
ON CALIBRATION OF A CYCLIC PLASTICITY MODEL

R. Halama*

Summary: *This paper deals with calibration of modified AbdelKarim-Ohno cyclic plasticity model [Int. J. Plasticity 16 (2000) 225]. The modification of the model was investigated for better multiaxial ratcheting simulations. Stable hysteresis loop or cyclic strain curve of a material can be used for main parameters determination. Additional parameters influence only ratcheting strain rate. These parameters could be found from at least one proportional and one nonproportional cyclic plasticity tests. Identification of the model parameters is presented using material data of BS11 rail steel from Bower [J.Mech.Phys.Solids 37 (1989)].*

1. Úvod

Při numerickém řešení elastoplastických úloh s cyklickým zatěžováním hraje významnou roli použitý model plasticity. Modely cyklické plasticity běžně zahrnuté v komerčních programech popisují správně chování kovových materiálů většinou pouze při deformačně řízeném zatěžování nebo u proporcionálního zatěžování, kdy jsou směry hlavních napětí a hlavních deformací shodné. Z tohoto důvodu byla navržena úprava sofistikovaného modelu plasticity (Halama, 2005) a následně implementována do programu Ansys 8.0 (Halama & Fusek, 2005). Použití navrženého modelu plasticity samo o sobě nezaručuje přesný popis materiálových vlastností. Obecně je u všech modelů cyklické plasticity nutné věnovat velkou pozornost určování materiálových parametrů.

2. Popis navrženého kinematického pravidla

Nejčastěji se používá s metodou konečných prvků inkrementální teorie plasticity a koncept ploch plasticity s podmínkou von Mises

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}}(s - a) : (s - a) - \sigma_y - R = 0 \quad , \quad (1)$$

kde s je deviator tenzoru napětí σ , a je deviator kinematického tenzoru α , σ_y je cyklická mez kluzu a R izotropní proměnná. Pro svou jednoduchost je v tomto článku použito nelineární izotropní pravidlo (viz Chaboche & Lemaitre, 1990)

$$dR = b(R_\infty - R) dp \quad , \quad (2)$$

kde R_∞ , b jsou materiálové konstanty a dp je přírůstek akumulované plastické deformace.

* Ing. Radim Halama: Katedra pružnosti a pevnosti, VŠB-TU Ostrava; 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava tel.: +420-59-7323495, e-mail: radim.halama@vsb.cz

Cyklickou napětově-deformační odezvu daného modelu plasticity nejvíce ovlivňuje použité kinematické pravidlo zpevnění. Nové kinematické pravidlo zpevnění navržené speciálně pro konstantní přírůstek deformace při cyklickém tečení (ratchetingu), které může vzniknout při silovém zatěžování, publikovali autoři AbdelKarim & Ohno (2000)

$$\alpha = \sum_{i=1}^M \alpha_i, \quad d\alpha_i = \frac{2}{3} C_i d\epsilon_p - \mu_i \gamma_i \alpha_i dp - \gamma_i H(f_i) \langle d\lambda_i \rangle \alpha_i \quad (3)$$

kde C_i , γ_i a μ_i jsou materiálové konstanty, $H(f_i)$ značí Heavysideův skok ($H(f_i)=1$, pro $f_i=0$ a $H(f_i)=0$ pro $f_i<0$), přičemž funkce f_i je definována

$$f_i = \frac{3}{2} \alpha_i : \alpha_i - \left(\frac{C_i}{\gamma_i} \right)^2 \quad (4)$$

a symbol $\langle x \rangle$ odpovídá tzv. MacCauleyho závorkám ($\langle x \rangle = 0$, jestliže $x < 0$ a $\langle x \rangle = x$, když $x > 0$). Zbývá ještě definovat obsah MacCauleyho závorek

$$d\lambda_i = d\epsilon_p : \frac{\alpha_i}{C_i/\gamma_i} - \mu_i dp, \quad 0 \leq \mu_i \leq 1. \quad (5)$$

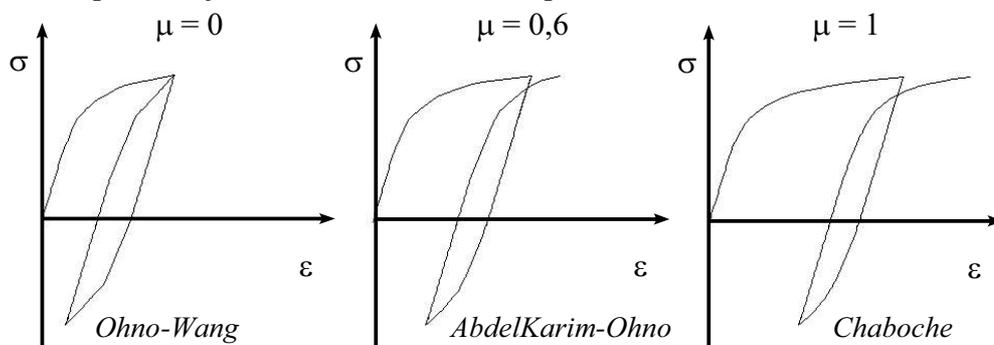
Značný význam v modelu mají konstanty μ_i . Například, jestliže platí $f_i < 0$ nebo $d\lambda_i < 0$, $\mu_i = 1$ pro všechna i a získá se model Chaboche & Lemaitre (1990)

$$\alpha = \sum_{i=1}^M \alpha_i, \quad d\alpha_i = \frac{2}{3} C_i d\epsilon_p - \gamma_i \alpha_i dp, \quad (6)$$

jestliže však $\mu_i = 0$ pro všechna i , pak bude odpovídat AbdelKarim-Ohno model multilineárnímu modelu Ohno & Wang (1993)

$$\alpha = \sum_{i=1}^M \alpha_i, \quad d\alpha_i = \frac{2}{3} C_i d\epsilon_p - \gamma_i H(f_i) \left\langle d\epsilon_p : \frac{\alpha_i}{C_i/\gamma_i} \right\rangle \alpha_i, \quad (7)$$

který predikuje při jednoosém namáhání vždy nulový ratcheting (dojde k plastickému přizpůsobení). Konstanty μ_i tedy ovlivňují míru ratchetingu. Pro jednoduchost se většinou uvažuje parametr μ_i pro všechna i stejný, tedy $\mu = \mu_i$. Vliv hodnoty μ na odezvu modelu při jednoosém cyklickém zatěžování s nenulovým středním napětím je zřejmý z obr.1, kde jsou zobrazeny diagramy napětí-deformace pro tři různé volby μ . Konstanta μ má také vliv na monotónní křivku, což plyne z obr.1, kde jsou všechny tři situace zakresleny pro stejnou amplitudu napětí a stejnou hodnotu středního napětí.



Obr.1 Vliv konstanty μ na jednoosý ratcheting u AbdelKarim-Ohno modelu plasticity

AbdelKarim-Ohno model plasticity má také své nevýhody. Při naladění na jednoosý ratcheting nedává příliš dobré výsledky u víceosého zatěžování a opačně. Druhou jeho nevýhodou je možnost simulace pouze konstantního ratchetingu. Pro odstranění uvedených vad byly navrženy dvě modifikace originálního modelu AbdelKarim-Ohno (Halama, 2005).

Před popisem první úpravy AbdelKarim-Ohno modelu je nutné se vrátit k modelu s jedinou konstantou ovlivňující ratcheting, tedy $\mu = \mu_i$. Z důvodu odlišení konstant AbdelKarim-Ohno modelu a jeho modifikace bude dále uvažováno $\mu = \eta$. V úvodním stadiu ratchetingu obecně vzniká tranzientní část. U některých materiálů přetrvává až do vzniku únavového poškození, u jiných dojde k stabilizaci deformační odezvy (konstantní ratcheting). Pro popis tranzientního chování při ratchetingu bylo v článku (Chen et al., 2005) navrženo spojení změny parametru η s přírůstkem akumulované plastické deformace

$$d\eta = \omega(\eta_\infty - \eta)dp, \quad (8)$$

kde η_∞ je ustálená hodnota parametru η , ω je evoluční koeficient a počáteční velikost η je η_0 . Takový model tedy vyžaduje pro popis ratchetingu tři konstanty. Jestliže je přechodová část ratchetingu dlouhá, nelze vystačit s rovnicí (8). Autorem bylo zjištěno, že v takových případech je výhodné vytvořit přírůstek ze dvou částí

$$d\eta = d\eta_1 + d\eta_2, \quad (9)$$

které se řídí rovnicí (8), tj.

$$d\eta_1 = \omega_1(\eta_{\infty 1} - \eta_1)dp, \quad d\eta_2 = \omega_2(\eta_{\infty 2} - \eta_2)dp. \quad (10)$$

Výhoda této jednoduché modifikace bude ukázána později na testovacím příkladě. Nejlepších výsledků bude dosaženo samozřejmě ve výpočtech s podobným přírůstkem plastické deformace za cyklus, jaký byl v případě určení parametrů η_{01} , η_{02} , $\eta_{\infty 1}$, $\eta_{\infty 2}$, ω_1 , ω_2 .

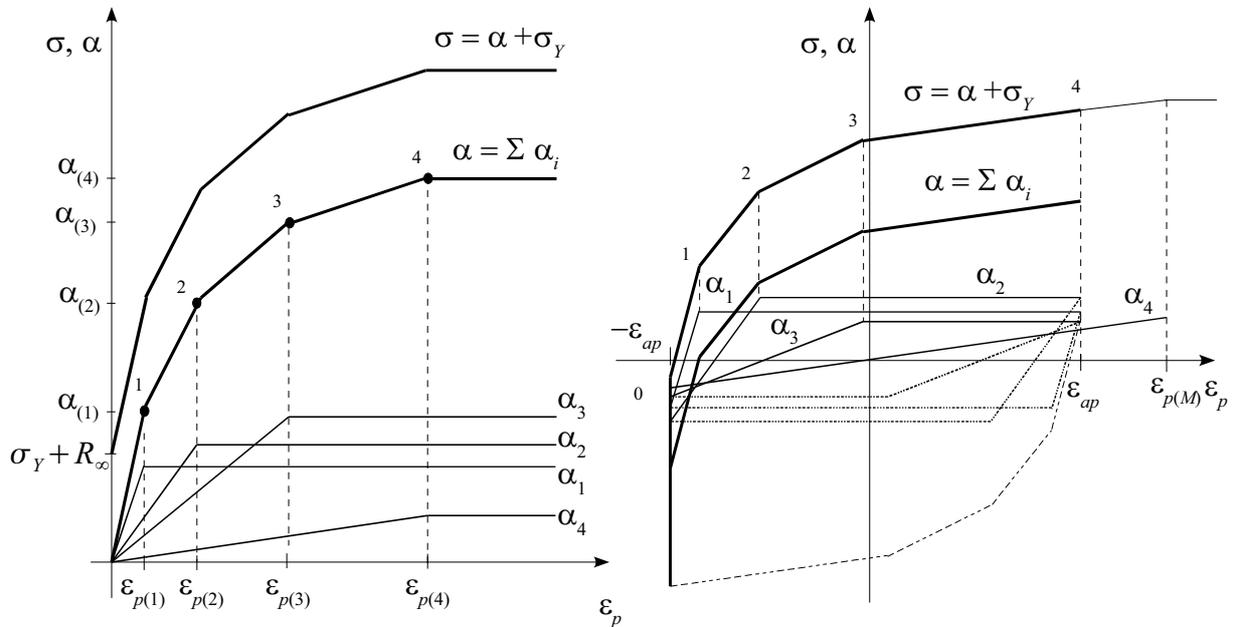
Další navrženou modifikací AbdelKarim-Ohno modelu je použití koeficientů μ_i v obecném AbdelKarim-Ohno modelu ve tvaru

$$\mu_i = \eta \left| \mathbf{n} : \frac{\mathbf{a}_i}{a_i} \right|^\chi, \quad (11)$$

kde $\mathbf{n} = \frac{d\epsilon_p}{dp} = \frac{3}{2\sigma_y}(\mathbf{s} - \mathbf{a})$, $a_i = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{a} : \mathbf{a}}$ a χ je multiaxiální parametr. Je vhodné poznamenat, že v rovnici (11) je hodnota výrazu $\left| \mathbf{n} : \frac{\mathbf{a}_i}{a_i} \right|$ vždy menší než 1 při neproporcionálním zatěžování a lze jej interpretovat jako míru odlišnosti směrů hlavních napětí a směrů hlavních plastických deformací. Uvedený výraz lze tedy nazvat neproporcionálním parametrem, protože neproporcionální zatěžování se někdy definuje jako zatěžování s odlišnými směry hlavních napětí a směry hlavních deformací. Často také dochází k rotaci těchto směrů. Naopak při proporcionálním zatěžování (např. tah-tlak) je hodnota neproporcionálního parametru vždy rovna 1 a modifikace (11) přejde v $\mu_i = \eta$, tedy AbdelKarim-Ohno model s proměnným koeficientem $\mu = \eta$ dle rovnice (9). K šesti konstantám η_{01} , η_{02} , $\eta_{\infty 1}$, $\eta_{\infty 2}$, ω_1 , ω_2 , které se určují z jednoosé zkoušky s nenulovým středním napětím, přibyla konstanta χ , kterou lze určit z víceosé zkoušky (např. cyklické tahové zkoušky s vnitřním přetlakem nebo kombinace tah-kroucení). V odborné literatuře lze nalézt více modelů plasticity s neproporcionálními parametry (např. Chen et al., 2005; Bari & Hassan, 2002).

3. Identifikace materiálových parametrů

K stanovení materiálových konstant (kromě parametrů ovlivňujících hodnotu μ_i) lze použít buď cyklickou deformační křivku daného materiálu (AbdelKarim & Ohno, 2000) nebo hysterezní smyčku (Bari & Hassan, 2000). V praxi je výhodné znát obě charakteristiky a snažit se o co nejlepší naladění modelu.



Obr.2 Určování konstant C_i , γ_i z cyklické deformační křivky (vlevo) a hysterezní smyčky (vpravo) pro $M=4$

Pro stanovení konstant C_i , γ_i ($i=1, \dots, M$) je nutné nejprve stanovit počet kinematických částí M . Minimální počet je většinou 6 složek. Maximální počet bývá kolem 20-ti. Více nelze doporučit z důvodu zpomalení výpočtu. Vychází-li se z cyklické deformační křivky, rozdělí se křivka na M částí (obr.2 vlevo) a hledané parametry se určí z relací

$$C_i = \frac{\sigma_{(i)} - \sigma_{(i-1)}}{\epsilon_{p(i)} - \epsilon_{p(i-1)}} - \frac{\sigma_{(i+1)} - \sigma_{(i)}}{\epsilon_{p(i+1)} - \epsilon_{p(i)}}, \text{ pro } i \neq M, \quad (12)$$

$$C_M = \frac{\sigma_{(M)} - \sigma_{(M-1)}}{\epsilon_{p(M)} - \epsilon_{p(M-1)}} \quad (13)$$

a

$$\gamma_i = \frac{1}{\epsilon_{p(i)}}, \text{ pro všechna } i, \quad (14)$$

kde $\sigma_{(i)}$, $\epsilon_{p(i)}$ označuje souřadnice i -tého bodu cyklické deformační křivky.

Stanovení konstant C_i , γ_i ($i=1, \dots, M$) z hysterezní smyčky začíná také rozdělením na M segmentů (obr.2 vpravo). Potom lze hledané konstanty určit z následujících relací

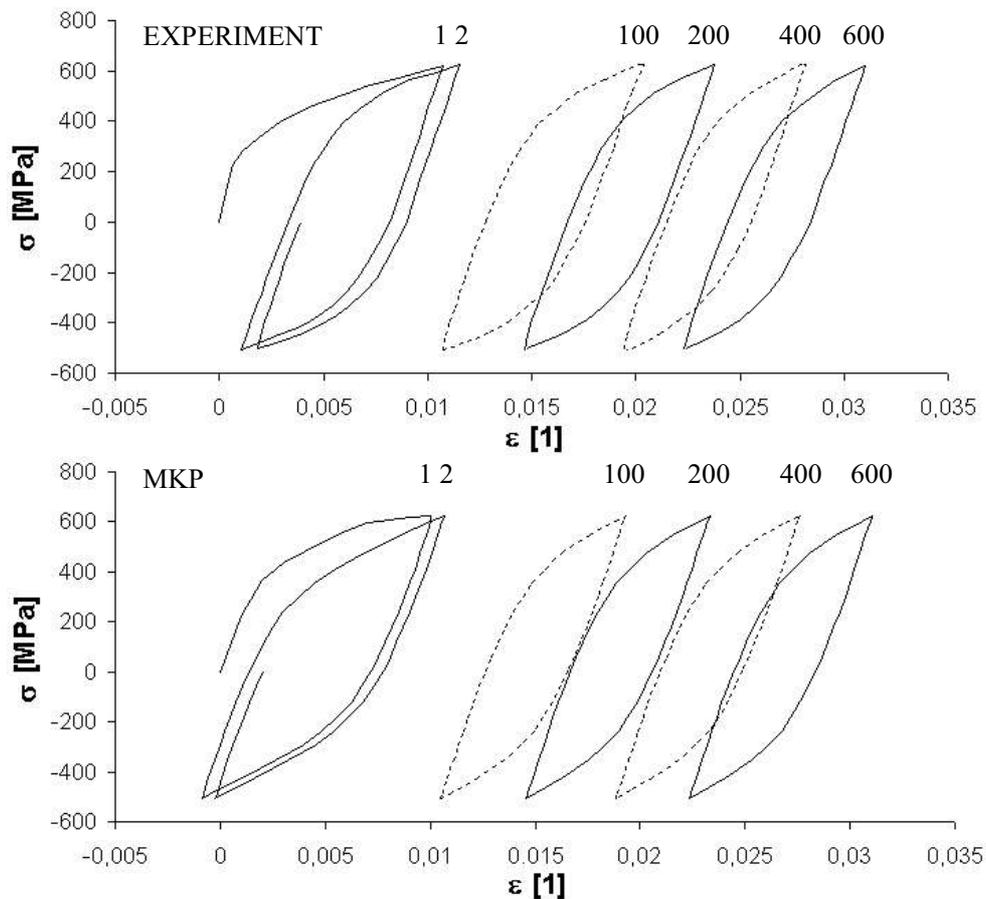
$$C_i = \frac{\sigma_{(i)} - \sigma_{(i-1)}}{\epsilon_{p(i)} - \epsilon_{p(i-1)}} - \frac{\sigma_{(i+1)} - \sigma_{(i)}}{\epsilon_{p(i+1)} - \epsilon_{p(i)}}, \text{ pro } i \neq 1, \quad \gamma_i = \frac{2}{\epsilon_{p(i)} + \epsilon_{p(0)}} \quad (15)$$

a nakonec C_1 použitím

$$\sum_1^M \frac{C_i}{\gamma_i} + \sigma_Y + R_\infty = \sigma_{(M)} , \quad (16)$$

kde $\sigma_{(i)}, \epsilon_{p(i)}$ označuje souřadnice i -tého bodu hysterese smyčky. Oproti použití cyklické deformační křivky je nutné začít od bodu 0 ($\sigma_{(0)}, \epsilon_{p(0)}$), který určuje poslední místo v horní části hysterese smyčky s deformací $-\epsilon_{ap}$. Ze zmíněného bodu se také snadno určí velikost součtu $\sigma_Y + R_\infty$, protože bod 0 je ve vzdálenosti $2(\sigma_Y + R_\infty)$ od dolního vrcholu smyčky.

Za ukázkový příklad byla zvolena experimentální data materiálu BS11 (Bower, 1989) z důvodu další aplikace v řešení valivého kontaktu. K danému materiálu bohužel nebyla v článku (Bower, 1989) publikována hysterese smyčka ani cyklická deformační křivka. Byla publikována pouze jednoosá zkouška s konstantní amplitudou napětí $\sigma_a=562\text{MPa}$ a nenulovou hodnotou středního napětí $\sigma_m=56\text{MPa}$ (obr.3) a cyklická zkouška s neproporcionální zatěžováním, která bude popsána později. Z důvodu absence cyklické deformační křivky i hysterese smyčky byla použita pro identifikaci parametrů C_i, γ_i ($i=1,2,\dots,6$) a součtu $\sigma_Y + R_\infty$ téměř uzavřená hysterese smyčka vytvořená v 600-tém cyklu. Tato smyčka byla také využita ke stanovení modulu pružnosti v tahu E . Hodnoty σ_Y a b byly stanoveny z monotónní části zkoušky. Získané hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1 spolu s hodnotou Poissonova čísla ν pro daný materiál.



Obr.3 Simulace jednoosé cyklické zkoušky materiálu BS11 – experiment Bower (1989)

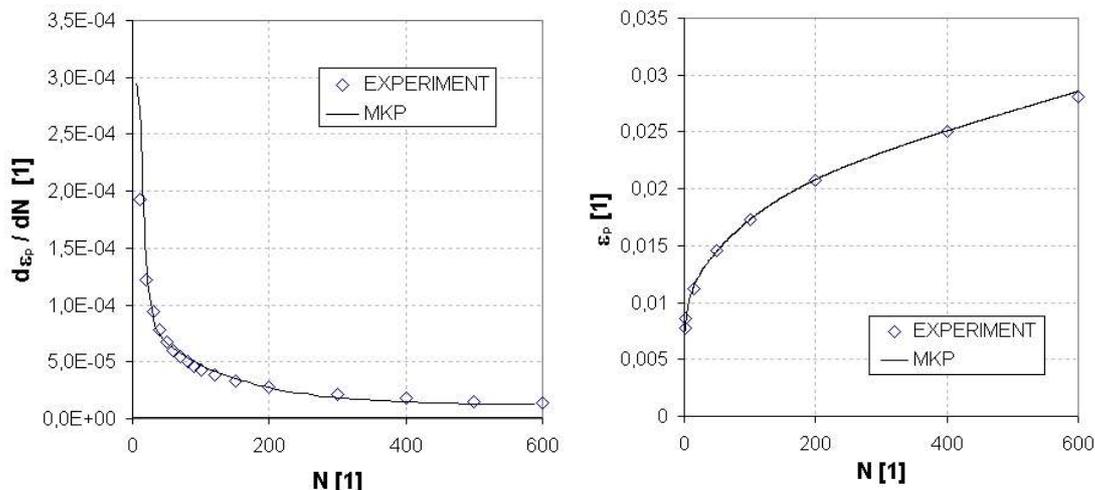
Tab.1 Parametry navrženého modelu plasticity pro materiál BS11

zkouška	parametry
Tah-tlak	$E = 250000 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$, $\sigma_Y = 128 \text{ MPa}$, $R_\infty = 72 \text{ MPa}$, $b = 4$ $C_{1-6} = 441790, 351110, 172890, 60601, 47733, 9000 \text{ MPa}$ $\gamma_{1-6} = 12506, 4879, 2326, 948, 258, 50$ $\eta_{01} = 0,25$; $\eta_{\infty 1} = 0,003$; $\omega_1 = 12,5$; $\eta_{02} = 0,075$; $\eta_{\infty 2} = 0,009$; $\omega_2 = 1,2$
Tah-tlak/kroucení	$\chi = 0,5$

Zbývá naladění modelu plasticity pro ratcheting, tedy cyklický přírůstek plastické deformace. Podobně jako v Chabochově modelu (Bari & Hassan, 2000) má podstatný vliv na ratcheting konstanta γ_M poslední části kinematického tenzoru napětí α_M (samozřejmě jen při $\mu_i \neq 0$). Se zvyšující se hodnotou γ_M se zvětšuje míra ratchetingu, přičemž na tvar hysteretní smyčky tato změna nemá vliv. Pouze dochází k přesunutí bodu ε_{ap} do bodu $\varepsilon_{p(M)}$ (viz. obr.2). Za touto hodnotou se již chová model ideálně plasticky. V řešeném případě byla zvolena hodnota $\gamma_M = 50$. Pro nalezení konstant μ_i , případně jediné konstanty μ , lze využít experimentální data při jednoosém nebo víceosém ratchetingu. V obecném případě navržené modifikace je nutné stanovit parametry η_{01} , η_{02} , $\eta_{\infty 1}$, $\eta_{\infty 2}$, ω_1 , ω_2 a multiaxiální parametr χ . Z již zmíněné jednoosé zkoušky bylo nejprve určeno šest konstant η_{01} , η_{02} , $\eta_{\infty 1}$, $\eta_{\infty 2}$, ω_1 , ω_2 , přičemž se vycházelo z diagramu $d\varepsilon_p/dN(N)$ (obr.4 vlevo) respektive $d\varepsilon_p/dN(p)$. Veličina $d\varepsilon_p/dN$ značí přírůstek plastické deformace ve vrcholu smyčky v N -tém cyklu. Pro identifikaci konstant η_{01} , η_{02} , $\eta_{\infty 1}$, $\eta_{\infty 2}$, ω_1 , ω_2 lze doporučit přepočtení závislosti $d\varepsilon_p/dN(p)$ na závislost $\mu(p)$ a poté využít pro aproximaci vztah

$$\mu(p) = \eta = \eta_{\infty 1} + (\eta_{01} - \eta_{\infty 1})e^{(-\omega_1 p)} + \eta_{\infty 2} + (\eta_{02} - \eta_{\infty 2})e^{(-\omega_2 p)}, \quad (17)$$

který lze získat integrací rovnic (9) a (10). K převedení závislosti $d\varepsilon_p/dN(p)$ na závislost $\mu(p)$ stačí provést jediný výpočet pro zvolenou hodnotu μ , např. $\mu = 0,1$ a využít platnosti přímé úměrnosti mezi přírůstkem plastické deformace za cyklus $d\varepsilon_p/dN$ a hodnotou μ , která ovšem platí pouze pro malé hodnoty μ .



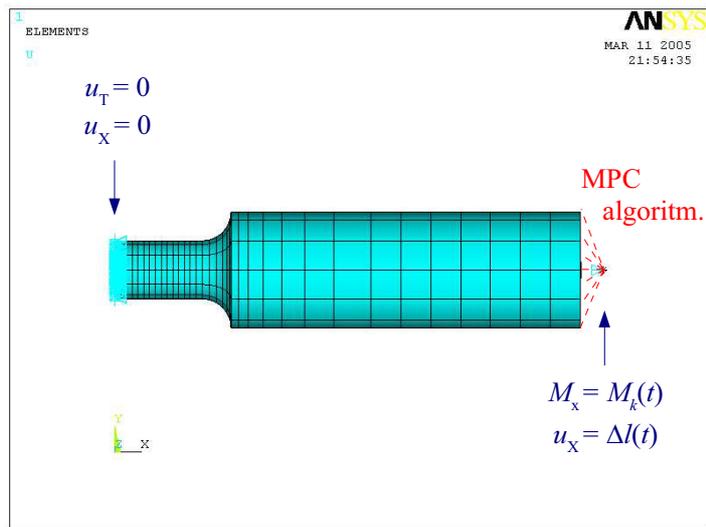
Obr.4 Plastická deformace ve vrcholech smyček (vpravo) a změna přírůstku plastické deformace za cyklus (vlevo) v závislosti na počtu cyklů – materiál BS11 (Bower, 1989)

Poslední konstanta, multiaxiální parametr χ , byla zvolena pro co nejlepší simulaci neproporcionální zkoušky (kombinace tah-tlak/kroucení), která napodobuje napětově-deformační poměry v povrchových bodech u liniového valivého kontaktu (Bower, 1989). Srovnání výsledků numerického řešení a experimentu je patrné z obr.7.

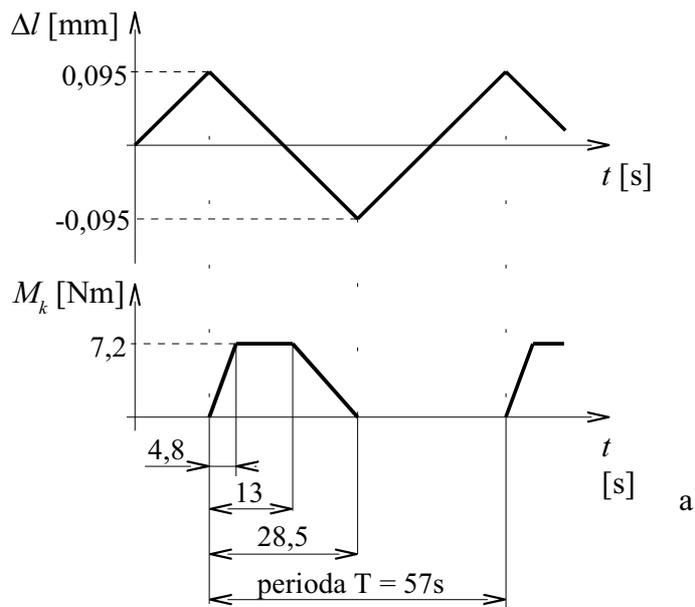
Pro simulaci proporcionální zkoušky Bowera (1989) bylo možné konečnoprvkový model redukovat na jediný tyčový prvek LINK1. Numerický výpočet odpovídající neproporcionální zkoušce vyžadoval z důvodu komplikované geometrie zkušební vzorku vytvoření 3D modelu, který čítal 1311 kvadratických prvků SOLID95 (obr.5).

Řešená neproporcionální zkouška byla kombinací kroucení a tahu-tlaku. Osově zatížení bylo deformačně řízené s amplitudou $\Delta l = 0,095\text{mm}$ (obr.6). K ratchetingu docházelo v podobě zvětšování úhlu natočení vlivem periodického působení kroutícího momentu $M_k = 7,2\text{Nm}$ dle obr.6. Právě popsané okrajové podmínky byly zadány na jediný uzel k jejich transformaci na ostatní uzly byl využit kontaktní algoritmus MPC programu Ansys 8.0. Pro zjednodušení byla modelována pouze polovina vzorku. V uzlech roviny symetrie bylo zamezeno posuvu v axiálním a tečném směru (obr.5). Z důvodu využití symetrie bylo aplikováno poloviční posunutí v axiálním směru, tj. s amplitudou $\Delta l = 0,0425\text{mm}$.

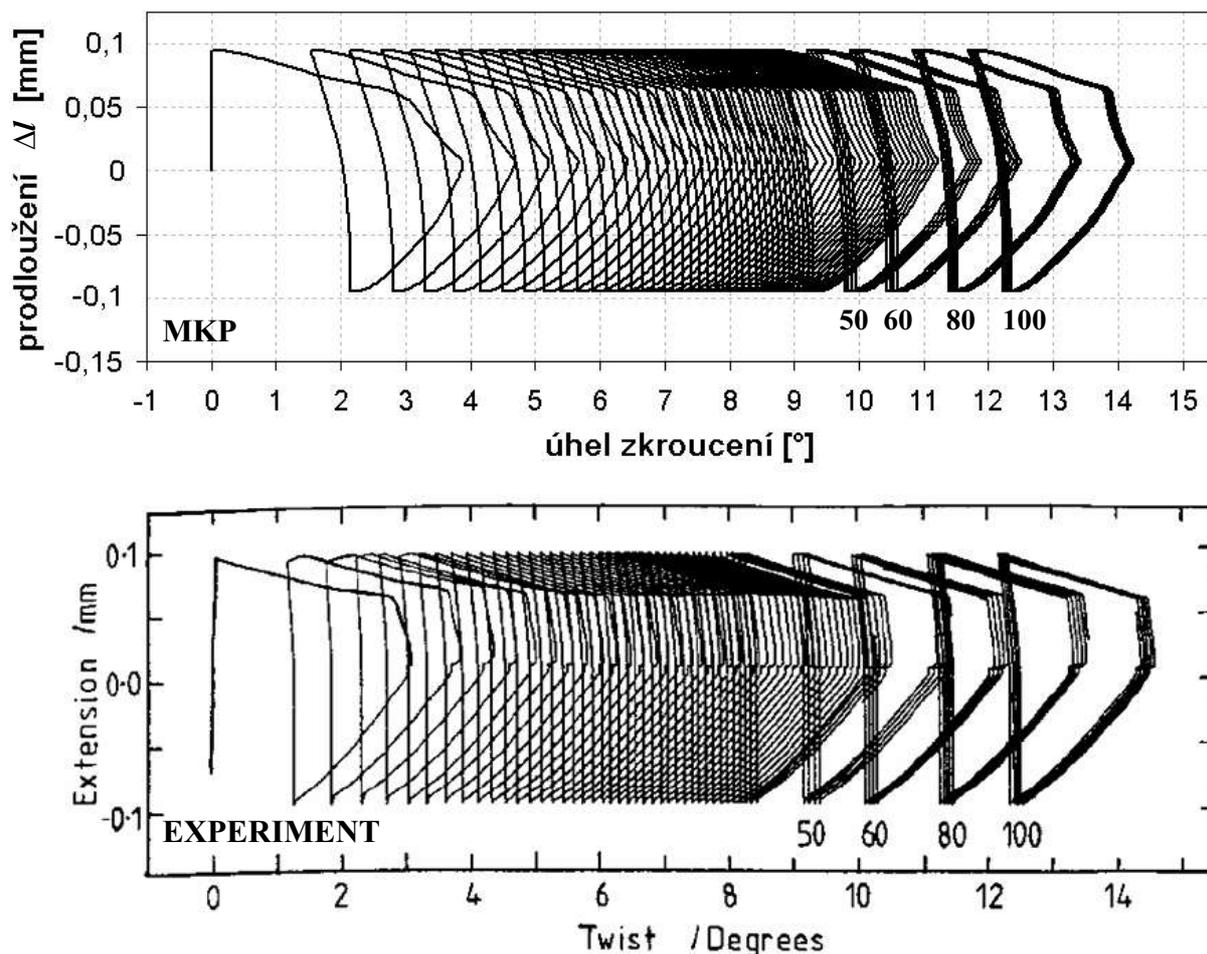
Pro výpočet bylo nastaveno 150 časových kroků na jeden zátěžný cyklus. Všechny získané výsledky byly pro další zpracování převedeny do programu MS Excel. Srovnání výsledků numerického řešení s experimentem je provedeno grafickou formou na obr.7. Po naladění navrženého modelu plasticity dle tab.1 jsou výsledky numerického řešení při srovnání s experimentem velmi dobré. Takto získaná materiálová charakteristika byla použita k výpočtům liniového kontaktu sloužících k ověření navržené metodiky řešení kontaktní únavy (Halama & Lenert, 2004).



Obr. 5 Konečnoprvkový model pro simulaci neproporcionální zkoušky



Obr. 6 Popis neproporcionálního zatěžování pro simulaci podmínek valivého kontaktu – Bower (1989)



Obr.7 Srovnání numerického výpočtu s experimentálními daty neproporcionální zkoušky pro simulaci podmínek valivého kontaktu – materiál BS11 (Bower, 1989)

4. Závěr

Byly popsány některé možnosti pro identifikaci parametrů modelu cyklické plasticity založeného na kinematickém pravidle AbdelKarim & Ohno (2000). Pro identifikaci potřebných konstant je doporučeno vycházet alespoň ze dvou experimentálních zkoušek zahrnujících silové zatěžování, a to z cyklické zkoušky tahem-tlakem s nenulovým středním napětím a víceosé zkoušky se vznikem ratchetingu (např. kombinace tah/kroucení nebo zkouška tenkostěnného vzorku s vnitřním přetlakem). V článku je navržený postup prezentován na experimentálních datech Bowera (1989). Řešena byla pouze jedna proporcionalní a jedna neproporcionalní zkouška. Po naladění hledaných parametrů bylo dosaženo velmi dobrých výsledků.

Navržená modifikace modelu plasticity AbdelKarim & Ohno (2000) byla již dříve testována na komplexnějších experimentech z oblasti cyklické plasticity (Halama, R., 2005). Postupně budou řešeny další případy.

5. Poděkování

Tato práce vznikla za podpory projektu FRVŠ 3395021 a dílčí části projektu CEZ J17/98:272300009 zaměřeného na kontaktní únavu.

6. Literatura

- Abdel-Karim, M. & Ohno, N. (2000) Kinematic Hardening Model Suitable for Ratcheting with Steady-State, *International Journal of Plasticity*, 16, pp. 225-240.
- Bari, S. & Hassan, T. (2000) Anatomy of Coupled Constitutive Models for Ratcheting Simulations. *International Journal of Plasticity*, 16, pp. 381-409.
- Bari, S. & Hassan, T. (2002) An Advancement in Cyclic Plasticity Modeling for Multiaxial Ratcheting Simulations, *International Journal of Plasticity*, 18, pp. 873–894.
- Bower, A.F. (1989) Cyclic Hardening Properties of Hard-Drawn Copper and Rail Steel. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 37, pp. 455–470.
- Halama, R. & Lenert, J. (2004) Metodika řešení kontaktní únavy s využitím MKP. in: *Sborník konference Inženýrská mechanika 2004, Svatka 10.-13.5.2004* (I. Zolotarev & A. Poživilová eds), AVČR Ústav termomechaniky, Praha, pp.105-106.
- Halama, R. (2005) Modifikace modelu cyklické plasticity s ohledem na multiaxiální ratcheting, Část I. Základní popis a srovnání simulace s experimenty, in: *Sborník 7. ročníku konference Aplikovaná mechanika 2005*, Hrotovice, v tisku.
- Halama, R. & Fusek, M. (2005) Modifikace modelu cyklické plasticity s ohledem na multiaxiální ratcheting, Část II. Implementace v programu Ansys, in: *Sborník 7. ročníku konference Aplikovaná mechanika 2005*, Hrotovice, v tisku.
- Chaboche, J.L. & Lemaitre, J. (1990) *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Chen, X. & Jiao, R. & Kim, K.S. (2005) On the Ohno-Wang Kinematic Hardening Rules for Multiaxial Ratcheting Modeling of Medium Carbon Steel, *International Journal of Plasticity*, 21, pp. 161–184.