

ANALYSIS OF THE COMPRESSIBLE VISCOUS FLUID FLOW THROUGH THE GAP CAUSED BY THE INCORRECT CONTACT OF SCREW SURFACES

J. Vimmr*, J. Švígler*

Summary: *The paper deals with the analysis of the correct and incorrect contact of the two-dimensional manifolds represented by screw surfaces which form a higher kinematic pair and which were created in the direct envelope way according to the Distelli theorem. The incorrect contact of surfaces is caused, in this paper, by a large parallel displacement of the axis of one of the surfaces. The computational model of a gap caused by the incorrect contact of screw surfaces was created. The aim of this paper is to perform a numerical simulation of the compressible viscous fluid flow through this gap.*

1. Úvod

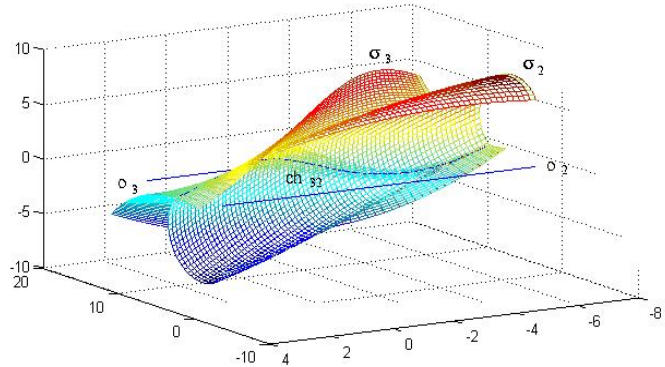
Šroubové plochy jsou v průmyslové praxi využívány k transformaci rotačního pohybu, nejčastěji mezi rovnoběžnými osami, a tvoří boky spoluzabírajících ozubených kol. Rotující členy vytvářejí v základním, nehybném prostoru vyšší kinematickou dvojici. Prvky dvojice jsou tvořeny plochami, které představují obecnou dvojici s 5° volnosti (Brát, 1981). Při rotačním pohybu dochází nejen k transformaci úhlových rychlostí, ale i k přenosu momentů mezi osami. Kvalita transformačního děje závisí, kromě jiných faktorů, na korektnosti dotyku obou ploch. Plochy jsou při provozu namáhány a dochází k jejich deformaci, která vede k nekorektnímu dotyku. Velmi významný je tento děj u šroubových ploch, které jsou podrobeny namáhání a mají navíc značnou délku. Na obr. 1 jsou ukázány spoluzabírající rotory šroubového kompresoru, jejichž boky zubů, tvořené šroubovými plochami, jsou vystaveny silnému silovému a tepelnému namáhání. Ještě mnohem závažnější je tato situace u šroubových expandérů, které v kombinaci s kompresorem tvoří šroubový motor, kde parametry vstupního média mohou být 600° C a $6 \cdot 10^5$ Pa (Kauder & Unwerth, 1998). V příspěvku je řešen nekorektní kontakt ploch vzniklý paralelním posunutím os spoluzabírajících ploch σ_2 a σ_3 , z nichž plocha σ_3 je tvořící plochou se zvoleným profilem v čelním řezu a plocha σ_2 je její obálkou. V důsledku nekorektního kontaktu vznikne mezi šroubovými plochami mezera, kterou proudí médium z oblasti s vyšším tlakem do prostoru s nižším tlakem. Aby bylo možné si vůbec udělat představu o ztrátách vznikajících nekorektním dotykem šroubových ploch, je nezbytné provést analýzu proudění touto mezerou.

* Ing. Jan Vimmr, Ph.D., Doc. Ing. Jaromír Švígler, CSc.: Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra mechaniky; Univerzitní 22; 306 14 Plzeň; tel.: +420.377 632 314, fax: +420.377 632 302; email: jvimmr@kme.zcu.cz

V příspěvku se proto dále zabýváme numerickou simulací laminárního proudění stlačitelné vazké tekutiny v mezeře vzniklé nekorektním dotykem spoluzabírajících šroubových ploch.



Obr. 1 Rotory šroubového kompresoru.



Obr. 2 Křivkový dotyk šroubových ploch σ_2 a σ_3 .

2. Korektní dotyk ploch σ_2 a σ_3

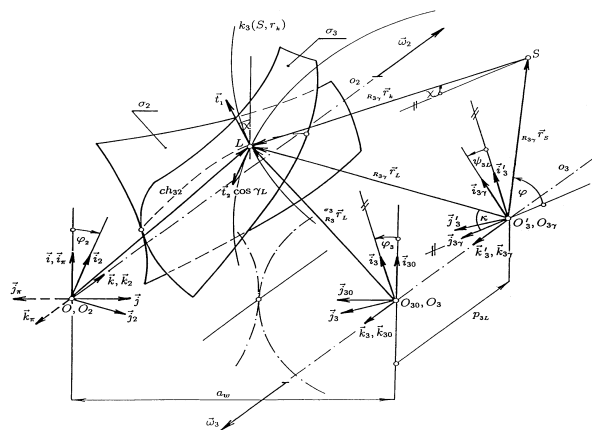
Plochy σ_2 a σ_3 na obr. 2 mají korektní dotyk a dotýkají se podél křivky ch_{32} , která v průběhu otáčení mění, v závislosti na tvaru profilů obou ploch v čelním řezu, svůj tvar a polohu. Plocha σ_3 , (Švígler & Vimmr, 2001), tvoří dvourozměrnou varietu a její libovolný bod je určen v prostoru R_3 polohovým vektorem ${}^{\sigma_3}_{R_3} \mathbf{r}_L = {}^{\sigma_3}_{R_3} \mathbf{r}_L(p_{3L}, \chi)$, obr. 3. Řešení provádíme v základním prostoru R a proto provedeme transformaci $\mathbf{t} : R_3 \rightarrow R$

$${}^{\sigma_3}_R \mathbf{r}_L = \mathbf{T}_{R\pi R}(\pi) \mathbf{T}_{R_3 O R \pi}(-a_w) \mathbf{T}_{R_3 R_3 O}(\varphi_3) \cdot {}^{\sigma_3}_{R_3} \mathbf{r}_L. \quad (1)$$

Spoluzabírající plocha σ_2 vznikne podle Distelliho výtvarného principu jako obálka plochy σ_3 a je v základním prostoru R určena vztahy

$${}^{\sigma_2}_R \mathbf{r}_L = \mathbf{T}_{R_2 R}(\varphi_{2k0}) \mathbf{T}_{RR_2}(\varphi_2) \cdot {}^{\sigma_3}_R \mathbf{r}_L \quad \wedge \quad {}^{\sigma_3}_R \mathbf{n}_L \cdot {}_R \mathbf{v}_{L32} = 0, \quad (2)$$

které představují dvourozměrnou varietu $\sigma_2 = \sigma_2(p_{3L}, \chi, \varphi_i)$, kde $\varphi_i \in \{\varphi_2, \varphi_3\}$, $\varphi_3 = i_{32} \varphi_2$ a i_{32} je požadovaný převodový poměr. Poloha rotorů, ve které určujeme jejich dotyk, je určena úhlem $\varphi_{3k0} = i_{32} \varphi_{2k0}$. Nulová hodnota skalárního součinu vektoru normály ${}^{\sigma_3}_R \mathbf{n}_L$ k ploše σ_3 a vektoru relativní rychlosti ${}_R \mathbf{v}_{L32}$ vyjadřuje podmínku dotyku obou ploch v bodě L . Korektní dotyk ploch σ_2 a σ_3 je, jak již bylo řečeno, charakterizován křivkovým kontaktem podél křivky $ch_{32} \in \{^i L\}$, $i \in (1, n)$.



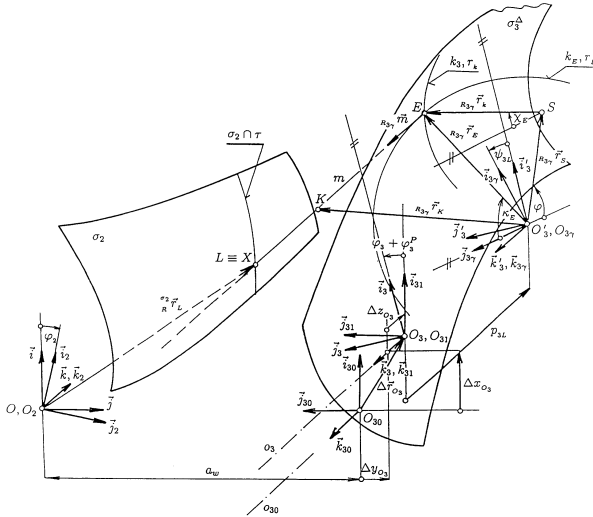
Obr. 3 Vytváření spoluzabírajících ploch σ_2 a σ_3 .

3. Nekorektní dotyk ploch σ_2 a σ_3^Δ

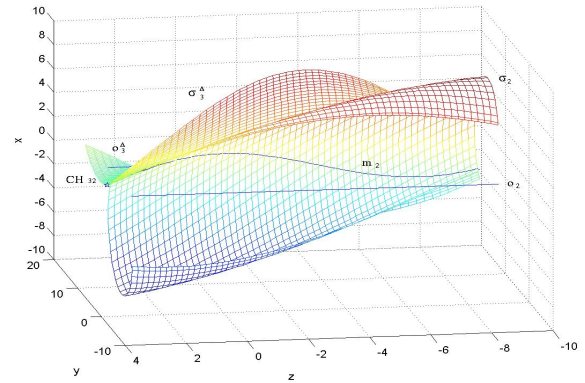
Uvažujme nekorektní kontakt ploch σ_2 a σ_3 , který vznikne paralelním posunutím osy o_3 o míru $\Delta \mathbf{r}_{O_3} = [\Delta x_{O_3}, \Delta y_{O_3}, 0]$ do polohy o_{30} , obr. 4. Plocha σ_3 tak přejde do nové polohy σ_3^Δ . Aby

došlo ke kontaktu ploch σ_2 a σ_3^Δ , musí se jedna z ploch, v našem případě to je plocha σ_3^Δ , potočit o úhel φ_3^P tak, až dojde v jisté čelní rovině τ ke kontaktu profilu $k_3 \in \sigma_3^\Delta \wedge k_3 \in \tau$ s profilem $p_2 = \sigma_2 \cap \tau$. K prvnímu kontaktu, který určuje dotyk obou ploch, dojde v řezu τ , pro který platí $\varphi_3^P = \min\{^j\varphi_3^P\}$, $j \in (1, m)$.

Numerické řešení bylo provedeno pro následující hodnoty: $a_w = 100$ mm (osová vzdálenost), $\gamma = 45^\circ$ (úhel stoupání šroubovice), $r_k = 125$ mm (poloměr tvořící kružnice k_3), $i_{32} = \frac{3}{2}$ (převodový poměr), $\varphi_{2k0} = \frac{10^\circ}{i_{32}}$ (úhel fixující polohu plochy σ_2), $\Delta x_{O_3} = 0,1$ mm, $\Delta y_{O_3} = 0,1$ mm (posunutí osy O_3). Nekorektní dotyk ploch σ_2 a σ_3^Δ je ukázán na obr. 5. Plochy se dotýkají pouze v bodě CH_{32} a křivka $m_2 \in \sigma_2$ je křivkou nejmenší vzdálenosti mezi oběma plochami.



Obr. 4 Nekorektní kontakt ploch σ_2 a σ_3 .

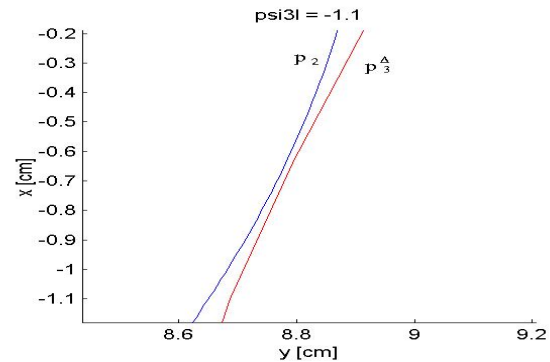
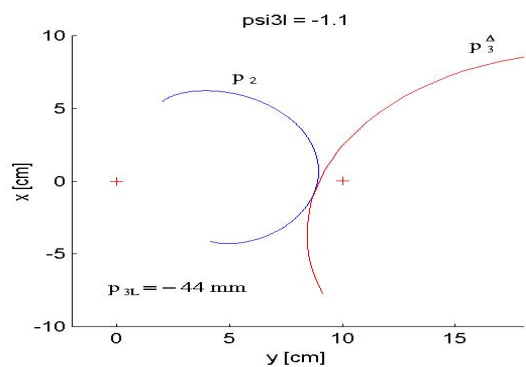
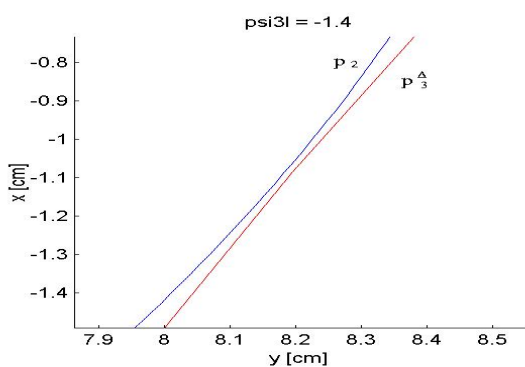
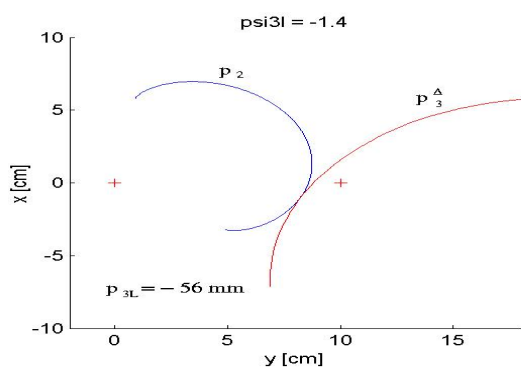
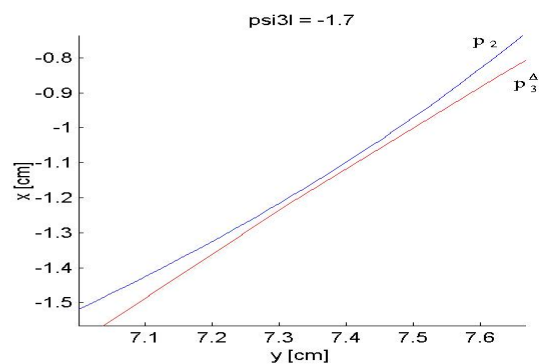
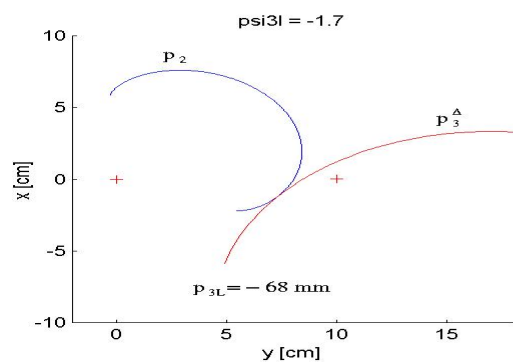
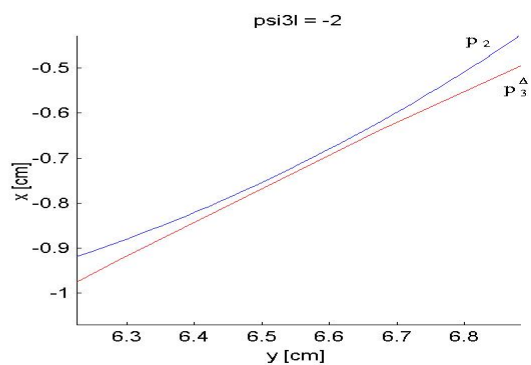
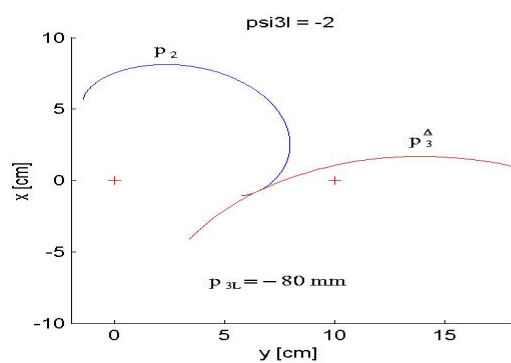


Obr. 5 Nekorektní dotyk ploch σ_2 a σ_3^Δ .

Situace je zřejmá při pohledu na čelní řezy na obr. 6, kde na pravé straně jsou ukázány detaily přiblížení obou profilů p_2 a p_3^Δ . K dotyku ploch dochází v čelní rovině τ určené parametrem $p_{3L} = 34,04$ mm. Čelní řez na opačném konci délky ploch je ve vzdálenosti $p_{3L} = -80$ mm. V uvedeném intervalu je možné vytvořit spoluzabírající plochy bez vzniku interference.

4. Mezera mezi plochami σ_2 a σ_3^Δ

Protože plochy σ_2 a σ_3 musí kromě transformace otáček a momentů ještě zajišťovat utěsnění prostorů s rozdílnými tlaky, které jsou na obou stranách dotykové křivky, dojde při jejich nekorektním kontaktu k proudění stlačovaného nebo expandujícího média z prostoru o vyšším tlaku do prostoru s nižším tlakem. Abychom si vůbec mohli udělat představu o ztrátách vznikajících nekorektním dotykem šroubových ploch, je nezbytné provést analýzu proudění mezerou mezi plochami σ_2 a σ_3^Δ . K tomu využijeme čelních řezů ukázaných na obr. 6 a sestojíme rovinné výpočtové modely mezer, v nichž vytvoříme strukturovanou čtyřúhelníkovou síť pro následnou analýzu proudění. Profil p_3^Δ plochy σ_3^Δ je v čelním řezu tvořen kružnicí $k_3(S, r_k)$, obr. 4, a profil $p_2 = \sigma_2 \cap \tau$, který je obálkou profilu p_3 , nahradíme oskulační kružnicí. Z hlediska vnitřní geometrie je jedno, zda hovoříme o profilu p_3 nebo p_3^Δ , případně o ploše σ_3 nebo σ_3^Δ . Nesmíme však zapomenout, ve kterém prostoru geometrický útvar uvažujeme. Z důvodu snadnějšího vyjádření profilu p_3^Δ budeme následující řešení provádět v prostoru $R_{3\gamma}$.



Obr. 6 Čelní řezy plochami σ_2 a σ_3^A s nekorektním dotykem.

Pro obecný bod $D \equiv E$ profilu p_3^Δ tvořícího dolní křivku rovinného modelu mezery platí podle obr. 3

$${}_{R_{3\gamma}}\mathbf{r}_D = {}_{R_{3\gamma}}\mathbf{r}_S + {}_{R_{3\gamma}}\mathbf{r}_k. \quad (3)$$

Profil p_3^Δ je potom v homogenních souřadnicích určen v prostoru $R_{3\gamma}$ vztahem

$${}_{R_{3\gamma}}\mathbf{r}_D = \begin{bmatrix} {}_{R_{3\gamma}}x_D \\ {}_{R_{3\gamma}}y_D \\ {}_{R_{3\gamma}}z_D \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_S \sin \varphi + r_k \sin \chi_E \\ -r_S \cos \varphi + r_k \cos \chi_E \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

kde χ_E je parametr. Profil p_2 , který tvoří horní křivku rovinného modelu mezery, je určen transformačním vztahem

$${}_{R_{3\gamma}}\mathbf{r}_H = \mathbf{T}_{R_3 R_{3\gamma}}(\psi_{3L}) \mathbf{T}_{R_{31} R_3}(\varphi_{3k0}) \mathbf{T}_{R_{30} R_{31}}(\Delta \mathbf{r}_{O_3}) \mathbf{T}_{R_{\pi} R_{30}}(a_w) \mathbf{T}_{R_{R\pi}}(\pi) \mathbf{T}_{R_2 R}(\varphi_{2k0}) \cdot {}_{R_2}\mathbf{r}_{L2}, \quad (5)$$

kde

$${}_{R_2}\mathbf{r}_{L2} = \begin{bmatrix} x_{L2} \\ y_{L2} \\ z_{L2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{S_2} + r_2 \cos \chi_2 \\ y_{S_2} + r_2 \sin \chi_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

je polohový vektor bodu H oskulační kružnice profilu p_2 s parametrem χ_2 . Po vyjádření transformačních matic a po provedení součinu naznačeného v rovnici (5) dostaneme pro profil p_2 v homogenních souřadnicích vztah

$${}_{R_{3\gamma}}\mathbf{r}_H = \begin{bmatrix} x_{L2} \cos \nu - y_{L2} \sin \nu - \Delta x_{O_3} \cos(\psi_{3L} + \varphi_{3k0}) + (a_w + \Delta y_{O_3}) \sin(\psi_{3L} + \varphi_{3k0}) \\ -x_{L2} \sin \nu - y_{L2} \cos \nu + \Delta x_{O_3} \sin(\psi_{3L} + \varphi_{3k0}) + (a_w + \Delta y_{O_3}) \cos(\psi_{3L} + \varphi_{3k0}) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

kde $\nu = \psi_{3L} + \varphi_{3k0} + \varphi_{2k0}$ a parametrem je, jak již bylo řečeno, χ_2 .

5. Analýza proudění mezerou mezi plochami σ_2 a σ_3^Δ

Hlavním cílem tohoto příspěvku je provést numerickou simulaci proudění stlačitelné vazké tekutiny mezerou vzniklou nekorektním dotykem šroubových ploch σ_2 a σ_3 . Ve skutečnosti je třeba tuto mezeru modelovat jako prostorový případ ve 3D. Tento problém však vzhledem ke své složitosti a i výpočtové časové náročnosti zjednodušíme. V prvním přiblížení se omezíme pouze na simulaci proudění média v jednotlivých čelních řezech mezery. K tomu využijeme čelních řezů ukázaných na obr. 6 a sestojíme posloupnost rovinných výpočtových oblastí $\Omega_k \subset \mathbb{R}^2$ s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega_k = \partial\Omega_{kI} \cup \partial\Omega_{kO} \cup \partial\Omega_{kW}$, kde $\partial\Omega_{kI}$ představuje vstup, $\partial\Omega_{kO}$ je výstup z oblasti a $\partial\Omega_{kW} = \partial\Omega_{kWH} \cup \partial\Omega_{kWD}$ je hranice výpočtové oblasti Ω_k tvořená pevnou nepropustnou stěnou. $\partial\Omega_{kWH}$ odpovídá profilu p_2 , který tvoří horní křivku rovinného modelu mezery, a $\partial\Omega_{kWD}$ přísluší profilu p_3^Δ tvořícího dolní křivku rovinného modelu mezery v k -tém čelním řezu. Z geometrie výpočtové oblasti v čelním řezu odpovídajícímu poloze $\psi_{3L} = -1.7$, obr. 7, je zřejmé, že se jedná o velmi úzkou mezeru, jejíž šířka v nejužším místě je srovnatelná

s velikostí posunutí osy o_3 popisované v odstavci 3. Jedná se tedy o proudění s relativně nízkým Reynoldsovým číslem, a proto v dalším předpokládáme laminární proudění.

Nechť $(0, T)$ je časový interval. Matematický model laminárního proudění stlačitelné vazké tekutiny je tvořen nelineárním konzervativním systémem Navierových-Stokesových (NS) rovnic. V bezrozměrovém tvaru je tento systém v kartézské souřadnicové soustavě pro řešení 2D problémů vyjádřen jako

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{w})}{\partial y} = \frac{1}{Re_\infty} \left[\frac{\partial \mathbf{f}_v(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}_v(\mathbf{w})}{\partial y} \right] \quad \text{v } \Omega_k \times (0, T). \quad (8)$$

Pro vektor $\mathbf{w}$ konzervativních proměnných a kartézské složky $\mathbf{f}(\mathbf{w})$, $\mathbf{g}(\mathbf{w})$ nevazkého a $\mathbf{f}_v(\mathbf{w})$, $\mathbf{g}_v(\mathbf{w})$ vazkého konzervativního toku platí

$$\mathbf{w} = (\varrho, \varrho u, \varrho v, E)^T, \quad (9)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}) = (\varrho u, \varrho u^2 + p, \varrho uv, (E + p)u)^T, \quad \mathbf{g}(\mathbf{w}) = (\varrho v, \varrho uv, \varrho v^2 + p, (E + p)v)^T, \quad (10)$$

$$\mathbf{f}_v(\mathbf{w}) = (0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x)^T, \quad \mathbf{g}_v(\mathbf{w}) = (0, \tau_{yx}, \tau_{yy}, u\tau_{yx} + v\tau_{yy} - q_y)^T, \quad (11)$$

kde t je čas, ϱ hustota, p statický tlak, E celková energie tekutiny vztažená na jednotku objemu a u, v jsou kartézské složky vektoru rychlosti $\mathbf{v}$. Složky symetrického tenzoru vazkých napětí $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yy}$ mají v případě laminárního proudění newtonovské tekutiny při běžném rozsahu tlaků a teplot tvar

$$\tau_{xx} = \eta \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{xy} \equiv \tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = \eta \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

kde η je dynamická vazkost. Konzervativní systém NS rovnic (8) doplníme termickou stavovou rovnicí $p = p(\varrho, T)$, která je v případě ideálního plynu vyjádřena jako

$$p = \varrho r T = (\kappa - 1) \varrho c_v T, \quad (12)$$

kde T je termodynamická teplota, $r = c_p - c_v$ je měrná plynová konstanta, c_p a c_v jsou měrné tepelné kapacity při konstantním tlaku a při konstantním objemu a $\kappa = 1.4$ je tzv. Poissonova konstanta. Celková energie E vztažená na jednotku objemu uvažované proudící tekutiny je potom dána vztahem $E = \frac{p}{\kappa - 1} + \frac{1}{2} \varrho |\mathbf{v}|^2$. Složky vektoru tepelného toku q_x, q_y v (11) je možné zapsat jako

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \equiv -\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{\eta}{Pr} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\varrho} \right), \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \equiv -\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{\eta}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\varrho} \right),$$

kde k je součinitel tepelné vodivosti, $Pr = c_p \eta / k$ je laminární Prandtlovo číslo, které v případě ideálního plynu nabývá hodnoty 0,72 a $Re_\infty = \varrho_{ref} u_{ref} l_{ref} / \eta_{ref}$ je referenční Reynoldsovo číslo. Nechť dále dynamická vazkost η a součinitel tepelné vodivosti k tekutiny jsou konstantní. Účinek vnějších objemových sil na tekutinu neuvažujeme.

Nelineární konzervativní systém NS rovnic v bezrozměrovém tvaru (8) je diskretizován pomocí "cell-centred" metody konečných objemů na strukturované čtyřúhelníkové síti, (Vimr, 2002). Numerické řešení nevazké části konzervativního systému NS rovnic (8) je provedeno užitím explicitního dvoukrokového TVD MacCormackova schématu v Causonově úpravě zapsaného pro metodu konečných objemů na strukturované čtyřúhelníkové síti, (Causon, 1989).

Aproximace vazké části systému NS rovnic (8) je přičtena k prediktorovému a ke korektorovému kroku MacCormackova schématu. Tedy

$$\mathbf{w}_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{w}_{ij}^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_{ij}|} \sum_{m=1}^4 (\mathbf{f}_m^n S_m^x + \mathbf{g}_m^n S_m^y) + \frac{\Delta t}{|\Omega_{ij}|} \text{Visc}(\mathbf{w}_{ij}^n), \quad (13)$$

$$\overline{\mathbf{w}_{ij}^{n+1}} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{w}_{ij}^n + \mathbf{w}_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{|\Omega_{ij}|} \sum_{m=1}^4 (\mathbf{f}_m^{n+\frac{1}{2}} S_m^x + \mathbf{g}_m^{n+\frac{1}{2}} S_m^y) \right\} + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{|\Omega_{ij}|} \text{Visc}(\mathbf{w}_{ij}^{n+\frac{1}{2}}), \quad (14)$$

$$^{(TVD)} \mathbf{w}_{ij}^{n+1} = \overline{\mathbf{w}_{ij}^{n+1}} + d\mathbf{w}_{ij}^{1n} + d\mathbf{w}_{ij}^{2n}, \quad (15)$$

kde $^{(TVD)} \mathbf{w}_{ij}^{n+1}$ je opravené numerické řešení v čase t_{n+1} , $|\Omega_{ij}|$ představuje obsah čtyřúhelníkového kontrolního objemu Ω_{ij} a kartézské složky $\mathbf{f}_m$ a $\mathbf{g}_m$ nevazkých numerických toků stranami Γ_{ij}^m , $m = 1, \dots, 4$, kontrolního objemu Ω_{ij} jsou v čase t_n vyčísleny jako

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1^n &= \mathbf{f}(\mathbf{w}_{i+1j}^n), & \mathbf{f}_2^n &= \mathbf{f}(\mathbf{w}_{ij+1}^n), & \mathbf{f}_3^n &\equiv \mathbf{f}_4^n = \mathbf{f}(\mathbf{w}_{ij}^n), \\ \mathbf{g}_1^n &= \mathbf{g}(\mathbf{w}_{i+1j}^n), & \mathbf{g}_2^n &= \mathbf{g}(\mathbf{w}_{ij+1}^n), & \mathbf{g}_3^n &\equiv \mathbf{g}_4^n = \mathbf{g}(\mathbf{w}_{ij}^n) \end{aligned}$$

a v čase $t_{n+\frac{1}{2}}$ jako

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1^{n+\frac{1}{2}} &\equiv \mathbf{f}_2^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}(\mathbf{w}_{ij}^{n+\frac{1}{2}}), & \mathbf{f}_3^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{f}(\mathbf{w}_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}}), & \mathbf{f}_4^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{f}(\mathbf{w}_{ij-1}^{n+\frac{1}{2}}), \\ \mathbf{g}_1^{n+\frac{1}{2}} &\equiv \mathbf{g}_2^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{g}(\mathbf{w}_{ij}^{n+\frac{1}{2}}), & \mathbf{g}_3^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{g}(\mathbf{w}_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}}), & \mathbf{g}_4^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{g}(\mathbf{w}_{ij-1}^{n+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

$\mathbf{S}_m = (S_m^x, S_m^y)^T$ je normálový vektor ke straně Γ_{ij}^m kontrolního objemu Ω_{ij} mající směr jednotkového vektoru vnější normály, přičemž platí: $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}j}$, $\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_{ij+\frac{1}{2}}$, $\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_{i-\frac{1}{2}j}$ a $\mathbf{S}_4 = \mathbf{S}_{ij-\frac{1}{2}}$. Přidaný 1D tlumicí člen $d\mathbf{w}_{ij}^{1n}$ v (15) s umělou vazkostí TVD typu ve směru změny indexu i navržený Causonem, (Causon, 1989), může být zapsán ve tvaru

$$d\mathbf{w}_{ij}^{1n} = [P_{ij}^+ + P_{i+1j}^-](\mathbf{w}_{i+1j}^n - \mathbf{w}_{ij}^n) - [P_{i-1j}^+ + P_{ij}^-](\mathbf{w}_{ij}^n - \mathbf{w}_{i-1j}^n), \quad (16)$$

$$P_{ij}^\pm \equiv P(r_{ij}^\pm) = \frac{1}{2} C(\nu_{ij}) [1 - \Phi(r_{ij}^\pm)], \quad (17)$$

$$r_{ij}^+ = \frac{(\mathbf{w}_{i+1j}^n - \mathbf{w}_{ij}^n, \mathbf{w}_{ij}^n - \mathbf{w}_{i-1j}^n)}{(\mathbf{w}_{i+1j}^n - \mathbf{w}_{ij}^n, \mathbf{w}_{i+1j}^n - \mathbf{w}_{ij}^n)}, \quad r_{ij}^- = \frac{(\mathbf{w}_{i+1j}^n - \mathbf{w}_{ij}^n, \mathbf{w}_{ij}^n - \mathbf{w}_{i-1j}^n)}{(\mathbf{w}_{ij}^n - \mathbf{w}_{i-1j}^n, \mathbf{w}_{ij}^n - \mathbf{w}_{i-1j}^n)}.$$

Funkce $\Phi(r_{ij}^\pm)$ a $C(\nu_{ij})$ ve vztahu (17) jsou definovány následujícím způsobem

$$\Phi(r_{ij}^\pm) = \begin{cases} \min(2r_{ij}^\pm, 1) & \text{pro } r_{ij}^\pm > 0 \\ 0 & \text{pro } r_{ij}^\pm \leq 0 \end{cases}, \quad C(\nu_{ij}) = \begin{cases} \nu_{ij}(1 - \nu_{ij}) & \text{pro } \nu_{ij} \leq \frac{1}{2} \\ 0.25 & \text{pro } \nu_{ij} > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (18)$$

a pro výpočet ν_{ij} užijeme vzorce

$$\nu_{ij} = \frac{\Delta t}{\Delta x_{ij}} (|u_{ij}| + a_{ij}), \quad (19)$$

kde u_{ij} je rychlost ve směru indexu i a a_{ij} je místní rychlost zvuku. Časový krok Δt je dán nutnou CFL podmínkou stability MacCormackova schématu a Δx_{ij} , Δy_{ij} jsou aproximace délek kontrolního objemu Ω_{ij} ve směrech i a j , (Vimr, 2003). Pro přidaný tlumicí člen $d\mathbf{w}_{ij}^{2n}$

ve směru změny indexu j užijeme vztahů (16) – (19), v nichž fixujeme i a posouváme j . Vazké členy $Visc(\mathbf{w}_{ij})$ v prediktorovém (13) a v korektorovém kroku (14) aproximujeme centrálně

$$\begin{aligned} Visc(\mathbf{w}_{ij}) = \frac{1}{Re_\infty} & \left[\mathbf{f}_v(\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}j})S_{i+\frac{1}{2}j}^x + \mathbf{g}_v(\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}j})S_{i+\frac{1}{2}j}^y + \mathbf{f}_v(\mathbf{w}_{ij+\frac{1}{2}})S_{ij+\frac{1}{2}}^x + \right. \\ & + \mathbf{g}_v(\mathbf{w}_{ij+\frac{1}{2}})S_{ij+\frac{1}{2}}^y + \mathbf{f}_v(\mathbf{w}_{i-\frac{1}{2}j})S_{i-\frac{1}{2}j}^x + \mathbf{g}_v(\mathbf{w}_{i-\frac{1}{2}j})S_{i-\frac{1}{2}j}^y + \\ & \left. + \mathbf{f}_v(\mathbf{w}_{ij-\frac{1}{2}})S_{ij-\frac{1}{2}}^x + \mathbf{g}_v(\mathbf{w}_{ij-\frac{1}{2}})S_{ij-\frac{1}{2}}^y \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Výpočet vazkých toků $\mathbf{f}_v$ a $\mathbf{g}_v$ v bodech $(i + \frac{1}{2}, j)$, $(i, j + \frac{1}{2})$, $(i - \frac{1}{2}, j)$ a $(i, j - \frac{1}{2})$ na duální čtyřúhelníkové síti je detailně popsán ve (Vimmr, 2003).

Pro náš konkrétní případ velmi úzké mezery uvažujeme proudění charakterizované relativně nízkým referenčním Reynoldsovým číslem $Re_\infty = 3900$. Na vstupu $\partial\Omega_I$ předepíšeme následující okrajové podmínky v bezrozměrovém tvaru: stagnační tlak $p_{01} = 1$, stagnační teplotu $T_{01} = 1$, úhel náběhu proudu α_1 , $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ a $\tau^{ij}n_j = 0$, $i = 1, 2$. Na výstupu $\partial\Omega_O$ výpočtové oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, obr. 7, je předepsána bezrozměrová hodnota statického tlaku $p_2 = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ a $\tau^{ij}n_j = 0$, $i = 1, 2$. Na pevných nepropustných stěnách $\partial\Omega_{WD}$ a $\partial\Omega_{WH}$ předepisujeme nulové složky vektoru rychlosti $u = 0$, $v = 0$ a dále $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$. Okrajové podmínky jsou voleny tak, aby byl dodržen požadovaný tlakový spád $p_{01}/p_2 = 2$.

Pro naše numerické výpočty jsme užili strukturovanou čtyřúhelníkovou síť o 200×68 buněk, obr. 7. V blízkosti pevných stěn, kde se předpokládá velký vliv vazkosti a kde se tvoří mezní vrstva, je nutné zjemnit výpočtovou síť ve směru kolmém na stěnu profilu, aby bylo dosaženo lepších výsledků v oblasti odtržení mezní vrstvy. Numerické experimenty ukazují, že v případě použití laminárního modelu proudění by se měla výška první buňky na stěně volit v závislosti na Reynoldsově číslu Re podle vztahu

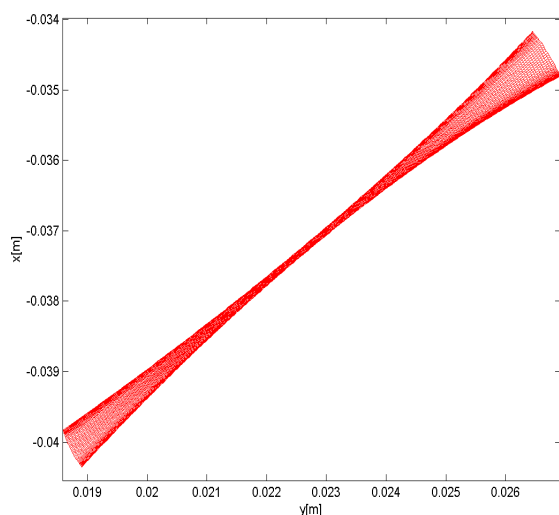
$$\Delta y_1 = 0,05 \cdot \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (21)$$

a výšky dalších buněk v blízkosti pevné stěny by se měly počítat podle předpisu

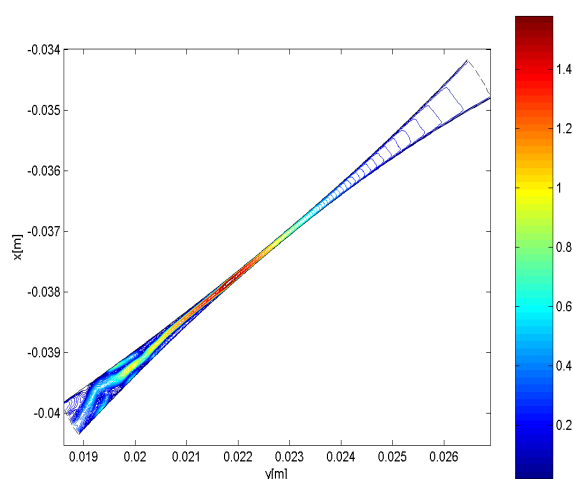
$$\Delta y_{k+1} = (1 + A) \Delta y_k, \quad A > 0. \quad (22)$$

V našem případě jsme položili $A = 0,13$.

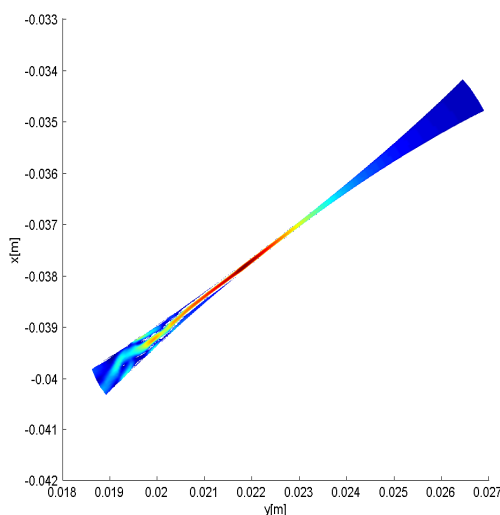
V dalším se omezíme pouze na prezentaci dosažených výsledků numerické simulace laminárního proudění stlačitelné vazké tekutiny ve vybraném čelním řezu mezery, vzniklé nekorektním dotykem šroubových ploch, který odpovídá poloze $\psi_{3L} = -1,7$. Geometrie mezery v tomto řezu je znázorněna na obr. 7. Výsledky numerické simulace v dalších čelních řezech budou prezentovány během konference. Na obr. 8 je ukázáno pole izochar Machova čísla. Izočáry jsou vykresleny po $\Delta M = 0,02$. Průměrné Machovo číslo na vstupu dosahuje hodnoty $M_1 \doteq 0,06$. Z výpočtu je ale zřejmé, že proudění uvažovaným rovinným modelem mezery je nestacionární. Dochází totiž ke změně tvaru vzniklého úplavu a dále se mění hodnota maximálního Machova čísla M_{max} . Ukazuje se však, že trvale platí $M_{max} > 1$ a proudění je tedy transonické. Poznamenejme, že v oblasti, kde je $M > 1$, vůbec nevzniká rázová vlna charakteristická pro transonická a supersonická proudění. Pravděpodobně je to způsobeno tím, že se jedná o vazké proudění ve velmi úzké mezeře. Na obr. 9 je znázorněno rozložení velikosti výsledné rychlosti v uvažovaném rovinném modelu mezery v $[m/s]$. Obr. 10 ukazuje rozložení tlaku v $[Pa]$.



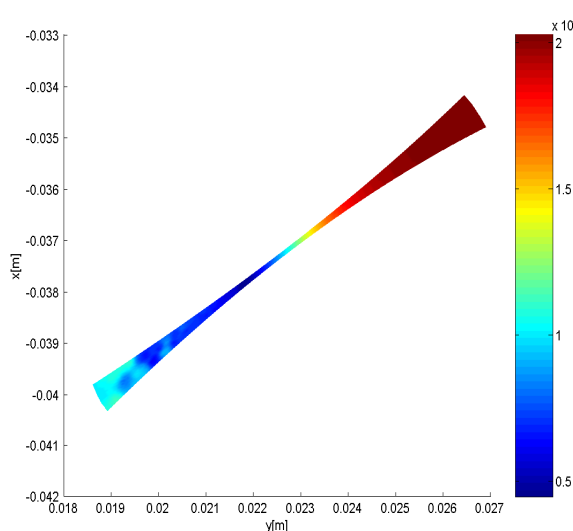
Obr. 7 Strukturovaná čtyřúhelníková síť o 200×68 buňkách.



Obr. 8 Rozložení Machova čísla ve formě izočar po $\Delta M = 0,02$.



Obr. 9 Rozložení výsledné rychlosti v $[m/s]$.



Obr. 10 Rozložení tlaku v $[Pa]$.

6. Závěr

V příspěvku je řešen nekorektní dotyk šroubových ploch, které tvoří spoluzabírající boky zubů a představují vyšší kinematickou dvojici. Nekorektní postavení šroubových ploch, které vznikly přímým obálkovým způsobem, je simulováno paralelním posunutím osy rotace jedné z ploch. Obě plochy, které mají v korektní poloze křivkový dotyk, mají při nekorektním kontaktu bodový dotyk. Je určen bod dotyku a křivky nejmenší vzdálenosti obou ploch pro celou jejich délku, na které jsou definovány.

Byl sestaven výpočtový model mezery v jednotlivých čelních řezech, která vznikne při nekorektním dotyku šroubových ploch a která spojuje prostory s různými tlaky stlačitelného

média. Dále byla provedena numerická simulace proudění stlačitelné vazké tekutiny tímto rovinným modelem velmi úzké mezery. Protože je proudění charakterizováno relativně nízkým Reynoldsovým číslem, bylo pro výpočet užito laminárního modelu proudění. Z výpočtu je zřejmé, že proudění média uvažovaným rovinným modelem mezery je nestacionární a transonické. V blízké budoucnosti bychom chtěli zahrnout do výpočtu některý model turbulence vhodný pro řešení této třídy problémů a simulovat tak turbulentní proudění.

7. Poděkování

Tato práce vznikla za finanční podpory *grantového projektu GA ČR 101/03/P090 a výzkumného záměru MSM 235200003*, za kterou autoři děkují.

8. Literatura

- Brát, V. (1981) *Maticové metody v analýze a syntéze prostorových vázaných mechanických systémů*. ACADEMIA, Praha, str. 136–145.
- Causon, D. M. (1989) High Resolution Finite Volume Schemes and Computational Aerodynamics, in: *Nonlinear Hyperbolic Equations - Theory, Computation Methods and Applications*, Vol. 24 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vieweg, Braunschweig, pp. 63–74.
- Kauder, K. & Unwerth, I. (1998) Die Heissgasschraubenmaschine Simulationsgestützte Auslegung - Teil 3. *Schraubenmaschinen*, Nr.6 (1998), Dortmund, pp. 70–84.
- Švígler, J. & Vimmr, J. (2001) Incorrect contact of screw surfaces constituting a plane higher kinematic pair, in: *CD-ROM Proc. of national conference with international patitipation Engineering Mechanics 2001*, Svratka.
- Vimmr, J. (2002) *Matematické modelování proudění stlačitelné tekutiny ve vnitřní aerodynamice*. Doktorská disertační práce, ZČU v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Plzeň.
- Vimmr, J. (2003) A treatise on numerical computation of non-stationary laminar compressible flow, in: *Proc. of the 19th conference with international patitipation Computational Mechanics 2003*, Nečtiny, pp. 483–494.