vzorcích (64) značí $\mathbf{K}_{1+}$ až $\mathbf{K}^*_{2-}$ tyto operátory:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{1+}(x,v) &= \sqrt{\lambda_1}(-\beta\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{y}{\beta})-\sqrt{\lambda_2}(-\frac{\beta}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\omega_0 x}{\beta}) \\ \mathbf{K}_{2+}(x,v) &= \sqrt{\lambda_1}(-\frac{\beta}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\omega_0 x}{\beta})-\sqrt{\lambda_2}(-\beta\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{y}{\beta}) \\ \mathbf{K}_{1-}(x,v) &= \sqrt{\lambda_1}(\beta\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{y}{\beta})+\sqrt{\lambda_2}(\frac{\beta}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\omega_0 x}{\beta}) \\ \mathbf{K}_{2-}(x,v) &= \sqrt{\lambda_1}(\frac{\beta}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\omega_0 x}{\beta})+\sqrt{\lambda_2}(\beta\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{y}{\beta}) \end{aligned} \tag{65}$$

Ze vztahů (60)-(65) se dají odvodit tyto vlastnosti:

$$\mathbf{L}^{\varphi}\{x,y\}=\mathbf{L}^{\varphi *}\{x,-y\}\ ;\quad \mathbf{K}^*_{1-}(x,y)=-\mathbf{K}_{1+}(x,-y)\ ;\quad \mathbf{K}^*_{2-}(x,y)=\mathbf{K}_{2+}(x,-y) \tag{66}$$

Z těchto relací vyplývá vztah mezi vlastními funkcemi:

$$h^{\varphi *}_{(i1,i2)}(x,y)=(-1)^{i1}h^{\varphi}_{(i1,i2)}(x,-y) \tag{67}$$

Protože $h^{\varphi *}_{(i1,i2)}(x,y)$ a $h^{\varphi}_{(i1,i2)}(x,y)$ tvoří úplnou řadu, můžeme přechodovou hustotu pravděpodobnosti vzhledem k počátečním podmínkám vyjádřit vzorcem:

$$h(x,y,t|x',y',0)=\mathrm{e}^{[-\frac{1}{4}(y^2-y'^2)-\frac{\omega_0^2}{4}(x^2-x'^2)]/\beta^2}\cdot\sum_{i1,i2=0}^{\infty}h^{\varphi *}_{(i1,i2)}(x',y')h^{\varphi}_{(i1,i2)}(x,y)\mathrm{e}^{-\lambda_{(i1,i2)}t} \tag{68}$$

Z výrazu (68) je zřejmé, že se stoupající hodnotou reálné části vlastního čísla klesá se stoupajícím t vliv příslušného sčítance stále rychleji. Pro stoupající t hustota pravděpodobnosti odezvy konverguje ke stacionárnímu řešení, které je popsáno řešením Boltzmannovým stojícím před dvojitou sumací. Existence stacionárního řešení je zajištěna vždy pro $\omega_0^2>0,\gamma>0$, jak odpovídá praktickým případům.

6. Numerické řešení

Z hlediska praktické upotřebitelnosti je třeba směřovat k numerickým způsobům řešení, neboť jsou schopny obsáhnout poměrně širokou třídu problémů bez závažných omezení, která je nutno zavádět při analytických způsobech.

Vlastní čísla a funkce operátoru $\mathbf{L}^{\varphi}\{\mathbf{x}\}$, resp. $\mathbf{L}\{\mathbf{x}\}$ lze získat řešením variačního problému. Funkce $h(\mathbf{x})$, která minimalizuje výraz (49) vede k nejnižšímu vlastnímu číslu a funkci $\lambda_{(0)}, h_{(0)}(\mathbf{x})$. Podmínkou je existence stacionárního řešení. V takovém případě vyjdeme z nulové hodnoty nejnižšího vlastního čísla a provedeme řešení FP rovnice ve stacionárním stavu. Další vlastní funkce $h(\mathbf{x})$ a vlastní číslo se najde minimalizací funkcionálu (49) s vedlejší podmínkou:

$$\int h_{(0)}(\mathbf{x})h(\mathbf{x})\mathrm{d}V=0 \tag{69}$$

Vyšší vlastní funkce a čísla se najdou podobně přidáním vždy další podmínky ortogonality ke všem předchozím vlastním funkcím. Je třeba dbát na to, že vlastní funkce netvoří ortogonální, nýbrž biortogonální řadu. To znamená, že pro $2n-$tou vlastní funkci a číslo klademe:

$$(h_{(0)}(\mathbf{x})h(\mathbf{x})) = 0 \ ; \ (h^*_{(1)}(\mathbf{x})h(\mathbf{x})) = 0 \ ; \ldots \ ; \ (h^*_{(2n-1)}(\mathbf{x})h(\mathbf{x})) = 0 \qquad (70)$$

Je však třeba si uvědomit, že dosažitelné přesnosti vlastních čísel jsou mnohem vyšší než přesnosti vlastních funkcí, které během iteračního procesu konvergují pouze v průměru a mohou tak vést k větším odchylkám samotných funkčních hodnot. Z praktického hlediska je vhodné využít co nejvíce poznatků již získaných, např. analyticky, experimentálně, atd. V literatuře lze najít mnoho analogických postupů v souvislosti s problémem optimalizace, minimalizace nespojitých funkcionálů s vedlejšími podmínkami, atd., viz např. Puig, Poirion, Soize (2002), Sakamoto, Ghanem (2002), Soong (1981), atd.

Další možností numerického řešení je využití metody konečných prvků, která vede na problém vlastních čísel a vektorů velkých čtvercových matic. Touto otázkou je třeba se zabývat v sérii samostatných studií. Souvisí opět s transformovatelností původního operátoru na symetrický tvar, popř. s možností fyzikálního využití nesymetrie zmíněné matice. Je však třeba mít na paměti speciální vlastnosti FP rovnice (1), která se v praktickém případě vyznačuje velikým počtem nezávisle proměnných (dvojnásobek počtu dynamických stupňů volnosti soustavy). Tomu je třeba přizpůsobit výběr typu prvků, způsoby integrace prvků, atd.

7. Závěr

Rozbor vlastností vlastních čísel a vlastních funkcí Fokker-Planckova operátoru ukazuje, že nestacionární řešení FP rovnice je možné hledat rozkladem podle vlastních funkcí FP operátoru. Detailní řešení se potom soustřeďuje na soustavu rovnic pouze v prostorových proměnných (souřadnice odezvy soustavy), zatímco časový faktor je charakterizován u každého členu řady zvlášť. Řešení má tedy přehlednou strukturu. Pokud existuje stacionární řešení, je vždy prvním v řadě s nulovým vlastním číslem. Dá se tak velmi dobře posoudit časový vývoj hustoty pravděpodobnosti odezvy. Pokud se zkoumá Hamiltonovská soustava, je k dispozici nezávislá kontrola řešení, kterou lze založit na Boltzmannově řešení proporcionální soustavy.

Vícerozměrný FP operátor je obecně nesymetrický, dá se však rozložit na symetrickou a antimetrickou část. Na takovýchto operátorech již lze hledat biortogonální soustavu vlastních funkcí, která je kompletní a může tedy s libovolnou přesností vystihnout řešení nestacionárního problému. Jak ukazuje obecná studie i konkrétní příklady, je vždy nezbytné zkoumat, zdali jsou vlastní čísla jednoduchá a tvoří diskrétní množinu. Zároveň je třeba se pokusit předem zjistit, jsou-li vlastní čísla reálná a kladná. Na základě toho můžeme posoudit typ, rychlost a povahu konvergence k stacionárnímu řešení, anebo naopak jeho lokální, či globální divergenci. Tyto faktory je důležité si uvědomit obzvláště při numerickém řešení, kdy většina zmíněných vlastností může být skryta anebo podléhat změnám i při poměrně malé úpravě zadání úlohy na úrovni okrajových podmínek, konfigurace buzení, atd.

8. Poděkování

Autor děkuje Grantové agentuře AVČR (grant č. A2071401,) a GAČR (granty č. 103/05/2396, 103/03/P080), za jejichž podpory vznikla tato práce. Text byl pořízen procesorem LaTeX.

9. Literatura

Andersen, R.S. (1967) *Variational methods and parabolic differential equations*. Univ. Adelaide, Adelaide.

Ben-Haim, Y. (2001) *Information-gap Decision Theory*. Academic Press, New York, London.

Bolotin, V.V. (1979) *Random vibrations of elastic systems* (in Russian). Nauka, Moscow.

Dimentberg, M.F. (1982) An exact solution to a certain non-linear random vibration problem. *Jour. Non-Linear Mechanics*, 17(4), pp.231-236.

Grasman, J., van Herwaarden, O.A. (1999) *Asymptotic Methods for the Fokker-Planck Equation and the Exit Problem in Application*. Springer, Berlin, New York.

Grigoriu, M. (1995) *Applied non-Gaussian Processes*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Cho W.S. To (2000) *Nonlinear Random Vibration*. Swets and Zeitlinger, Lisse, Tokyo.

Itô, K., McKean, H.P. (1965) *Diffusion Processes and Their Sample Paths*. Academic Press, New York.

Janke, E., Emde, F., Lösch, F. (1960) *Tafeln höherer Funktionen*. B.G. Teubner, Stuttgart.

Michlin, S.G. (1970) *Variacionnyje metody v matematičeskoj fizike*. Nauka, Moskva.

Morse, P.M., Feshbach, H. (1953) *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, New York.

Náprstek, J. (1996) Stochastic exponential and asymptotic stability of simple non-linear systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol.31, 5, pp. 693-705.

Náprstek, J. (2003) Real and Markov processes in stochastic systems. In: *Proc. Dynamics of Machines 2003* (I. Dobiáš edt.). IT ASCR, Prague, pp.127-134.

Pugachev, V.S., Sinitsyn, I.N. (1987) *Stochastic Differential Systems — Analysis and Filtering*, J.Wiley, Chichester.

Puig, B., Poirion, F., Soize, C. (2002) Non-Gaussian simulation using Hermite polynomial expansion - convergence and algorithms. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 17, pp.253-264.

Sakamoto, S., Ghanem, R. (2002) Simulation of multi-dimensional non-Gaussian non-stationary random fields. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 17, pp.167-176.

Soize, C. (2001) Transient responses of dynamical systems with random uncertainties. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 17, pp.363-372.

Soong, T.T. (1981) *Probabilistic Modelling in Science and Engineering*, Wiley, New York.

Weinstein, E.M., Benaroya, H. (1994) The van Kampen expansion for the Fokker-Planck equation of a Duffing oscillator. *Jour. Statistical Physics*, 77, p.667-679.