INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2005
NÁRODNÍ KONFERENCE
s mezinárodní účastí
Svratka, Česká republika, 9. - 12. května 2005

CONTRIBUTION TO THE METHODS OF ANALYSIS OF DYNAMIC BEHAVIOR OF ROTOR DYNAMIC SYSTEMS

E. Malenovský[1]

Summary: *This contribution deals with the overview of methods, which are used for analysis of dynamic behavior of rotor dynamics systems. The main of background research topics are the eigen value problem, steady-state response and computational simulations. The mathematical and computational models are presented. New method, which is based on the synthesis of dynamic analysis of free parts, such as shaft, nonlinear couplings and flexible stator is presented. Relatively new method, as the trigonometric collocation, in conjunction with finite element method or method of dynamic compliances is presented. Application of all this method will be shown on the solution of technical tasks.*

Keywords: *Rotor dynamic systems, computational methods, modal method, trigonometric collocation method, eigen-value problem, steady state response, computational simulation.*

Přehled označení: **A** - matice soustavy, **B** - matice tlumení, **C** - matice dynamické tuhosti, **E** - jednotková matice, **G** - obecně matice dynamických poddajností, i – imaginární jednotka, **K** - matice tuhosti, **M** - matice hmotnosti, O, x, y, z - pevný nerotující souřadnicový systém, **O** - nulová matice, **q** - zobecněný vektor odezvy, **Q** - zobecněný vektor budících sil, t - čas, Δt - časový krok, $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ - pravostranné a levostranné vlastní vektory, λ_i - i-tá vlastní hodnota, τ - čas, ω - rychlost rotace hřídele, v – násobky budící frekvence

Indexy: horní „*R*“ - místa na rotující části mimo místa s vazbami s nerotující částí, horní „*RS*“ - místa na rotující části s vazbami s nerotující částí, horní „*SR*“ - místa na nerotující části s vazbami s rotující částí, horní „*S*“ - daná veličina se vztahuje ke statoru, horní „*V*“ - daná veličina se vztahuje k vazebným elementům, dolní „*V*“ - „volný“, dolní „*k*“ - konvolutorní integrál, dolní „o“ – amplitudy, nebo stacionární poloha, dolní „*s*“ - sinové složky, dolní „*c*“ - cosinové složky, dolní index „Re“ – reálná část, dolní „Im“ - imaginární část

[1] doc. Ing. Eduard Malenovský, DrSc. VUT FSI v Brně, Technická 2, 61669 Brno, tel: +42 (0) 5 41142855, fax: +42 (0) 5 41142855, e-mail malenovsky@fme.vutbr.cz

1. Úvod

Výpočtové modely ve většině případů úloh statiky i dynamiky korespondují s rozvojem a aktuelním stavem vývoje počítačové techniky. Od sestavení prvního modelu rotorové soustavy uplynulo více jak 100 let. Za tuto dobu nastal prudký vývoj počítačové techniky a s tím stouply i možnosti výpočtového modelování. Matematický model a v návaznosti i výpočtový model stále lépe popisují a vystihují chování reálné rotorové soustavy.

Nejjednodušší a i v dnešní době stále používaný je tzv. Lavalův model. Analýzu rotorové soustavy vyvinuté Lavalem prováděl Föppl (1895). Původní model se stával z nehmotného hřídele vázaného v tuhých ložiskách a hmotného kotouče umístěného uprostřed hřídele. Krouživé kmitání rotorové soustavy (střed hřídele se pohybuje po kružnici) lze popsat analyticky a z pohledu pohybu kotouče má soustava jeden stupen volnosti. V případě neizotropních vlastností podpor má místo na hřídeli v místě kotouče dva stupně volnosti. Pohyb kotouče je v případě, že jsou obě ložiska jsou stejná, obecný rovinný a neuplatňuje se vliv gyroskopických účinků. Model Lavalova rotoru se používá poměrně často i v současné době, zejména s různým typem ložisek, případně hydrodynamických tlumičů, ale také např. hřídelů s trhlinami, nebo pro analýzu vnitřního materiálového tření. Model byl dále rozšířen pro analýzu nesouososti dvou koaxiálních hřídelů (Rao, J. S., Sreenivas, R., Chawla, A. 2002). Název modelu jako Lavalův rotor se vžil v evropské literatuře, v americké literatuře se tento model nazývá jako Jeffcottův rotor. Prvotní výpočty byly prováděny s využitím logaritmického pravítka, případně mechanických kalkulátorů.

Pro studium vlivu gyroskopických účinků bylo nutno vytvořit model, který by zahrnoval i natočení hřídele. Tento model je pojmenován po svém tvůrci Aurelu Stodolovi, který je autorem několika knih shrnujících popis chování parních i spalovacích turbin. Knihy v několika vydáních byly psány v němčině a překládány do angličtiny, např. (Stodola, A. 1905, Stodola, A. 1910). Nejjednodušší je model, který představuje nehmotný jednostranně vetknutý hřídel, na jehož převislém konci je umístěn kotouč. V případě kruhové trajektorie středu hřídele má hřídel v místě kotouče dva st. volnosti, kdy se uvažuje i natočení konce hřídele. Pro komplexnější analýzu je ve většině případů uvažován Stodolův model se 4 st. volnosti. Fenomén gyroskopických účinků byl prvním, na který byla zaměřena pozornost, zejména z pohledu závislosti vlastních frekvencí na otáčkách hřídele. S využitím Stodolova modelu rotoru bylo možné v mnohých případech stanovit nejnižší vlastní frekvenci.

Model tvořil základ i pro analýzu rotorových soustav s více stupni volnosti. Byl rozšířen o další stupně volnosti, které představovaly zejména zkroucení hřídele, tedy výpočet torzního kmitání hřídelů. Tyto modely daly základ i pro rozvoj metod výpočtu vlastních frekvencí. Za zmínku stojí tzv. tabulková Holzerova metoda (Holzer, H. 1921), která byla aplikována pro výpočet vlastních frekvencí torzního kmitání rotorové soustavy modelované nehmotným hřídelem, na kterém bylo umístěno několik kotoučů.

Významným předělem v dynamice rotorových soustav jsou dvě skutečnosti. Zejména je to rozvoj počítačové techniky od roku 1950, kdy se výpočty začaly provádět na elektronických kalkulátorech, případně na počítačích (např. IBM 701 postavený v r. 1952). Zhruba od této doby je datován také vznik jazyka FORTRAN. A druhou skutečností, která úzce souvisí s první, je vznik metody přenosových matic. Metoda je nazývána po svých tvůrcích Miklestad - Prohlova (Miklestad, N. 1944 a Prohl, M. 1945). Lundem a Orcuttem (Lund, J., Orcutt, F. 1967) byla tato metoda rozšířena pro analýzu dynamických vlastností rotorových soustav s kluznými ložisky. Komplexní přístup k analýze stability rotorových soustav s kluznými ložisky s využitím metody přenosových matic je uveden v (Lund, J. 1974). Dále byla tato metoda rozšířena i pro řešení odezvy při přechodovém kmitání.

K sestavení matice přenosu mezi uzly pro konečný prvek diskretizovaného rotoru lze rovněž využít znalost matic hmotnosti, tuhosti a gyroskopických účinků na základě metody konečných prvků. Tato metoda rovněž tvořila základ pro analýzu dynamických vlastností leteckého motoru se dvěma koaxiálními hřídeli (Gupta, K., D., Gupta K., Rao, J., S., Bhaskara Sarma, K., V. 1988).

V současné době si téměř nelze představit analýzu dynamických vlastností rotorových soustav, která by nebyla založena MKP. Začátek aplikace lze zaznamenat cca od roku 1972 (Ruhl, R., L., Booker, J., F. 1972). Detailní přístup k analýze, včetně lokálních matic je uveden v (Nelson, H., D., McVaugh, J., M., 1976), kdy základ tvoří tzv. Timošenkův nosník, jsou uvažovány gyroskopické účinky, dále rotační setrvačnost i vnitřní materiálové tření.

Současný trend ve výpočtovém modelování dynamických vlastností rotorových soustav lze spatřovat ve dvou směrech:

- První směr je charakterizován sestavováním co možná nejlepších modelů mechanické části. Je to např. zahrnutí poddajné statorové části, poddajných ložiskových stojanů, modelování upevnění kotoučů, spojek atd. Hřídel je v těchto případech často modelován prostorovými prvky se značným počtem stupňů volnosti.
- Druhý směr je dán snahou zahrnout do analýzy vnější vlivy, jako je např. elektromagnetické vlivy, vliv okolního prostředí (plyn, tekutina, atd.). Z tohoto pohledu má analýza interdisplinární charakter. Nejen v mechanice kontinua, ale i v dalších odvětvích zaznamenalo výpočtové modelování značný rozvoj.

Celá řada výpočtových systémů, které jsou zaměřeny na určitou oblast výpočtového modelování, má dnes implementovány moduly i z jiných vědních oborů. Např. ANSYS, který je zejména určen pro řešení problémů mechaniky kontinua, má moduly z oblasti termomechaniky, hydromechaniky, elektrotechniky atd. Řešení komplexního modelu rotorové soustavy se zahrnutím všech vnějších vlivů není v současné době možné. S rychlým rozvojem výpočtové techniky to však v budoucnosti vyloučit nelze. Proto stále i v dnešní době jsou vyvíjeny metody a postupy umožňující syntézu dynamických podsystémů. Při syntéze se pak berou v úvahu zejména podstatné vlastnosti jednotlivých subsystémů. Právě na tuto oblast výpočtového modelování dynamických vlastností rotorových soustav je zaměřen příspěvek. Neklade si za cíl podat vyčerpávající přehled možných metod a přístupů. Řada z nich má i širší aplikaci, nejen v dynamice rotorových soustav, i když v této oblasti byla autorem nejvíce rozpracována.

Výpočtové modelování, na které je zaměřen tento příspěvek, pokrývá základní dynamické charakteristiky, kterými jsou problém vlastních hodnot (včetně analýzy stability), dále odezva při vynuceném ustáleném kmitání a odezva při přechodovém kmitání, často nazývána jako výpočtová simulace. Základ mechanické rotorové části tvoří MKP s modelem hřídele převzatým z (Nelson, H., D., McVaugh, J., M., 1976 Zorzi, E., Nelson, H., D., 1977).

V tomto příspěvku bude věnována pozornost rotorovým soustavám s jedním hřídelem a poddajnou nerotující, statorovou částí. Autorem však byla celá tato problematika zpracována i pro model leteckého motoru se dvěma koaxiálními hřídeli.

Nelineární vazby mezi rotující a nerotující částí včetně poddajné statorové části mohou mít v některých případech dominantní vliv na chování celé rotorové soustavy. Jedna z možností pro zahrnutí nelineárních vazeb do pohybové rovnice je jejich uvažování na pravé pohybové rovnice straně ve tvaru sil. Druhá možnost je jejich uvažování na levé straně rovnice ve tvaru matic hmotnosti, tlumení, nebo tuhostí. V tomto příspěvku je s ohledem na modální metodu uvažován druhý případ. V obecném případě mohou být matice hmotnosti, tlumení i tuhosti vazeb nelineární s různými funkčními závislostmi. Presto, že nebude ve vztazích tato nelineární závislost explicitně psána, je nutno ji mít na zřeteli.

Při výpočtu dynamických charakteristik rotorových soustav lze aplikovat celou řadu výpočtových metod a postupů. V současné době je nejužívanější metoda konečných prvků, avšak pokud bychom chtěli při řešení celého modelu aplikovat klasickou MKP s 3D modelem statorové části, byl by řád globálních matic značně velký, což by komplikovalo řešení. Ke snížení řádu úloh se používají různé metody redukce. V našem případě je použita metoda redukce ve frekvenční oblasti, která vede k aplikaci metody dynamických poddajností (MDP), případně modální metody (MM).

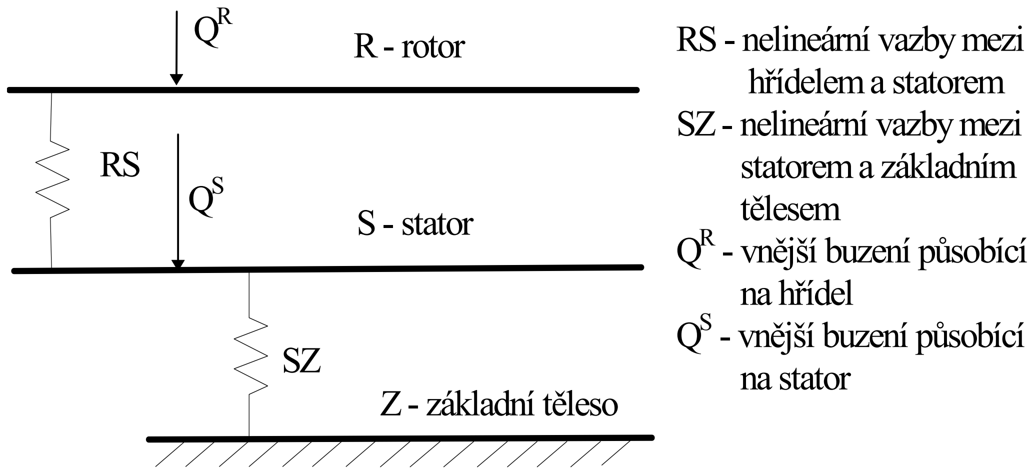
Komplexní přístup k řešení dynamiky složitých nelineárních rotorových soustav je v tomto případě chápán jako syntéza těchto částí:

- Poddajné mechanické rotující části
- Poddajné mechanické nerotující části
- Nelineární vazebné části mezi rotující a nerotující částí.

Mezi základní dynamické vlastnosti rotorových soustav stanovené na základě aplikace MDP nebo MM na které byla zaměřena pozornost při výpočtovém modelování patří:

- Problém vlastních hodnot při daných otáčkách (Campbellův diagram).
- Odezva při vynuceném ustáleném kmitání (v obecnějším případě tzv. kaskádový diagram).
- Odezva při přechodovém kmitání.

Teoretický základ MDP, kterou lze použít při výpočtu frekvenčně modálních vlastností, nebo odezvy při vynuceném ustáleném kmitání je uveden např. v (Malenovský, E. 1999). Výhodou této metody je možnost zahrnutí poddajné nerotující části, možnost snížení řádu úlohy a v neposlední řadě i možnost zahrnutí experimentálně získaných dat do řešení.



Obr. 1. Schéma rotorové soustavy s jedním hřídelem

K tomu abychom mohli do řešení zahrnout poddajnou nerotující statorovou část, je nutno znát frekvenčně modální vlastnosti „volného“ statoru (tj. bez rotorové a vazbové části), ale se skutečnými vazbami na základní těleso. K jejímu stanovení lze využít buď některý vhodný programový systém, případně některou z vhodných experimentálních metod. Výsledky modální analýzy slouží k sestavení matice dynamických poddajností statoru. Řád matice je minimálně dán počtem míst s vazbami mezi rotující a nerotující částí.

Na obr. 1 je nakreslena obecná rotorová soustava s jedním hřídelem včetně možných nelineárních vazeb mezi rotující a nerotující částí. V našem případě je analyzován obecný případ, kdy jak stator tak i rotor mohou být buzeny.

2. Výpočet odezvy při vynuceném ustáleném kmitání

Pohybová rovnice lineární rotorové soustavy s harmonickým buzením má tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_0\omega^2 e^{i\omega t} \tag{1}$$

Pro amplitudu odezvy při vynuceném ustáleném kmitání lze obecně v komplexním oboru psát rovnici

$$\mathbf{q}_0 = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{w}_i^T}{\mathrm{i}\omega - \lambda_i} \mathbf{Q}_0 = \mathbf{G}\,\mathbf{Q}_0 \tag{2}$$

Rozdělením dynamické poddajnosti rotoru na submatice jejichž řád je dán počtem uzlů kde nejsou vazby a uzly s vazbami mezi rotující a nerotující částí se obdrží tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}^R \\ \mathbf{q}^{RS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^R & \mathbf{G}_{12}^R \\ \mathbf{G}_{21}^R & \mathbf{G}_{22}^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^R \\ -\mathbf{Q}^V \end{bmatrix} \tag{3}$$

Za předpokladu, že je řešen „*volný*“ rotor ($\mathbf{Q}^V = \mathbf{0}$) pro odezvu na rotoru a v místech vazeb se statorem platí vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_V^R &= \mathbf{G}_{11}^R \mathbf{Q}^R \\ \mathbf{q}_V^{RS} &= \mathbf{G}_{21}^R \mathbf{Q}^R \end{aligned} \tag{4}$$

Pak lze rovnici (3) přepsat do tvaru, přičemž $\mathbf{G}_{ij}^R$ je matice dynamických poddajností „*volné*“ rotorové části

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^R &= \mathbf{q}_v^R - \mathbf{G}_{12}^R \mathbf{Q}^V \\ \mathbf{q}^{RS} &= \mathbf{q}_v^{RS} - \mathbf{G}_{22}^R \mathbf{Q}^V \end{aligned} \tag{5}$$

Za předpokladu shodných pravostranných a levostranných vlastních vektorů se dynamická poddajnost statoru má tvar

$$\mathbf{G}^S = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T}{i\omega - \lambda_i} \tag{6}$$

Pak pro odezvu na statorové části v místech vazeb s rotorovou platí vztah

$$\mathbf{q}^{SR} = \mathbf{G}^S \mathbf{Q}^V \tag{7}$$

Pro vazebné členy mezi rotující a nerotující částí za použití podmínek rovnováhy a spojitosti deformací platí rovnice

$$\mathbf{q}^{RS} - \mathbf{q}^{SR} = \mathbf{G}^V \mathbf{Q}^V \tag{8}$$

Matice $\mathbf{G}^V$ .je matice dynamických poddajností nelineárních vazebných elementů. Jednou z možností vyjádření této matice je ve tvaru součtu tenzorů hmotnosti, tlumení a tuhosti ve tvaru

$$\mathbf{G}^V = \omega^2\mathbf{M} + \mathrm{i}\omega\mathbf{B} + \mathbf{K} \tag{9}$$

Tuto rovnici lze získat použitím Taylorova rozvoje nelineární funkce vyjadřující síly ve vazbách a rovněž platí pouze pro jednu frekvenční složku odezvy. Výsledný tvar rovnice pro řešení vynuceného ustáleného kmitání se zahrnutím poddajnosti statorové části se získá z rovnic (5), (7) a (8) a má tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{12}^R \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22}^R \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & -\mathbf{G}^S \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & -\mathbf{E} & -\mathbf{G}^V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^R \\ \mathbf{q}^{RS} \\ \mathbf{q}^{SR} \\ \mathbf{Q}^V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v^R \\ \mathbf{q}_v^{RS} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{10}$$

nebo zkráceně ve tvaru, který se zpravidla užívá pro zkrácený zápis soustavy (nelineárních) rovnic

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{11}$$

3. Řešení problému vlastních hodnot

Jak bylo řečeno v úvodu, v obecném případě jsou matice hmotnosti, tlumení, nebo tuhosti nelineární. V takovém případě nelze hovořit o řešení problému vlastních hodnot. V tomto případě se buď předpokládá, že soustava kmitá malými kmity kolem staticky rovnovážné polohy, nebo se v obecnějším případě analyzuje závislost vlastních čísel na amplitudě. V tomto smyslu je nutno chápat řešení problémy vlastních hodnot nelineárních rotorových soustav. Předpokládejme, že rotor není vázán ke statoru žádnými vazbami, je tedy volný, avšak v místech vazeb je zatížen neznámými zobecněnými silovými účinky. Pro odezvu na rotoru a statoru za předpokladu silové rovnováhy a spojitosti posuvů lze psát

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{RS} &= -\mathbf{G}^R\mathbf{Q}^V \\ \mathbf{q}^{SR} &= \mathbf{G}^S\mathbf{Q}^V \\ \mathbf{q}^{RS} - \mathbf{q}^{SR} &= \mathbf{G}^V\mathbf{Q}^V \end{aligned} \tag{12}$$

Výsledný řád matic je obecně dán počtem vazeb mezi rotorem a statorem. Z rovnic (12) se po úpravě obdrží

$$\left(\mathbf{G}^R + \mathbf{G}^S + \mathbf{G}^V\right)\mathbf{Q}^V = \mathbf{O} \tag{13}$$

nebo ve zjednodušeném zápisu

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \tag{14}$$

Aby měla soustava rovnic (14) netriviální řešení, musí být determinant soustavy roven nule, což je současně i návod pro výpočet vlastních hodnot. Je nutno poznamenat, že je poměrně obtížné hovořit o problému vlastních hodnot nelineárních soustav.

4 Výpočet odezvy při přechodovém kmitání

Pohybová rovnice lineární rotorové soustavy s uvážením gyroskopických účinků i materiálového tlumení (není explicitně vyjádřeno) má tvar

$$\mathbf{M}\mathbf{q}^{\cdot\cdot} + \mathbf{B}\mathbf{q}^{\cdot} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \tag{15}$$

Řešení této pohybové rovnice v kroku „t“ s počátečními podmínkami lze napsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{2n} e^{\lambda_i t}\mathbf{v}_i\mathbf{w}_i^T\left[\int_0^t \mathbf{Q}(\tau)e^{-\lambda_i\tau}d\tau + \mathbf{M}\mathbf{q}^{\cdot}(0) + \mathbf{B}\mathbf{q}(0) + \lambda_i\mathbf{M}\mathbf{q}(0)\right] \tag{16}$$

Rovnici (16) lze pak zkráceně přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix}\mathbf{q}^R\\ \mathbf{q}^{RS}\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2n} e^{\lambda_i t}\begin{bmatrix}\mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12}\\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22}\end{bmatrix}_i\left\{\int_0^t\begin{bmatrix}\mathbf{Q}^R(\tau)\\ -\mathbf{Q}^V(\tau)\end{bmatrix}e^{-\lambda_i\tau}d\tau + \begin{bmatrix}\mathbf{a}^R\\ \mathbf{a}^{RS}\end{bmatrix} + \lambda_i\begin{bmatrix}\mathbf{b}^R\\ \mathbf{b}^{RS}\end{bmatrix}\right\} \tag{17}$$

kde $\mathbf{U}_{ij}$ jsou submatice výsledné matice, která se obdrží po diadickém součinu pravostranných a levostranných vlastních vektorů. Předpokládejme, že rotor je „*volný*“, pak má rovnice (17) tvar

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_v^R &= \sum_{i=1}^{2n} e^{\lambda_i t}\left[\mathbf{U}_{11i}\int_0^t \mathbf{Q}^R(\tau)e^{-\lambda_i\tau}d\tau + \mathbf{U}_{11i}\mathbf{a}^R + \mathbf{U}_{12i}\mathbf{a}^{RS} + \lambda_i\mathbf{U}_{11i}\mathbf{b}^R + \lambda_i\mathbf{U}_{12i}\mathbf{b}^{RS}\right]\\ \mathbf{q}_v^{RS} &= \sum_{i=1}^{2n} e^{\lambda_i t}\left[\mathbf{U}_{21i}\int_0^t \mathbf{Q}^R(\tau)e^{-\lambda_i\tau}d\tau + \mathbf{U}_{21i}\mathbf{a}^R + \mathbf{U}_{22i}\mathbf{a}^{RS} + \lambda_i\mathbf{U}_{21i}\mathbf{b}^R + \lambda_i\mathbf{U}_{22i}\mathbf{b}^{RS}\right]\end{aligned} \tag{18}$$

Dosazením (18) do (17) se obdrží

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^R &= \mathbf{q}_v^R - \sum_{i=1}^{2n}\mathbf{U}_{12i}\int_0^t \mathbf{Q}^V(\tau)e^{\lambda_i(t-\tau)}d\tau\\ \mathbf{q}^{RS} &= \mathbf{q}_v^{RS} - \sum_{i=1}^{2n}\mathbf{U}_{22i}\int_0^t \mathbf{Q}^V(\tau)e^{\lambda_i(t-\tau)}d\tau\end{aligned} \tag{19}$$

Zde jsou neznámé veličiny vazbové síly, které se vyskytují v konvolutorním integrálu. Nyní předpokládejme, že v daném kroku jsou tyto síly konstantní. Konvolutorní integrál v časovém kroku „ j “, pro místa na rotoru v rovnici (19) má pak tvar

$$\sum_{i=1}^{2n}\mathbf{U}_{12_i}\int_0^{t_j}\mathbf{Q}^V e^{\lambda_i(t_j-\tau)} = \mathbf{G}_{12}^R\mathbf{Q}_j^V + \sum_{i=1}^{2n}\mathbf{G}_{12_i}\sum_{k=1}^{j-1}\mathbf{Q}_k^V e^{\lambda_i(t_j-t_k)} \tag{20}$$

přičemž dolní indexy u vektoru sil ve vazbách značí čas ve kterém se počítají. Prvky matice $\mathbf{G}$ obsahují modální veličiny, kterými jsou vlastní čísla a vlastní vektory. Odtud je odvozen název této metody „***modální***“. V rovnici (20) dále je

$$\mathbf{G}_{12}^R = \sum_{i=1}^{2n}\frac{\mathbf{U}_{12_i}}{\lambda_i}(e^{\lambda_i\Delta t}-1),\quad \mathbf{G}_{12_i} = \frac{\mathbf{U}_{12_i}}{\lambda_i}(e^{\lambda_i\Delta t}-1) \tag{21}$$

Konvolutorní integrál v rov. (20) je nutno řešit numericky. S nárůstem počtu kroků výpočtu se tak výpočet značně zpomaluje. Nabízí se tak otázka, zda lze sestavit rekurentní vzorec pro výpočet konvolutorního integrálu. Ten bude v dalším uveden. Libovolný konvolutorní integrál lze pro časový krok t_j napsat ve tvaru

$$\mathbf{I}_j = \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{G}_i \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{Q}_k e^{\lambda_i (t_j - t_k)} + \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{G}_i \mathbf{Q}_j = \mathbf{q}_k + \mathbf{G}\mathbf{Q}_j \tag{22}$$

Rovnice (22) se upraví na tvar

$$\mathbf{I}_j = \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{G}_i \left(\sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{Q}_k e^{\lambda_i (t_j - t_k)} + \mathbf{Q}_j \right) = \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{G}_i \mathbf{J}_j \tag{23}$$

kde $\mathbf{J}_j$ značí vektor konvolutorního integrálu v kroku „ j “. V kroku „ $j+1$“ má tento vektor po úpravě tvar

$$\sum_{k=1}^{j} \mathbf{Q}_k e^{\lambda_i (t_{j+1} - t_k)} + \mathbf{Q}_{j+1} = e^{\lambda_i \Delta t} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{Q}_k e^{\lambda_i (t_j - t_k)} + \mathbf{Q}_j \right) + \mathbf{Q}_{j+1} \tag{24}$$

což je rekurentní tvar pro výpočet konvolutorního vektoru, který lze zjednodušeně zapsat ve tvaru

$$\mathbf{J}_{j+1} = e^{\lambda_i \Delta t} \mathbf{J}_j + \mathbf{Q}_{j+1} \tag{25}$$

Rovnici (19) lze pak pro místa na rotoru přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{R} &= \mathbf{q}_v^{R} - \mathbf{q}_k^{R} - \mathbf{G}_{12}^{R} \mathbf{Q}^{V} \\ \mathbf{q}^{RS} &= \mathbf{q}_v^{RS} - \mathbf{q}_k^{RS} - \mathbf{G}_{22}^{R} \mathbf{Q}^{V} \end{aligned} \tag{26}$$

kde jsou neznámé veličiny odezva na rotoru vazbové síly.

Pro odezvu samostatného statoru v místech vazeb s rotorem je možné psát

$$\mathbf{q}^{SR} = \mathbf{q}_v^{SR} + \mathbf{q}_k^{SR} + \mathbf{G}^{S} \mathbf{Q}^{V} \tag{27}$$

kde $\mathbf{G}^S$ je modální matice „samostatného“ statoru.

Vazby mezi rotující a nerotující částí mohou být v obecném případě funkcí kinematických veličin. Jednou z možností pro vyjádření sil ve vazbách mezi rotující a nerotující částí je

$$\mathbf{Q}^{V} = \mathbf{K}(\mathbf{q}^{RS} - \mathbf{q}^{SR}) + \mathbf{B}(\mathbf{q}^{RS^{\cdot}} - \mathbf{q}^{SR^{\cdot}}) + \mathbf{M}(\mathbf{q}^{RS^{\cdot\cdot}} - \mathbf{q}^{SR^{\cdot\cdot}}) \tag{28}$$

kde matice $\mathbf{K}, \mathbf{B}$ and $\mathbf{M}$ jsou obecně závislé na zobecněných výchylkách a rychlostech. Pro rychlosti a zrychlení v časovém kroku výpočtu „ j “ lze použít např. vztahy

$$\mathbf{q}_j^{\cdot} = \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_{j-1}}{\Delta t}, \mathbf{q}_j^{\cdot\cdot} = \frac{\mathbf{q}_j - 2\mathbf{q}_{j-1} + \mathbf{q}_{j-2}}{\Delta t^2} \tag{29}$$

Dosadíme-li do rovnice (28) za rychlost a zrychlení z (29), pro časový krok výpočtu „ j “, se po úpravě obdrží

$$\mathbf{q}^{RS} - \mathbf{q}^{SR} - \mathbf{G}^{V} \mathbf{Q}^{V} = \mathbf{q}_k^{RS} \tag{30}$$

kde

$$\mathbf{q}_k^{RS} = \mathbf{G}^V \left[\left(\frac{\mathbf{B}}{\Delta t} + \frac{2\mathbf{M}}{\Delta t^2} \right) \left(\mathbf{q}_{j-1}^{RS} - \mathbf{q}_{j-1}^{SR} \right) - \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} \left(\mathbf{q}_{j-2}^{RS} - \mathbf{q}_{j-2}^{SR} \right) \right] \tag{31}$$

a dále

$$\mathbf{G}^V = \left(\mathbf{K} + \frac{\mathbf{B}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} \right)^{-1} \tag{32}$$

Výsledný tvar rovnice pro řešení se získá úpravou rovnic (26), (27), (30) a má tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{12}^R \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22}^R \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & -\mathbf{G}^S \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & -\mathbf{E} & -\mathbf{G}^V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^R \\ \mathbf{q}^{RS} \\ \mathbf{q}^{SR} \\ \mathbf{Q}^V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v^R - \mathbf{q}_k^R \\ \mathbf{q}_v^{RS} - \mathbf{q}_k^{RS} \\ \mathbf{q}_v^{SR} + \mathbf{q}_k^{SR} \\ \mathbf{q}_k^V \end{bmatrix} \tag{33}$$

5 Metoda trigonometrických kolokací

Řešení odezvy při vynuceném ustáleném kmitání, které bylo uvedeno v předchozí části příspěvku, kdy se předpokládá buzení i odezvu rovnou celočíselnému násobku otáčkové frekvence. U nelineárních úloh je známo, že v odezvě při buzení jednou harmonickou složkou jsou buzeny subharmonické, ultraharmonické, nebo subultraharmonické složky frekvence buzení. Obecně lze do řešení zahrnout libovolný subharmonický, nebo ultraharmonický násobek základní frekvence buzení.

Jeden z možných algoritmů řešení úloh je ten, kdy je nelineární funkce uvažovaná na pravé straně pohybové rovnice. V některých případech je vhodnější zahrnovat přídavné účinky vazebných elementů na levou straně pohybové rovnice. Je to zejména v případě, kdy jsou známy tenzory přídavných hmotností, tlumení nebo tuhostí. Zahrnutí nelineárních vazebných elementů na levou stranu pohybové rovnice je také výhodné pokud je základem modální metoda, tedy kdy je nutno stanovit matice dynamických poddajností, nebo modální matice nelineárních vazeb. Tuto metodu lze využít i při řešení nelineárních úloh.

5.1 Metoda trigonometrické kolokace v kombinaci s MKP

Buzení soustavy lze vyjádřit buď v reálném, nebo komplexním oboru. V této kapitole bude celá analýza provedena v reálném oboru. Předpokládejme, že buzení je periodické se známými násobky budící frekvence, které lze zapsat jako prvky množiny v s prvky v_j ve tvaru

$$v = \left\{ v_j \right\} = \left\{ 1, 2, 3, \ldots, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}, \ldots, \tfrac{k}{l} \right\} \tag{34}$$

kde $j = 1 \div n$. Budící sílu při zahrnutí statického zatížení tak lze obecně vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_0 + \sum_{j=1}^{n} \left[\mathbf{Q}_{s_j} \sin\left(v_j \omega t \right) + \mathbf{Q}_{c_j} \cos\left(v_j \omega t \right) \right] \tag{35}$$

Řešení pohybové rovnice předpokládejme ve stejném tvaru

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + \sum_{j=1}^{n} \left[\mathbf{q}_{s_j} \sin\left(v_j \omega t\right) + \mathbf{q}_{c_j} \cos\left(v_j \omega t\right) \right] \tag{36}$$

Volba počtu a typu násobků závisí na typu nelinearity vazebného elementu. Nelineární pohybová rovnice s ohledem na aplikaci metody trigonometrické kolokace v rotorových soustavách má tvar

$$\mathbf{M}\mathbf{q}^{\cdot\cdot} + \mathbf{B}\mathbf{q}^{\cdot} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \tag{37}$$

Z rovnice (36) pro rychlost a zrychlení platí

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{\cdot} &= \sum_{j=1}^{n} v_j \omega \left[\mathbf{q}_{s_j} \cos\left(v_j \omega t\right) - \mathbf{q}_{c_j} \sin\left(v_j \omega t\right) \right] \\ \mathbf{q}^{\cdot\cdot} &= \sum_{j=1}^{n} v_j^2 \omega^2 \left[-\mathbf{q}_{s_j} \sin\left(v_j \omega t\right) - \mathbf{q}_{c_j} \cos\left(v_j \omega t\right) \right] \end{aligned} \tag{38}$$

Po dosazení (38), (35) a (36) do (37) a porovnáním členů u stejných neznámých se po úpravě obdrží

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \left[-\mathbf{M} v_j^2 \omega^2 \sin\left(v_j \omega t\right) + \mathbf{B} v_j \omega \cos\left(v_j \omega t\right) + \mathbf{K} \sin\left(v_j \omega t\right) \right] \mathbf{q}_{s_j} &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{Q}_{s_j} \sin\left(v_j \omega t\right) \\ \sum_{j=1}^{n} \left[-\mathbf{M} v_j^2 \omega^2 \cos\left(v_j \omega t\right) - \mathbf{B} v_j \omega \sin\left(v_j \omega t\right) + \mathbf{K} \cos\left(v_j \omega t\right) \right] \mathbf{q}_{c_j} &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{Q}_{c_j} \cos\left(v_j \omega t\right) \end{aligned} \tag{39}$$

přičemž pro přehlednost byl vynechán zápis nelineárních funkčních závislostí u matic hmotnosti, tlumení a tuhosti.

V rovnicích (39) je $(2n+1)$ neznámých, proto s ohledem na řešitelnost je nutno druhé dvě časově závislé rovnice psát nejméně pro n kolokačních časů. Goniometrické funkce jsou pro daný čas a násobek konstanty. Konkrétní časové okamžiky se stanoví rozdělením největší periody ve spektru odezvy na konečný počet hodnot. Jestliže dále označíme

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{s_j} &= -\mathbf{M} v_j^2 \omega^2 \sin\left(v_j \omega t\right) + \mathbf{B} v_j \omega \cos\left(v_j \omega t\right) + \mathbf{K} \sin\left(v_j \omega t\right) \\ \mathbf{C}_{c_j} &= -\mathbf{M} v_j^2 \omega^2 \cos\left(v_j \omega t\right) - \mathbf{B} v_j \omega \sin\left(v_j \omega t\right) + \mathbf{K} \cos\left(v_j \omega t\right) \end{aligned} \tag{40}$$

lze pro k-tý čas t_k psát

$$\mathbf{C}_j^k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{s_j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{c_j} \end{bmatrix}_{t=t_k}, \mathbf{Q}_j^k = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{s_j} \sin\left(v_j \omega t_k\right) \\ \mathbf{Q}_{c_j} \cos\left(v_j \omega t_k\right) \end{bmatrix}, \mathbf{q}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{s_j} \\ \mathbf{q}_{c_j} \end{bmatrix} \tag{41}$$

Pak má pohybová rovnice pro k-tý čas tvar

$$\mathbf{K}^k \mathbf{q}_0 + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{C}_j^k \mathbf{q}_j = \mathbf{Q}_0 + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{Q}_j^k \tag{42}$$

kde výchylka a rychlost $\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k$ jsou výsledné aktuální veličiny v čase t_k. Na základě rovnice (42) se sestaví pro vhodný počet časových okamžiků soustava nelineárních algebraických rovnic.

Velkou výhodou této metody je, že pro popis funkčních závislostí nelineárních vazeb lze použít stejné vztahy jako při řešení přechodového kmitání. Tyto jsou mnohem obecnější, než vztahy pro řešení ustáleného kmitání. Toto je dáno skutečností, že jsou sestavovány pro konkrétní čas t_k a známou polohu a rychlost středu hřídele $\mathbf{q}_k$ a $\dot{\mathbf{q}}_k$.

Nevýhodou této metody je velký řád výsledné matice soustavy, zejména při zahrnutí většího počtu frekvenčních složek.

Popsaný algoritmus lze bez problémů rozšířit i na výpočtové modelování využívající modální transformaci. Ve vztahu (42) se aplikuje modální transformace. Pak zde bude místo matice tuhosti spektrální matice a matici $\mathbf{C}_j^k$ je nutno upravit právě s ohledem na modální transformaci. Výpočet se provádí v hlavních souřadnicích. Zpětnou transformací se obdrží odezva v souřadnicích fyzikálních.

5.2 Metoda trigonometrické kolokace v kombinaci s MDP

S ohledem na aplikaci MDP bude analýza provedena v komplexním oboru. Dále předpokládejme, že „*volná*“ rotorová a statorová soustava jsou lineární a vazebné prvky mezi oběma částmi jsou nelineární. V dalším se zaměřme pouze na řešení ustálené složky odezvy při kmitání kolem známé rovnovážné polohy. Buzení i odezvu soustavy předpokládejme ve tvaru

$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{Q}_{j_{SP}} e^{\mathrm{i}v_j \omega t} + \mathbf{Q}_{j_{PP}} e^{-\mathrm{i}v_j \omega t} \right), \quad \mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{q}_{j_{SP}} e^{\mathrm{i}v_j \omega t} + \mathbf{q}_{j_{PP}} e^{-\mathrm{i}v_j \omega t} \right) \tag{43}$$

Za předpokladu shodných pravostranných a levostranných vlastních vektorů statoru $\mathbf{v}_i^S$ se dynamická poddajnost statoru pro n tvarů kmitu a j-tou složku množiny násobků frekvence buzení vypočítá ze vztahu

$$\mathbf{G}_j^S = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\mathbf{v}_i^S \mathbf{v}_i^{S^T}}{i v_j \omega - \lambda_i} \tag{44}$$

Dynamická poddajnost samostatné „*volné*“ rotorové části odpovídající j-té složce množiny násobků frekvence buzení se stanoví na základě vztahu

$$\mathbf{G}_j^R = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\mathbf{v}_i^R \mathbf{w}_i^{R^T}}{i v_j \omega - \lambda_i} \tag{45}$$

Rozdělením dynamické poddajnosti na submatice, jejichž řád je specifikací míst buzení a místy vazeb mezi rotorem a statorem pro j-tou složku souběžného a protiběžného buzení je

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_j^R \\ \mathbf{q}_j^{RS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{j_{11}}^R & \mathbf{G}_{j_{12}}^R \\ \mathbf{G}_{j_{21}}^R & \mathbf{G}_{j_{22}}^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_j^R \\ -\mathbf{Q}_j^V \end{bmatrix} \tag{46}$$

Za předpokladu, že je řešen „*volný*“ rotor, pro j-tou složku odezvy na rotoru a v místech vazeb se statorem plynou z rovnice (46) vztahy

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{v_j}^{R} &= \mathbf{G}_{j_{11}}^{R}\mathbf{Q}_j^{R}\\ \mathbf{q}_{v_j}^{RS} &= \mathbf{G}_{j_{21}}^{R}\mathbf{Q}_j^{R}\end{aligned} \tag{47}$$

nebo také

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\mathbf{q}_{v_1}^{R}\\ \mathbf{q}_{v_2}^{R}\\ \dots\\ \mathbf{q}_{v_n}^{R}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\mathbf{G}_{1_{11}}^{R} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{2_{11}}^{R} & \dots & \mathbf{0}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G}_{n_{11}}^{R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_1^{R}\\ \mathbf{Q}_2^{R}\\ \dots\\ \mathbf{Q}_n^{R}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\mathbf{q}_{v_1}^{RS}\\ \mathbf{q}_{v_2}^{RS}\\ \dots\\ \mathbf{q}_{v_n}^{RS}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\mathbf{G}_{1_{21}}^{R} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{2_{21}}^{R} & \dots & \mathbf{0}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G}_{n_{21}}^{R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_1^{R}\\ \mathbf{Q}_2^{R}\\ \dots\\ \mathbf{Q}_n^{R}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{48}$$

a zkráceně

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{v}^{R} &= \mathbf{G}_{11}^{R}\mathbf{Q}^{R}\\ \mathbf{q}_{v}^{RS} &= \mathbf{G}_{21}^{R}\mathbf{Q}^{R}\end{aligned} \tag{49}$$

Pro odezvu „*samostatné*“ statorové části v místech vazeb s rotorovou částí platí vztah

$$\begin{bmatrix}\mathbf{q}_{v_1}^{SR}\\ \mathbf{q}_{v_2}^{SR}\\ \dots\\ \mathbf{q}_{v_n}^{SR}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{G}_1^{S} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_2^{S} & \dots & \mathbf{0}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G}_n^{S}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_1^{V}\\ \mathbf{Q}_2^{V}\\ \dots\\ \mathbf{Q}_n^{V}\end{bmatrix} \tag{50}$$

a zkráceně

$$\mathbf{q}_{v}^{SR} = \mathbf{G}^{S}\mathbf{Q}^{V} \tag{51}$$

Pro vazebné členy mezi rotorem a statorem, které mohou tvořit samostatný dynamický subsystém, lze při použití podmínek rovnováhy a kompatibility pohybovou rovnici pro souběžnou precesi psát ve tvaru

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\mathbf{K}-v_j^2\omega^2\mathbf{M}\right)+\mathrm{i}\,v_j\omega\mathbf{B}\right]\left(\mathbf{q}_j^{RS}-\mathbf{q}_j^{SR}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,v_j\omega t} = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{Q}_j^{V}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,v_j\omega t} \tag{52}$$

kde matice $\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{K}$ jsou obecně nelineární funkční závislosti na výchylce a rychlosti Zkráceně lze tuto rovni pro k-tý kolokační čas vyjádřit jako

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{\mathbf{C}}_j^{k}\left(\mathbf{q}_j^{RS}-\mathbf{q}_j^{SR}\right) = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{Q}_j^{V}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,v_j\omega t_k} \tag{53}$$

kde

$$\overline{\mathbf{C}}_j^k = \left[\left(\mathbf{K}^k - v_j^2 \omega^2 \mathbf{M}^k \right) + \mathrm{i}\, v_j \omega \mathbf{B}^k \right] e^{\mathrm{i}\, v_j \omega t_k} \tag{54}$$

Rovnice (53) po detailnějším zápisu pro m kolokačních časů je

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1^1 & \overline{\mathbf{C}}_2^1 & \dots & \overline{\mathbf{C}}_n^1 \\ \overline{\mathbf{C}}_1^2 & \overline{\mathbf{C}}_2^2 & \dots & \overline{\mathbf{C}}_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\mathbf{C}}_1^m & \overline{\mathbf{C}}_2^m & \dots & \overline{\mathbf{C}}_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j^{RS} - \mathbf{q}_j^{SR} \\ \mathbf{q}_2^{RS} - \mathbf{q}_2^{SR} \\ \dots \\ \mathbf{q}_n^{RS} - \mathbf{q}_n^{SR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, v_1 \omega t_1} \mathbf{E} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, v_2 \omega t_1} \mathbf{E} & \dots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, v_n \omega t_1} \mathbf{E} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, v_1 \omega t_2} \mathbf{E} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, v_2 \omega t_2} \mathbf{E} & \dots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, v_n \omega t_2} \mathbf{E} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, v_1 \omega t_m} \mathbf{E} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, v_2 \omega t_m} \mathbf{E} & \dots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, v_n \omega t_m} \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^V \\ \mathbf{Q}_2^V \\ \dots \\ \mathbf{Q}_n^V \end{bmatrix} \tag{55}$$

Rovnici (55) lze zapsat ve tvaru,

$$\overline{\mathbf{C}}^V \left(\mathbf{q}^{RS} - \mathbf{q}^{SR} \right) = \mathbf{D}\mathbf{Q}^V \tag{56}$$

Členy obdélníkové matice $\mathbf{D}$ jsou pro konkrétní kolokační časy čísla. Po úpravě má (56) tvar

$$\left(\mathbf{q}^{RS} - \mathbf{q}^{SR} \right) = \mathbf{G}^V \mathbf{Q}^V \tag{57}$$

kde

$$\mathbf{G}^V = \overline{\mathbf{C}}^{V+} \mathbf{D} \tag{58}$$

Výsledná rovnice pro řešení vynuceného ustáleného kmitání s využitím rovnic (49), (51) a (58) má po úpravě tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{12}^R \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22}^R \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & -\mathbf{G}^S \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & -\mathbf{E} & -\mathbf{G}^V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^R \\ \mathbf{q}^{RS} \\ \mathbf{q}^{SR} \\ \mathbf{Q}^V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v^R \\ \mathbf{q}_v^{RS} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{59}$$

což je soustava nelineárních rovnic algebraických rovnic.

Poznámka

Celkový algoritmus řešení odezvy při vynuceném ustáleném kmitání metodou trigonometrické kolokace je následující:

- Výpočet modálních vlastností „*volných*" rotorových soustav.
- Výpočet modálních vlastností „*samostatné*" statorové soustavy, nebo jejich stanovení experimentálně.
- Výpočet odezvy „*volné*" rotorové soustavy.
- Sestavení matice soustavy a pravé strany pro řešení soustavy nelineárních rovnic, přičemž v každém kroku iterace a konkrétní kolokační čas je nutno sestavit výslednou odezvu a rychlost, na základě kterých se stanoví přídavné hmotnosti, tlumení a tuhost nelineárních vazeb.

6. Algoritmus řešení rotorových soustav

Jedna z možností analýzy dynamických vlastností rotorových soustav je založena na syntéze subsystémů. Na aplikaci tohoto přístupu byl z velké části zaměřen příspěvek. Postup sestavení výpočtových modelů, včetně úloh je uveden zejména v (Malenovský, E. 1999, Malenovský, E. 2004, Malenovský, E. 2002).

Přídavné účinky dynamického subsystému, který je mezi rotující a nerotující částí lze v podstatě zahrnout (přidat) k celé rotorové soustavě dvěma způsoby.

První způsob je založen na výpočtu sil, které se přidávají na pravou stranu pohybové rovnice. V tomto případě je řešena celá rotorová soustava kompletně, včetně např. tekutinového subsystému. Výpočtový model vnitřních sil působících na hřídel vychází zpravidla z jednoduchého matematického modelu. Časová náročnost výpočtu by měla být co nejmenší, čemuž odpovídají i modely nelineárních vazeb.

Druhá možnost je, zahrnout dynamické účinky nelineárních vazebných elementů na levou stranu pohybové rovnice. S ohledem na její tvar je vhodné, znát matice hmotnosti, tlumení a tuhosti, a tyto přidávat k maticím, které jsou sestaveny pouze pro samostatnou hřídelovou část. Pokud by tyto přídavné účinky byly závislé na několika parametrech, je simultánní výpočet s ohledem na algoritmus i časovou náročnost téměř nemožný. Pokud by však byly funkcí např. pouze jednoho parametru, jejich zahrnutí by bylo poměrně snadné. Navíc, pokud by bylo možno provést analýzu dynamických vlastností příslušného subsystému ve vhodném programovém prostředí, lze použít i kvalitní matematický model dobře popisující jeho reálné chování. Např. v případě hydrodynamického subsystému (kluzná ložiska, tlumiče, spáry atd.), by byl vhodný výpočtový systém zaměřený na hydrodynamiku, obecně CFD (Computational Fluid Dynamics), např. FLUENT. Dále např. v případě elektromechanických vazeb by bylo vhodné provádět analýzu ve výpočtovém prostředí, který je vhodný na úlohy elektrotechniky (ANSYS s moduly vhodnými na úlohy elektrotechniky).

Ve všech těchto případech by však bylo vhodné, aby výpočtový model závisel pouze na jednom parametru, v případě rotorových soustav na poloze středu hřídele. K dosažení tohoto cíle je nutno pro sestavení výpočtového modelu použít speciální transformace. Několik takových transformací navrhl Pochylý (VUT FSI Brno). Analýza dynamických subsystémů pak spočívá ve výpočtu databáze přídavných účinků pro daný parametr, jak již bylo uvedeno v případě rotorových soustav např. pro polohu středu hřídele. Přehled matematických i výpočtových modelů včetně transformačních vztahů pro kluzná ložiska, hydrodynamické tlumiče, těsnící spáry atd., je uveden např. v (Malenovský, E., Pochylý, F. 2001, Malenovský, E., Pochylý, F., Klas R. 2003).

V případě, že je prováděna výpočtová simulace, resp. řešení v časové oblasti, např. metodou přímé integrace, tak se pro danou polohu středu hřídele přidávají k hřídelové části matice přídavných účinků. V obecném případě matice hmotnosti, tlumení a tuhosti. Nová poloha v daném časovém okamžiku, se pro dané buzení nalezne iteračním postupem. Téměř stejný algoritmus lze využít pro výpočet odezvy při konstantních i proměnných otáčkách. V případě horizontálně uložených rotorů je nutné nejdříve nalézt staticky rovnovážnou polohu.

Poněkud odlišný přístup je nutno zvolit v případě řešení odezvy při vynuceném ustáleném kmitání. Pokud se předpokládá trajektorie blízká kruhové a rotor kmitá malými kmity kolem staticky rovnovážné polohy, lze použít databázi, ve které je poloha středu hřídele dána pouze amplitudou kmitání. Tento přístup lze použít zejména v případě harmonického buzení a za předpokladu i harmonické odezvy. Obdobně je tomu u svislých rotorových soustav, kdy se neuvažuje staticky rovnovážná poloha.

V případě řešení periodické odezvy ustáleného kmitání, nebo i v případě kmitání nelineárních rotorových soustav s různými násobky budící frekvence, pokud se využívá vytvořená databáze přídavných účinků, je možné pro řešení odezvy vynuceného ustáleného kmitání použít pouze metodu trigonometrických kolokací. Rozdělením největší periody na diskrétní časové okamžiky je v podstatě dána i poloha středu hřídele. Zde, časově závislé složky polohy, které jsou závislé na funkcích $\sin(k\omega t)$, $\cos(k\omega t)$, resp. $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} k\omega t}$, jsou pro daný kolokační čas stanoveny explicitně. Pak také jsou pro daný kolokační čas (kolokační polohu) stanoveny matice přídavných účinků. K výpočtu amplitud jednotlivých násobků budící frekvence je nutno použít iterační procedury. Dosavadní zkušenosti naznačují poměrně značnou numerickou nestabilitu, zejména v případech řešení více násobků a také v případech kdy vyšší násobky mají podstatně menší amplitudy ve srovnání s amplitudou na prvním násobku. Rovněž se zde ukazuje i závislost (numerická nestabilita) na volbě kolokačních časů.

Obecně však velkou výhodou kolokační metody v dynamice je možnost použití časově závislých přídavných účinků i pro analýzu odezvy vynuceného ustáleného kmitání.

7. Technické aplikace

Uvedené metody byly testovány a porovnávány na celé řadě modelových úloh. Po důkladném otestování byly rovněž použity při řešení úloh technické praxe. Při řešení téměř všech úloh byla sestavena celá řada výpočtových modelů na různé rozlišovací úrovni. Tento postup je nutný pro analýzu a zahrnutí všech podstatných parametrů, které ovlivňují řešení. Zde budou pouze přehledově ukázány některé technické úlohy.

7.1 Malé vodní elektrárny 5KM98-600 a 5KM98-500

Oba typy malých vodních elektráren mají vždy dvě soustrojí s kaplanovými turbinami. schéma je na obr. 2, výpočtové schéma pak na obr. 3.

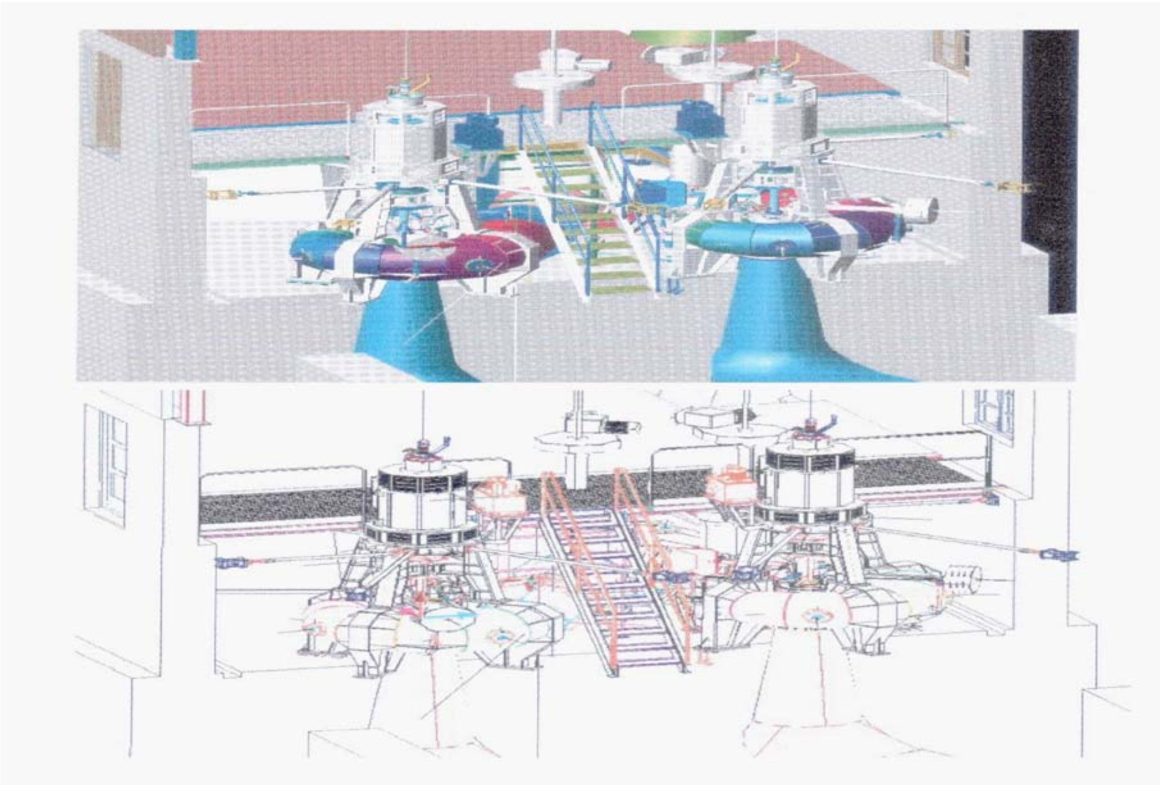
Hřídelová část je koaxiální, přičemž vnitřní hřídel se neotáčí a slouží pouze pro regulaci natáčení lopatek turbiny. Výpočtový model zahrnoval i poddajnou vazbu soustrojí na základní těleso.

Výpočty zahrnovaly analýzu modálních vlastností, Campbellův diagram a odezvu při vynuceném ustáleném kmitání při buzení jak nevývahou, tak s buzením na frekvenci, která odpovídala páté harmonické složce s ohledem na počet rotorových lopatek.

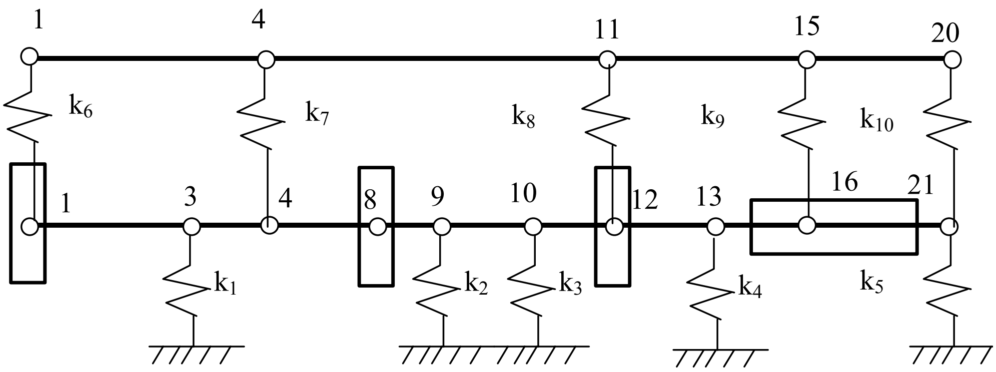
U zákazníka přímo na elektrárně byla prováděna experimentální analýza, která potvrdila výsledky výpočtového modelování. Na základě výpočtového modelování byla totiž navržena řada úprav.

7.2 Letecký motor AI-25

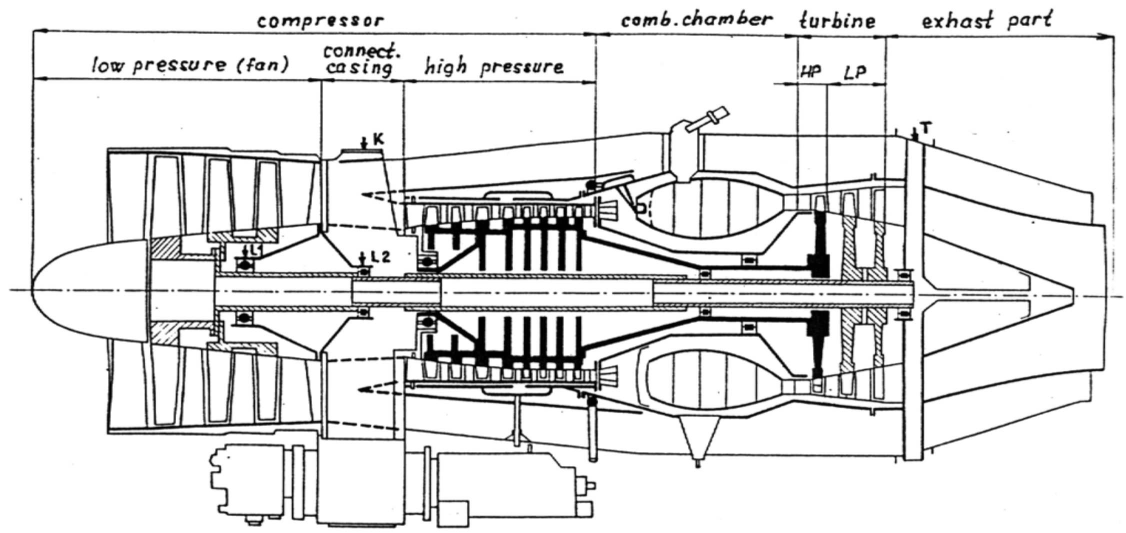
Letecký motor je dvouhřídelový s koaxiálními hřídeli a dvouproudý. Schéma motoru je na obr. 4 a výpočtový model na obr. 5. Oba rotory mají rozdílné otáčky. Pro analýzu tohoto typu rotorových soustav byl vyvinut zvláštní software. Podstatou modelu je opět syntéza dílčích dynamických subsystémů, kterými jsou v tomto případě dva rotory a stator poddajně vázán ke křídlu letadla. Výpočtový model následně umožňoval analýzu modálních vlastností, ustálené odezvy i pro výpočtovou simulaci. I zde je nutno připomenout, že se jedná o nelineární dynamický systém, tedy řešení problému vlastních hodnot postrádá smysl. U leteckého motoru byla provedena analýza modálních vlastností pro danou ustálenou složku odezvy.



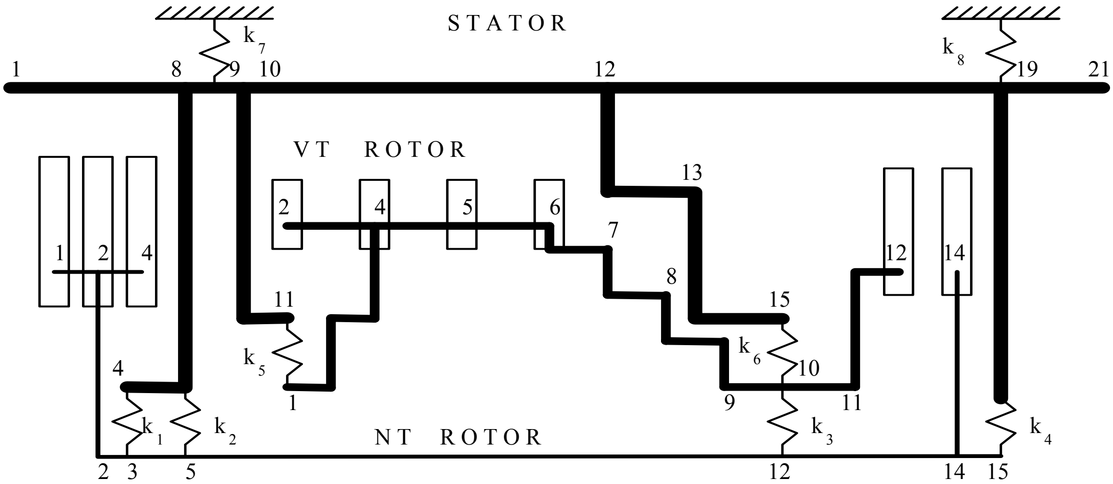
Obr. 2 Dispoziční uspořádání malé vodní elektrárny



Obr. 3 Výpočtový model turbiny malé vodní elektrárny



Obr. 4 Schéma leteckého motoru



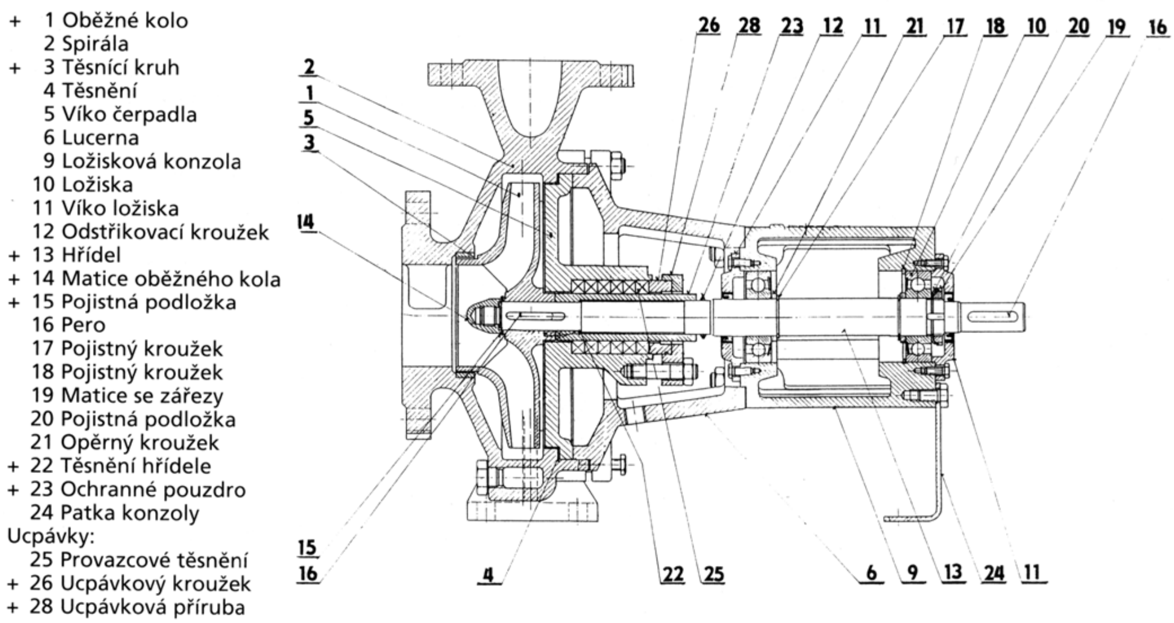
Obr. 5 Výpočtový model motoru

U tohoto leteckého motoru docházelo často k haváriím spojených s kontaktem mezi rotující a nerotující částí.

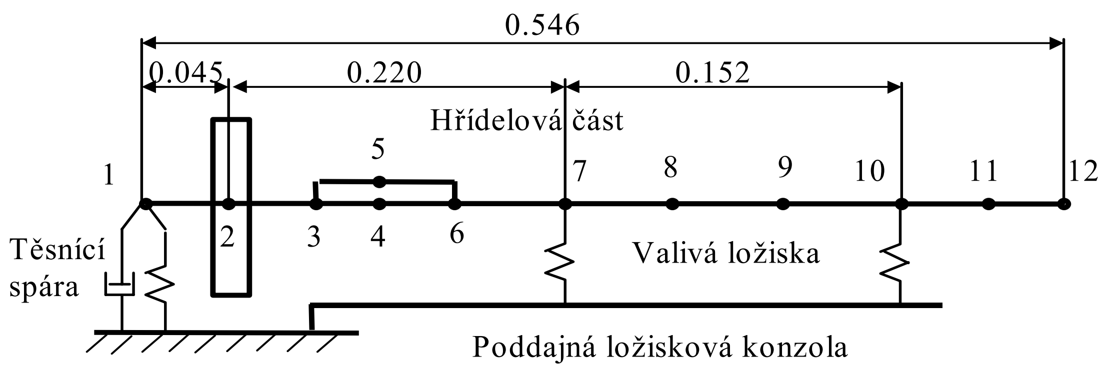
Výsledky výpočtového modelování ukázaly na nevhodnou polohu umístění hydrodynamického tlumiče, kde se nachází uzlový bod kmitání celé soustavy a zejména při relativním pohybu obou hřídelů. ten pak neplní svoji funkci. Vlastní frekvence tohoto tvaru kmitu se nachází v pásmu provozních otáček V takovém případě je tlumič málo funkční a neutlumí kmitání vybuzené nevývahou. Obdobný model byl sestaven pro analýzu podobného leteckého motoru DV2.

7.3 Univerzální čerpadlo tekutin řady BETA

Jedná se o univerzální čerpadlo jak pro čerpání pitné vody, ale také např. pro čerpání např. nafty. Schéma motoru je na obr. 6 a výpočtový model na obr. 7. S ohledem na možnost dodávky do zemí postižených častými zemětřesením byl prvořadým požadavkem prokázat výpočtovým modelováním seismickou odolnost. Kompletní čerpadlo bylo k dispozici na VUT FSI v Brně a bylo možno provést kompletní experimentální analýzu dynamických vlastností jak za klidu tak i za provozu a následně provést porovnání s výpočtovým modelováním.



Obr. 6 Schéma čerpadla



Obr. 7 Výpočtový model čerpadla

Experimentální analýza samostatné statorové části (zejména konzoly) umožnila stanovit modální vlastnosti. V tomto případě bylo čerpadlo smontováno bez hřídelové části. Modální vlastnosti pak bylo možno přidat k výpočtovému modelu a provést poměrně rozsáhlou výpočtovou analýzu dynamických vlastností celého čerpadla. Navíc zde byla možnost provést analýzy modálních vlastností samostatné statorové části (konzoly) i celého čerpadla v systému ANSYS. Zde byly získány cenné poznatky týkající se modelování dynamických vazeb různého typu, které se vyskytují v rotorové soustavě daného typu. Dále byla prováděna rozsáhlá experimentální analýza čerpadla za rotace.

7.4 Napájecí čerpadlo řady CND

Schéma čerpadla je na obr. 8 a výpočtový model na obr. 9. Na obrázku 8 je starší typ, který byl inovován. U nově navrženého typu čerpadla byl jiný počet oběžných kol a došlo ke konstrukčním úpravám ložiskových konzol.

Cílem výpočtové analýzy bylo zejména prokázat, zda během provozu při pomalé změně otáček (odezva při vynuceném ustáleném kmitání) je amplituda kmitání hřídele v přijatelných mezích daných normou ISO.

Stěžejním místem ovlivňujícím dynamické vlastnosti, zejména modální, se ukázal konstrukční uzel ložiskové konzoly, tedy zejména její dynamická poddajnost. Za účelem zjištění modálních vlastností byl proveden experiment i výpočtová analýza v systému ANSYS. Protože se jednalo o nový konstrukční návrh, byl jak výpočet, tak i experiment proveden nejdříve na starší konzole. V tomto případě se jednalo pouze o analýzu možností výpočtového modelování. V případě modelu nové konzoly tak bude velká záruka, že výpočtový model bude správný. Poté byla provedena výpočtová analýza modálních vlastností nové konzoly.

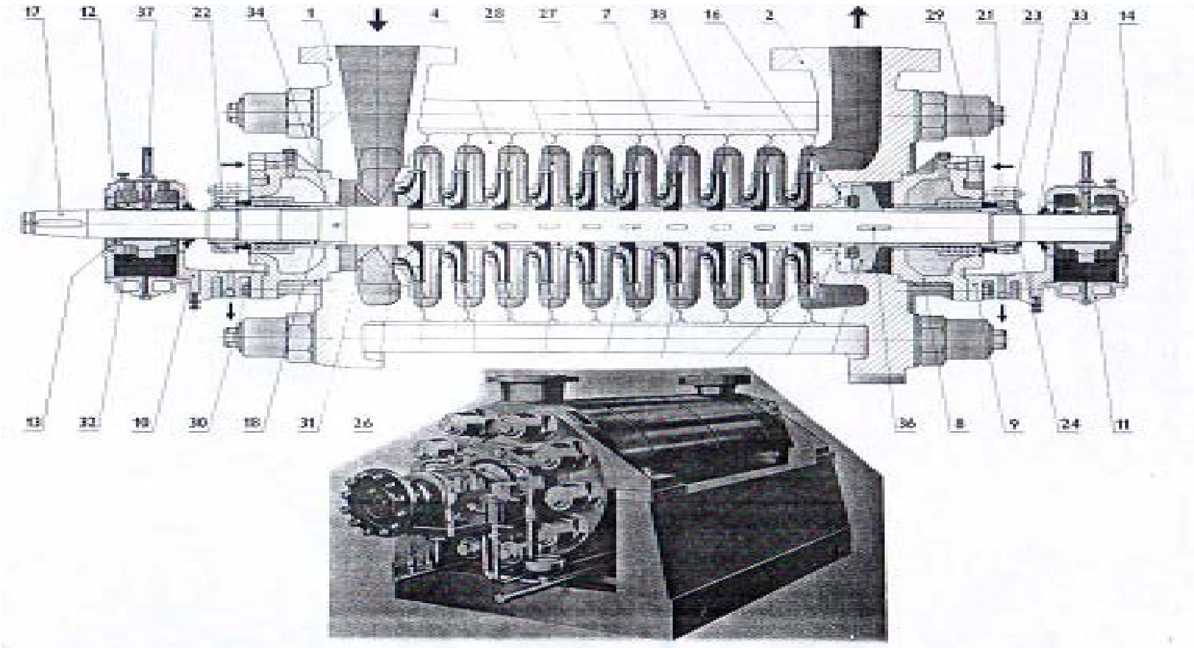
Výpočtový model celého čerpadla pak zahrnoval výsledky analýzy několika dílčích subsystémů, zejména spár, ložisek a poddajných konzol.

7.5 Čerpadlo na tekuté soli

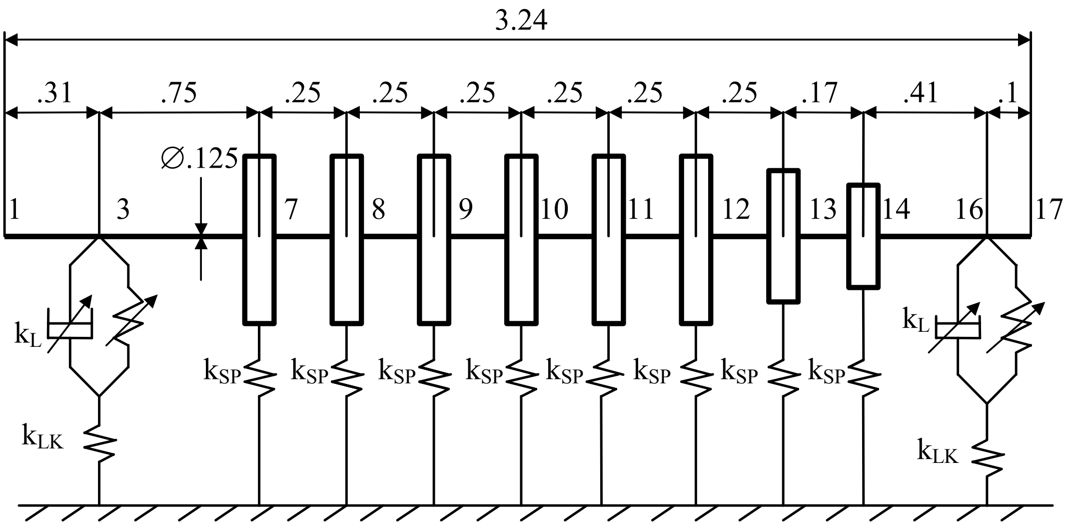
Jedná se o významné technické dílo. Čerpadlo lze využít pro zpracování jaderného odpadu a zkrátit tak poločas jeho rozpadu. Schéma motoru je na obr.10 a výpočtový model na obr. 11. Unikátnost také spočívá v systému práce při návrhu. Nejdříve byla provedena řada prací spojených s výpočtovým modelováním, na kterém se podílela řada podniků a institucí. Kromě jiného směřovaly tyto práce k analýze dynamických vlastností čerpadla za rotace. Experimentální analýza byla provedena u samostatné hřídelové části, u čerpadla bez tekutiny, u čerpadla s vodou při pokojové teplotě a nakonec s tekutou solí při teplotě cca $400^0 C$.

Výpočtová analýza byla prováděna na několika úrovních, byla prováděna na několika pracovištích a zahrnovala několik vědních oborů. Byla příkladem interdisciplinárního přístupu k analýze zařízení využívající novou technologii.

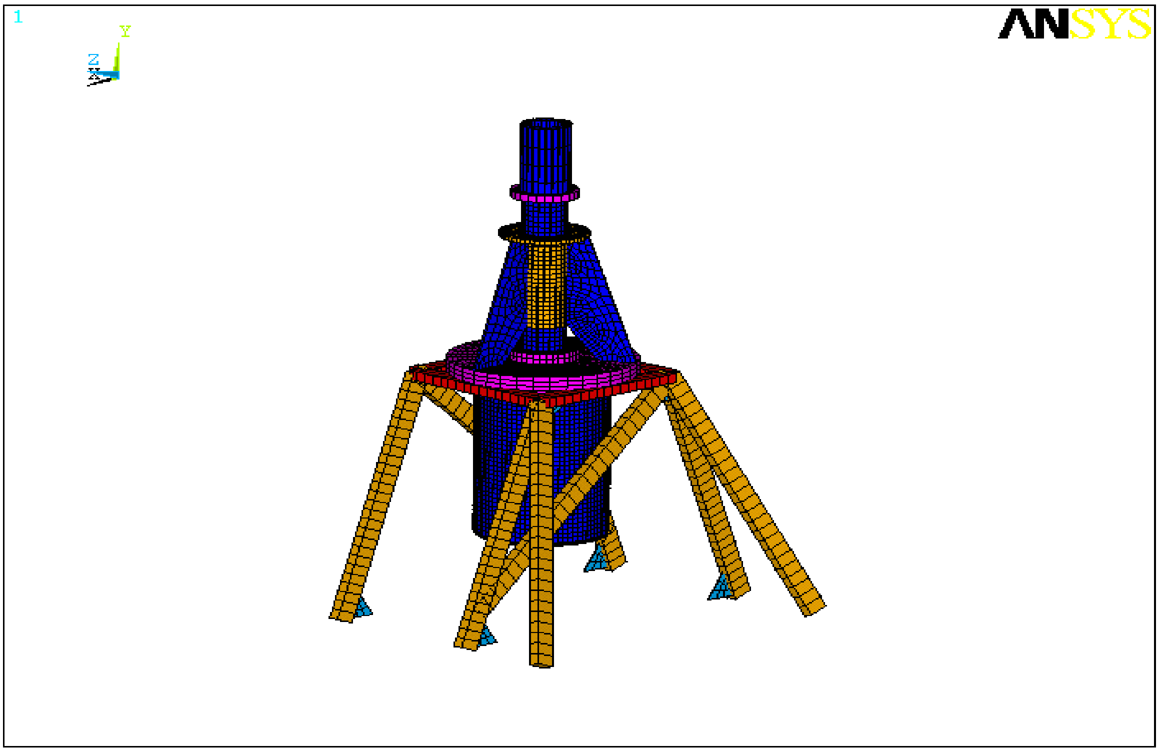
Cílem výpočtového modelování dynamických vlastností rotorové soustavy bylo stanovit modální vlastnosti za rotace a odezvu při vynuceném ustáleném kmitání. Několikaletý sled prací vyústil v návrh čerpadla, které při provozních podmínkách splnilo nejpřísnější normy ISO.



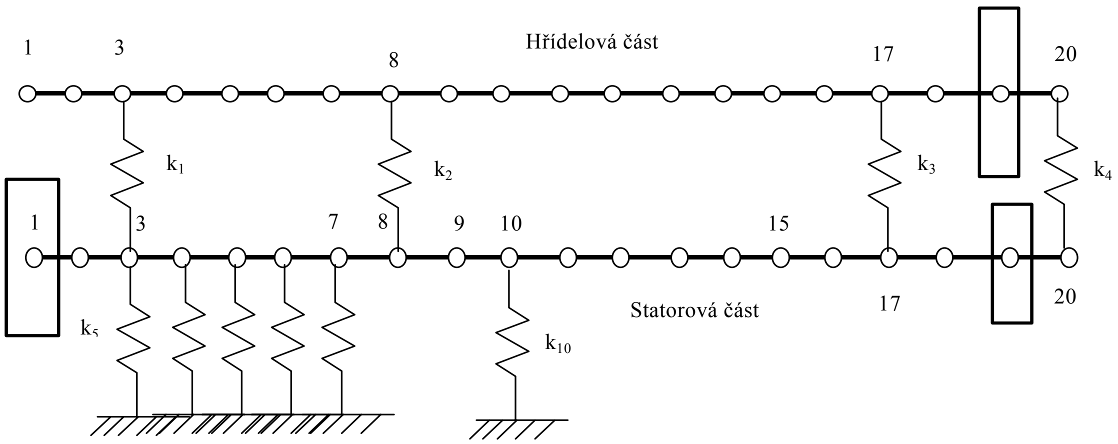
Obr. 8 Schéma čerpadla



Obr. 9 Výpočtový model čerpadla



Obr. 10 Schéma čerpadla



Obr. 11 Výpočtový model čerpadla

8. Závěr

V příspěvku je zejména uveden nový přístup k výpočtovému modelování dynamických vlastností složitých rotorových soustav. Nový přístup je založen na syntéze dynamických subsystémů. Dynamické vlastnosti dynamických subsystémů lze stanovit s využitím jak výpočtového tak i experimentálního modelování.

Přehled metod a možností výpočtového modelování zahrnuje všechny požadované dynamické vlastnosti, ve smyslu normy ISO, které musí splňovat každý výrobek. Právě možnost syntézy dynamických vlastností různých subsystémů stanovených jak na základě výpočtu, tak i experimentu dává zcela nový pohled na možnosti výpočtového modelování.

Výpočtové modelování je pouze jednou z možností analýzy dynamických vlastností.a nelze je přeceňovat, ale ani podceňovat. Dobré vstupní parametry do výpočtového modelu, které dobře vystihují reálné chování dynamické soustavy dávají předpoklad tomu, že i výsledky výpočtového modelování budou ve shodě s chováním reálné rotorové soustavy.

9. Literatura

Föppl, A. (1895) *Das Problem der Lavalschen Turbinewelle*. Civilingenieur, 41, pp. 332–342.

Rao, J. S., Sreenivas, R., Chawla, A. (2002) Analytical and Experimental Investigations on Misaligned Rotors. DD-ABS-25, *Proc. of Conference Isromac 9*, pp. 158-165.

Stodola, A. (1905) *Steam Turbines*. D. Van Nostrand Company, New York. (Překlad německého vydání z roku 1903).

Stodola, A. (1910) *Dampf und Gasturbinen*. Springer Verlag, Berlin.

Holzer, H. (1921) *Die Berechnung der Drehschwingungen*. Springer Verlag OHG, Berlin.

Miklestad, N. (1944) A New Method for Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibrations of Airplane Wings and Other Types of Beams. *Journal of Aeronautical Science*, 11, pp. 153-162.

Prohl, M. (1945) A General Method for Calculating Critical Speed of Flexible Rotors. *Journal of Applied Mechanics*, pp. A142-A148.

Lund, J., Orcutt, F. (1967) Calculations and Experiments on the Unbalanced Response of a Flexible Rotor. *Journal of Engineering for Industry*, pp. 785-796.

Lund, J. (1974) Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings. *Journal of Engineering for Industry*, Ser. B., 96 (2), pp. 509-517.

Gupta, K., D., Gupta K., Rao, J., S., Bhaskara Sarma, K., V. (1988) Dynamic Response of A Dual Rotor System by Extended Transfer Matrix Method. *Proc. of Int. Conf. Vibrations in Rotating Machinery.* Inst. Mech. Engrs. p. 599.

Ruhl, R., L., Booker, J., F. (1972) A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor System. *Journal of Engineering for Industry*, Trans. ASME, vol. 94, p. 126.

Nelson, H., D., McVaugh, J., M. (1976) The Dynamics Rotor Bearing Systems Using Finite Elements. *Journal of Egineering for Industry*, Trans. ASME, vol. 98, p. 593.

Zorzi, E., S., Nelson, H., D. (1997) Finite Element Simulation of Rotor-Bearing System with Internal damping. *Journal of Engineering for Power*, Transactions of the ASME, January, pp.. 71-76.

Malenovský, E. (1999) Výpočtové modelování dynamických vlastností nelineárních rotorových soustav. *Inženýrská mechanika*, roč. 6, str. 411-426.

Malenovský, E., Pochylý, F. (2001) Some Results of Computational Modelling of Dynamic Behaviours of Journal Bearings by the Bézier Body Application. *Journal of Mechanical Engineering* Vol. 52, Nr. 4, pp. 235–258.

Malenovský, E. (2004) Using the Modal and Trigonometric Collocation Methods in Rotor Dynamic Systems. *Journal of Sound and Vibrations,* Vol. 126, April pp. 229-234.

Malenovský, E. (2002) Using the Modal in Rotor Dynamic Systems. *International Journal of Rotating Machinery*. Vol. 9, No.3, pp. 181-196.

Malenovský, E., Pochylý, F., Klas R. (2003) Contribution to the theoretical, computational and experimental analysis of Taylor in thin fluid film. *Journal of mechanical Engineering*. Vol. 54, Nr. 5-6, pp. 307–326.