



GENERALIZED FORMULATION OF CAM CLAY MODEL

T. Janda*, M. Šejnoha*

Summary: *In this contribution, a generalized Cam clay model for soil materials is introduced. This critical state model reduces high dilatation and softening behaviour of overconsolidated soils which occurs in classical Cam clay model formulation. More realistic response of the model is achieved by introducing a new yield function in dilatation domain i.e. for $OCR > 2$. Further, the dependency of the yield function to the Lode's angle is adopted and non-associated flow rule is assumed. Finally, the reduction of hardening modulus is shown in comparison to the classical Cam clay model formulation.*

1 Úvod

S rozvojem numerického modelování v geotechnice nachází praktické uplatnění materiálové modely dříve charakteru spíše teoretického. K takovým patří modely kritického stavu přehledně představené v (Potts & Zdravkovic, 1999), mezi které náleží model Cam clay. Pro normálně konsolidované či lehce překonsolidované zeminy dává tento model dobré výsledky, avšak pro silně překonsolidované zeminy klasická formulace modelu Cam clay přeceňuje jak dilatační chování materiálu tak jeho změkčení. V navrhovaném zobecněném modelu Cam clay jsou tyto nedostatky redukovány zavedením jiné plochy plasticity v oblasti $OCR > 2$. Závěrem je uveden průběh modulu plastického zpevnění pro zobeněnou i klasickou formulaci.

2 Materiálové modely zemin

Popisujeme-li zeminu jako kontinuální materiál, je třeba respektovat, že se i v nejjednodušší podobě jedná o minimálně dvojfázový systém. Zavedením Terzaghiho koncepce efektivních napětí (Terzaghi et al., 1995)

$$\sigma_{tot} = \sigma_{eff} - p. \quad (1)$$

se vymezí napětí působící na zrna zeminy. V dle této koncepce jsou všechny dále uvedené konstitutivní vztahy uvedeny ve smyslu efektivních napětí. Modely izotropních materiálů, mezi které zeminy ve většině případů patří, lze s výhodou formulovat v inavriantech napětí. Prvním invariantem je střední napětí

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_{ii}}{3}. \quad (2)$$

*Ing. Tomáš Janda, Doc. Michal Šejnoha, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, tel: (+420) 224 354 498, e-mail: tomas.janda@fsv.cvut.cz

Druhým invariantem je deviátor napětí definovaný vztahem

$$J = \sqrt{\frac{1}{6}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}}, \quad (3)$$

a v roli třetího invariantu vystupuje Lodův úhel

$$\vartheta = \arctan \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 \right) \right]. \quad (4)$$

2.1 Mohr-Coulombův model

Klasickým pružno-plastickým materiálovým modelem používaným v geotechnice je Mohr-Coulombův model plastického porušení. Podmínka porušení

$$\tau_f = c - \sigma_f \tan \varphi \quad (5)$$

dává v prostoru hlavních napětí vzniknout ploše plasticity ve tvaru nepravidelného šestibokého jehlanu, kterou definuje funkce plasticity

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}) = J + \left(\sigma_m - \frac{c}{\tan \varphi} \right) g(\vartheta) = 0, \quad (6)$$

kde směrnice funkce plasticity g závisí na Lodově úhlu dle vztahu

$$g(\vartheta) = \frac{\sin \varphi}{\cos \vartheta + \frac{\sin \vartheta \sin \varphi}{\sqrt{3}}}. \quad (7)$$

Model dobře popisuje chování zejména písků a ulehých jílovitých zemin. Již méně se hodí pro popis spraší a kolapsibilních jíků.

Nedostatkem modelu je nerealistická předpověď objemových deformací doprovázející smykové přetvoření materiálu. V případě, že je uvažován asociovaný zákon plastického tečení, nadhodnocuje model objemovou deformaci, která je navíc stále rostoucí nehledě na velikost smykového přetvoření. Zavedením plastického potenciálu s tečnou $g_{pp} < g$ se sice odstraní problém nadhodnocované předpovědi objemové deformace, ale ta stále zůstává rostoucí pro všechny případy plastického přetvoření, což jistě neodpovídá pozorování.

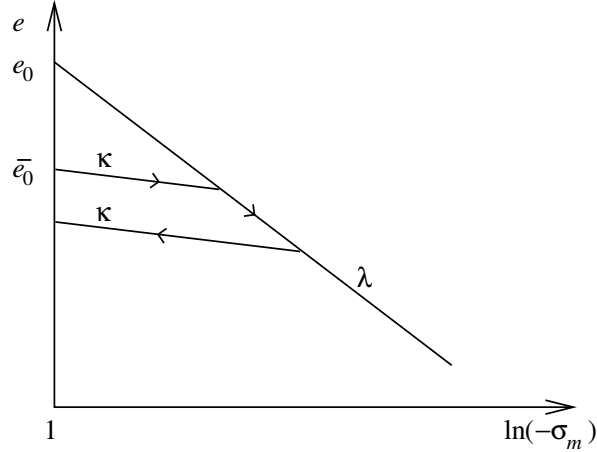
Další omezení Mohr-Coulombova modelu spočívá v otevřené ploše plasticity. Je patrné, že pro jisté směry zatěžování (např. pro zatížení izotropní napjatostí) není plochy plasticity dosaženo pro libovolně vysokou napjatost. Tento fakt nabývá na důležitosti zejména při popisu vlastností méně ulehých zemin.

3 Modely kritického stavu

Odstraňování nevýhod modelu Mohr-Coulomb vedlo na formulování pružno-plastických modelů kritického stavu (Potts & Zdravkovic, 1999). Hlavním rysem této skupiny materiálových modelů je uzavřená plocha plasticity. Ta způsobuje, že pro každý směr zatěžování existuje mez plasticity. Dalším společným znakem modelů kritického stavu je možnost předpovídat kladné i záporné objemové deformace.

3.1 Model Cam clay

Jedním ze prvních modelů kritického stavu je model Cam clay představený v (Roscoe at al., 1958). V současnosti se častěji používá jeho modifikovaná varianta s eliptickou plochou plasticity (Roscoe & Burland, 1968).



Obrázek 1: Model Cam clay – diagram izotropní konsolidace

Základním konstitutivním vztahem je bilineární diagram izotropní konsolidace (Obr. 1) definovaný vztahy

$$e = e_0 - \lambda \ln(-\sigma_m) \quad \text{– linie prvotní konsolidace,} \quad (8)$$

$$e = \bar{e}_0 - \kappa \ln(-\sigma_m) \quad \text{– linie odtížení a rekonsolidace,} \quad (9)$$

kde $e = V_p/V_s$ je číslo pórovitosti zeminy dané objemem pórů k objemu zrn. Za předpokladu, že zrna zeminy jsou objemově nestlačitelná lze bilineární diagram vzjádřit ve formě pro objemovou deformaci

$$\varepsilon_v = -\lambda^* [\ln(-\sigma_m) - \ln(-\sigma_m^{init})], \quad (10)$$

$$\varepsilon_v = -\kappa^* [\ln(-\sigma_m) - \ln(-\sigma_m^{init})], \quad (11)$$

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{e+1}, \quad \kappa^* = \frac{\kappa}{e+1}. \quad (12)$$

Plocha plasticity (Obr. 2) je elipsa daná předpisem

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}) = \frac{J^2}{M_{cs}^2} + \sigma_m^2 + \sigma_m p_c = 0, \quad (13)$$

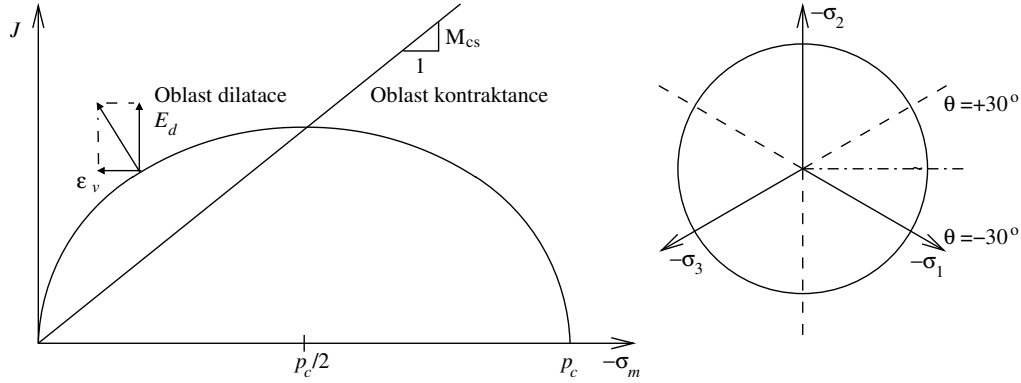
kde $p_c > 0$ je nejvyšší tlak (preconsolidation pressure), kterému byl skelet zeminy vystaven. Směrnice linie kritického stavu M_{cs} závisí na úhlu vnitřního tření při kritickém objemu φ_{cv} a pohybuje se mezi hodnotami

$$M_{cs}^{-30^\circ}(\varphi_{cv}) = \frac{2\sqrt{3} \sin \varphi_{cv}}{3 - \sin} \quad \text{pro triaxiálovou kompresi,} \quad (14)$$

$$M_{cs}^{+30^\circ}(\varphi_{cv}) = \frac{2\sqrt{3} \sin \varphi_{cv}}{3 + \sin} \quad \text{pro triaxiálovou extenzi,} \quad (15)$$

$$(16)$$

Modelu dobře vystihuje vlastnosti normálně konsolidovaných popřípadě lehce překonsolidovaných zemin a to včetně materiálů málo ulehých. Horší chování modelu je pozorováno při snaze modelovat smykání významně překonsolidovaných zemin. V těchto podmínkách model nadhodnocuje objemové deformace proti pozorovaným deformacím.



Obrázek 2: Model Cam clay – funkce plasticity

4 Zobecněný Cam-clay model

Snaha odstranit zmíněný nedostatek klasické formulace modelu Cam clay vede na úpravu funkce plasticity a plastického potenciálu v oblasti dilatačního chování zeminy, tj. v oblasti $-\sigma_m < p_c/2$. Jak již bylo předesláno v úvodu, ve zobecněném modelu Cam clay je zavedena funkce plasticity (Obr. 3) složená ze dvou hladce navazujících ploch daných předpisem

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}) = \begin{cases} F_c, & \text{pro } \sigma_m \leq -p_c/2 \quad (\text{oblast komprese}), \\ F_d, & \text{pro } \sigma_m > -p_c/2 \quad (\text{oblast dilatance}), \end{cases} \quad (17)$$

$$F_c = \frac{J^2}{g^2} + \sigma_m^2 + \sigma_m p_c, \quad (18)$$

$$F_d = \frac{J^2}{\tilde{g}^2} - \sigma_m^2 + (-\sigma_m)^{(1+\alpha)} \tilde{p}_c^{(1-\alpha)}, \quad (19)$$

Návaznost obou částí funkce plasticity v jejím vrcholu zaručuje volba

$$\alpha = \frac{2}{1 - \left(\frac{\sin \varphi_{cv}}{\sin \varphi} \frac{3 - \sin \varphi}{3 - \sin \varphi_{cv}} \right)^2} - 1, \quad (20)$$

$$\tilde{p}_c = 2 \left(\frac{2}{1 + \alpha} \right)^{\left(\frac{1}{1-\alpha} \right)} p_c \quad (21)$$

kde φ je vrcholový úhel vnitřního tření a φ_{cv} je úhel vnitřního tření při kritickém objemu. Další změnou která je zavedena do zobecněného modelu Cam clay je závislost podmínky plasticity na Lodově úhlu daná vztahem pro směrnici linie kritického stavu g

$$g(\varphi_{cv}, \vartheta) = X(Y_1 + Y_2 \sin 3\vartheta)^{-Z}, \quad (22)$$

$$X = 2^{(Z+1)} \sqrt{3} \sin \varphi_{cv}, \quad (23)$$

$$Y_1 = (3 - \sin \varphi_{cv})^{\frac{1}{Z}} + (3 + \sin \varphi_{cv})^{\frac{1}{Z}}, \quad (24)$$

$$Y_2 = (3 - \sin \varphi_{cv})^{\frac{1}{Z}} - (3 + \sin \varphi_{cv})^{\frac{1}{Z}}. \quad (25)$$

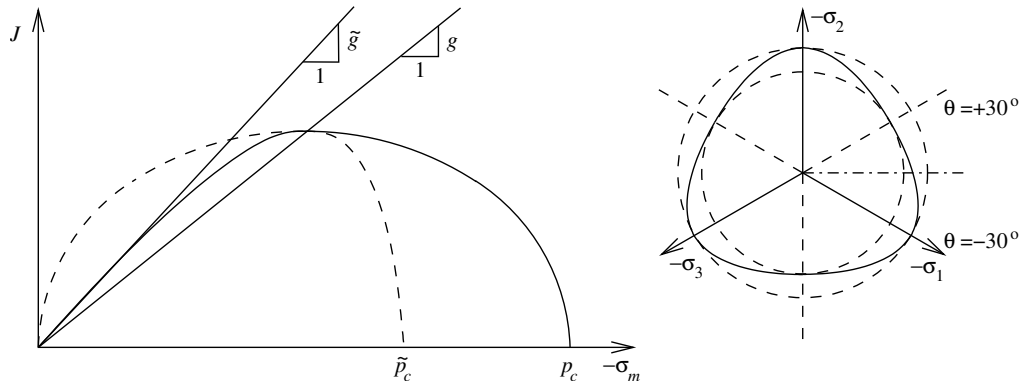
Směrnice funkce pasticity v počátku $\tilde{g}$ obdobně závisí na Lodově a je odvozena z vrcholovém úhlu vnitřního tření φ

$$\tilde{g}(\varphi, \vartheta) = \tilde{X}(\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2 \sin 3\vartheta)^{-Z}, \quad (26)$$

$$\tilde{X} = 2^{(Z+1)}\sqrt{3} \sin \varphi, \quad (27)$$

$$\tilde{Y}_1 = (3 - \sin \varphi)^{\frac{1}{Z}} + (3 + \sin \varphi)^{\frac{1}{Z}}, \quad (28)$$

$$\tilde{Y}_2 = (3 - \sin \varphi)^{\frac{1}{Z}} - (3 + \sin \varphi)^{\frac{1}{Z}}. \quad (29)$$



Obrázek 3: Zobecněný model Cam clay – funkce plasticity

Zde uvedený zobecněný model Cam clay využívá šest nezávislých parametrů. Bilineární diagram izotropní konsolidace je určen parametry κ , λ , e_0 a p_c . Plochu plasticity a plastický potenciál určují parametry φ , φ_{cv} a p_c .

5 Modul plastického zpevnění

Z podmínky konzistence v klasickém a v Melanově tvaru

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \kappa_i} d\kappa_i = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - H d\lambda = 0, \quad (31)$$

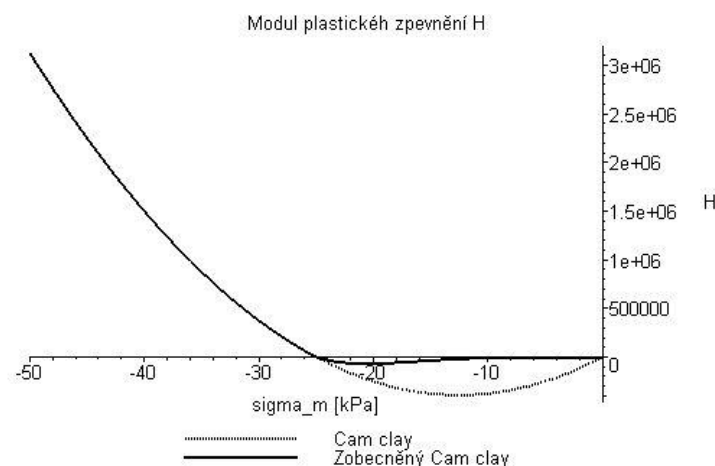
Ize určit modul plastického zpevnění. V oblasti $-\sigma_m > p_c/2$ odpovídá modulu zpevnění z klasické formulace modelu Cam clay

$$H = (2\sigma_m + p_c) \frac{\sigma_m p_c}{\lambda^* - \kappa^*}. \quad (32)$$

V oblasti $-\sigma_m < p_c/2$ nabývá modul plastického zpevnění záporných hodnot dle vztahu

$$H = \frac{2(1 - \alpha)(-\sigma_m)^{2+\alpha} p_c^{1-\alpha} - (1 + \alpha)(1 - \alpha)(-\sigma_m)^{1+2\alpha} p_c^{2-2\alpha}}{\lambda^* - \kappa^*} \quad (33)$$

odvozeného z (30), (31), (10) a (11). Porovnání průběhu modulu plastického zpevnění pro klasickou a zobecněnou formulaci modelu camclay je znázorněno na Obr. 4



Obrázek 4: Průběh modulu plastického zpevnění zobecněného modelu Cam clay

6 Závěr

V příspěvku byla popsána oblast, v níž materiálový model Cam clay nerealisticky předpovídá chování reálné zeminy. Jedná se o případ smykové deformace překonsolidovaných zemin, kdy model nadhodnocuje pozorovanou doprovodnou objemovou deformaci, tj. dilatanci. V přímé souvislosti s tím model předpovídá též větší změkčení nežli je pozorováno.

Jako řešení je navržena zobecněná formulace materiálového modelu Cam clay ve které je na oblasti $OCR > 2$ navržena nová funkce plasticity, která vlivem menšího sklonu dilatanci omezuje. Do funkce plasticity je dále zavedena závislost na Lodově úhlu ϑ .

Závěrem je porovnán průběh modulu plastického zpevnění pro klasickou a navrženou zobecněnou formulaci materiálového modelu. Detailnější testování modelu implementovaného do metody konečných prvků je tématem dalšího výzkumu.

Poděkování. Příspěvek vznikl díky laskavé podpoře grantového projektu 1ET410430516 Akademie věd ČR.

Reference

- Bittnar, Z. & Šejnoha, J. (1996) *Numerical methods in structural mechanics*. ASCE, New York.
- Potts, D. M. & Zdravkovic, L. (1999) *Finite element analysis in geotechnical engineering, theory*. Thomas Telford, London.
- Roscoe, K. H., Schofield, A. N. & Worth, C. P. (1958) On the yielding of soils. *Geotechnique*, 8, pp. 22-55.
- Roscoe, K. H. & Burland, J. B. (1968) On the generalised behaviour of 'wet' clay. *Engineering plasticity*, Cambridge University Press, pp. 535-609.
- Terzaghi, K., Peck, R. B. & Mersi, G. (1995) *Soil Mechanics in Engineering Practice*. A Wiley-Interscience Publication.