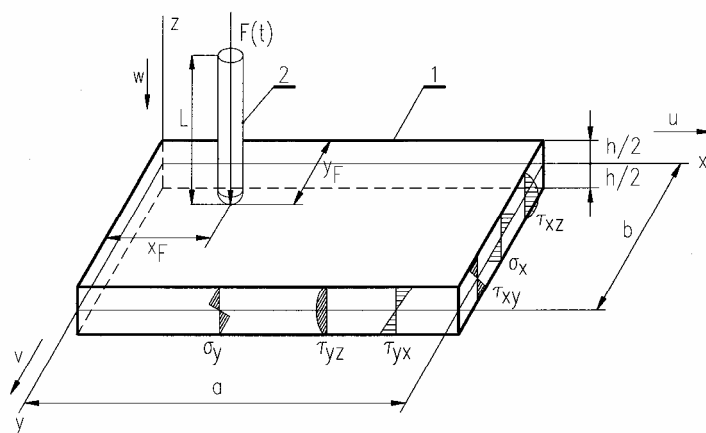


TRANSVERSALE IMPACT OF ELASTIC ROD ON THIN ELASTIC ORTHOTROPIC RECTANGULAR PLATE II (FLÜGGE'S AND TIMOSHENKO-MINDLIN'S MODELS)

J. Volek¹, J. Soukup², J. Šimsová³

Summary: *In relation to previously published solution of non-stationary state of stress in elastic plate excited by singular force [2] and the solution of transversale impact an elastic thin rod on thin elastic isotropic and orthotropic rectangular plate including rotary inertia [1], the solution of the analogous problem, but this time including rotary inertia and shear stress is published here.*

Předpoklady a metodika řešení příčného rázu pružné tyče na obdélníkovou desku jsou zřejmé z příspěvků [1], [2]. Výchozí podmínkou je rovnost posuvů koncového bodu tyče – razníku $w_t(t)$ a posuvu $w(x_F, y_F, t)$ desky v místě rázu, při respektování dotykové deformace Hertzovým vztahem w_d .



Obr. 1 Schéma vyšetřovaného modelu

Posuv koncového bodu tyče $w_t(t)$ je dán superpozicí posuvu tuhého a deformovatelného tělesa

$$w_t(t) = \psi(t) - w(L_F, t)$$

kde

¹ PhDr. Ing. Jan Volek, Staňkovice 7, 412 01 Litoměřice

² Ing. Josef Soukup, CSc., Ústav techniky a řízení výroby UJEP, Na Okraji 1001, 400 96 Ústí n. L., e-mail: soukupi@utrv.ujep.cz

³ RNDr. Jana Šimsová, Fakulta sociálně ekonomická UJEP, Moskevská 54, 40096 Ústí n. L., tel.: 475 284 611, e-mail: simsovi@quick.cz

$$w(L_F, t) = \frac{1}{m_2} \int_0^t F(\tau)(t - \tau)d\tau + \frac{2}{m_2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_j(t - \tau)d\tau$$

kde funkce popisující volný pád tyče

$$\psi(t) = v_0 t + \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Dotyková deformace podle Hertzova vzorce pro kulový vrchlík tyče a horní lící rovnu desky

$$w_d = k_d [F(\tau)]^\delta$$

Podstatný vliv na řešení procesu rázu, např. na hledaný průběh rázové síly $F(t)$, má určení posuvu dotykového bodu $w(x_F, y_F, t)$ jako důsledek celého vlnového procesu přetvoření desky. Nejdříve byl řešen příčný ráz na desku elastickou izotropní pro model desky Kirchhoffův – mK, Rayleighův – mR, Flüggeův – mF a model Timoshenko-Mindlinův – mTM [1]. Dále byl řešen příčný ráz tyče na desku elastickou ortotropní pro modely mK a mR [2].

Vypočtené časové průběhy posuvu u , ale i rychlosti $\dot{u}$ pro tyto modely ortotropní desky při impulsu ve tvaru Heavisideho skokové funkce vykazují pro časy větší než 5 μ s, resp. 10 μ s shodu s výsledky získanými pomocí MKP [2], [3]. Lze předpokládat, že pro model Flüggeův a model Timoshenko-Mindlinův bude shoda ještě lepší.

Pro všechny typy modelů je možno pohybové rovnice prvku zapsat jako funkce posuvu w ve směru z a natočení φ_x a φ_y ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \kappa_{11} \Delta w + \kappa_{12} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \kappa_{13} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} &= \kappa_p \cdot p(x, y, t) \\ \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} + \kappa_{21} \frac{\partial w}{\partial x} + \kappa_{12} \frac{\partial w}{\partial x} + \kappa_{22} \left[1 + \kappa_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \varphi_x + \kappa_{23} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} + \kappa_{31} \frac{\partial w}{\partial x} + \kappa_{32} \frac{\partial w}{\partial x} + \kappa_{32} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + \kappa_{33} \left[1 + \kappa_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \kappa_{yx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \varphi_y &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

kde koeficienty κ_{ij} jsou funkcemi rychlosti šíření smykových, respektive dilatačních elastických vln v daném prostředí [5]. Soustava rovnic (1) popisuje proces přetváření pro model mTM, model mF zanedbává setrvačné momenty vlivem natočení prvku

$$\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} = 0$$

Řešení soustavy je možné hledat Fourierovou metodou ve tvaru

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W(t) \cdot X_w(x) \cdot Y_w(y)$$

$$\varphi_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_x(t) \cdot X_x(x) \cdot Y_x(y) \quad (2)$$

$$\varphi_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_y(t) \cdot X_y(x) \cdot Y_y(y)$$

Funkce souřadnic $X_i(x)$ a $Y_i(y)$ musí vyhovovat okrajovým podmínkám desky. Dále je uvažována deska po obvodě prostě uložená. Těmto podmínkám vyhovuje soustava funkcí

$$X_w(x) = \sin \alpha x \quad Y_w(y) = \sin \beta y \quad \alpha = \frac{n\pi}{a}$$

$$X_x(x) = \cos \alpha x \quad Y_x(y) = \sin \beta y \quad \beta = \frac{m\pi}{b} \quad (3)$$

$$X_y(x) = \sin \alpha x \quad Y_y(y) = \cos \beta y$$

Po dosazení těchto funkcí do rovnic (2) a pak do soustavy rovnic (1) po provedení skalárního součinu, vzhledem k ortogonálnosti funkcí souřadnic, se získají rovnice [5].

$$\text{Pro model Flügggeův } \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2} + a_{11}W(t) + a_{12}\Phi_x(t) + a_{13}\Phi_y(t) = k_F F(t)$$

$$a_{21}W(t) + a_{22}\Phi_x(t) + a_{23}\Phi_y(t) = 0 \quad (4)$$

$$a_{31}W(t) + a_{32}\Phi_x(t) + a_{33}\Phi_y(t) = 0$$

kde koeficient [2]

$$k_F = \frac{1}{\rho \cdot h} \cdot \frac{\int_0^a \int_0^b p(x, y) \cdot X_w(\alpha x) \cdot Y_w(\beta y) \cdot dx dy}{\int_0^a \int_0^b [X_w(\alpha x) \cdot Y_w(\beta y)]^2 \cdot dx dy}$$

Z druhé a třetí rovnice [5]

$$\Phi_x(t) = b_2.W(t) \quad \Phi_y(t) = b_1.W(t) \quad (4a)$$

Po dosazení vztahů (4a) do první rovnice (4)

$$\frac{d^2 W(t)}{dt^2} + \omega_F^2 W(t) = k_F.F(t) \quad \text{kde } \omega_F^2 = a_{11} + a_{12}b_2 + a_{13}b_1$$

Řešení této rovnice je funkce

$$W(t) = \frac{k_F}{\omega_F} \int_0^t F(\tau). \sin \omega_F(t - \tau) d\tau$$

a podle (4a)

$$\Phi_x(t) = \frac{k_F.b_2}{\omega_F} \int_0^t F(\tau). \sin \omega_F(t - \tau) d\tau \quad \Phi_y(t) = \frac{k_F.b_1}{\omega_F} \int_0^t F(\tau). \sin \omega_F(t - \tau) d\tau$$

Pomocí těchto vztahů se upraví rovnice (2)

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_F}{\omega_F} \sin \alpha x. \sin \beta y \int_0^t F(\tau). \sin \omega_F(t - \tau) d\tau \\ \varphi_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_F.b_2}{\omega_F} \cos \alpha x. \sin \beta y \int_0^t F(\tau). \sin \omega_F(t - \tau) d\tau \\ \varphi_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_F.b_1}{\omega_F} \sin \alpha x. \cos \beta y \int_0^t F(\tau). \sin \omega_F(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

Parametr k_F závisí na konkrétním případě působení síly $F(t)$ na horní lící ploše desky. V případě, že vnější zatížení působí ve tvaru rotačního paraboloidu s poloměrem c - [2],

$$k_F = \frac{16}{a.b.\rho.h.c^2} \sin \alpha x_F. \sin \beta y_F. \frac{J_2(\gamma_{mn}c)}{\gamma_{mn}^2} \quad \text{kde} \quad \gamma_{mn}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

a posuv desky w v místě rázu

$$w(x_F, y_F, t) = \frac{16}{a.b.c^2.\rho.h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_{mn}c)}{\gamma_{mn}^2.\omega_F} \cdot \sin^2 \alpha x_F. \sin^2 \beta y_F. \int_0^t F(\tau) \sin \omega_F(t - \tau) d\tau$$

Podobným postupem se pomocí vztahů (2) a (3) upraví pohybové rovnice (1) pro mTM do tvaru

$$\mathbf{E} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_i(t) + \mathbf{K} \mathbf{y}_i(t) = k_F F_i(t) \quad \text{pro } i=1, 2, 3 \quad (6)$$

kde $y_i(t) = W(t)$, $\Phi_x(t)$, $\Phi_y(t)$. Aplikací Laplaceovy transformace dostaneme soustavu algebraických rovnic pro mTM ve tvaru

$$(\mathbf{E}p^2 + \mathbf{K}) \bar{\mathbf{y}}_i(p) = k_F \bar{F}_i(p) \quad \text{pro } i=1,2,3 \quad (7)$$

kde $\bar{y}_i(p)$ a $\bar{F}_i(p)$ jsou obrazy funkcí $y_i(t)$ a $F_i(t)$. Řešením soustavy rovnic (7) Cramerovým pravidlem

$$\bar{W}(p) = k_F \bar{F}(p) \frac{D_w(p)}{D(p)} \quad \bar{\Phi}_x(p) = k_F \bar{F}(p) \frac{D_x(p)}{D(p)} \quad \bar{\Phi}_y(p) = k_F \bar{F}(p) \frac{D_y(p)}{D(p)} \quad (8)$$

kde determinant soustavy (7) je možno vyjádřit polynomem

$$D(p) = \sum_{i=0}^3 A_{2(3-i)} \cdot p^{2(3-i)} \quad (9)$$

kde koeficienty $A_{2(3-i)}$ jsou dány vztahy

$$A_6 = 1 \quad A_4 = \sum_{i=1}^3 a_{ii} \quad A_2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \quad A_0 = \det \mathbf{K}$$

Podobně lze vyjádřit i doplňky determinantů rozšířené soustavy. Polynom odpovídající determinantu (9) je možno vyjádřit vztahem

$$\sum_{i=0}^3 A_{2(3-i)} p^{2(3-i)} = \prod_{i=1}^3 (p^2 + \omega_i^2) \quad (10)$$

kde ω_i^2 jsou nulové body frekvenční rovnice [5]

$$\omega_i^6 - A_4 \omega_i^4 + A_2 \omega_i^2 - A_0 = 0 \quad (10a)$$

Poměry determinantů v soustavě (8) jsou ryze racionální lomené funkce. Lze je vyjádřit jako součet tří parciálních zlomků pomocí metody neurčitých koeficientů [5]. Tím je možno obrazy funkcí (8) vyjádřit vztahy

$$W(p) = k_F \bar{F}(p) \sum_{j=1}^3 \frac{A_j}{p^2 + \omega_j^2}$$

$$\bar{\Phi}_x(p) = k_F \bar{F}(p) \sum_{j=1}^3 \frac{B_j}{p^2 + \omega_j^2} \quad \bar{\Phi}_y(p) = k_F \bar{F}(p) \sum_{j=1}^3 \frac{C_j}{p^2 + \omega_j^2}$$

Zpětnou transformací dostaneme vztahy

$$W(t) = k_F \sum_{j=1}^3 \frac{A_j}{\omega_j} \int_0^t F(\tau) \cdot \sin \omega_j(t - \tau) d\tau$$

$$\Phi_x(t) = k_F \sum_{j=1}^3 \frac{B_j}{\omega_j} \int_0^t F(\tau) \cdot \sin \omega_j(t - \tau) d\tau$$

$$\Phi_y(t) = k_F \sum_{j=1}^3 \frac{C_j}{\omega_j} \int_0^t F(\tau) \cdot \sin \omega_j(t - \tau) d\tau$$

Dosazením těchto vztahů do rovnice (2) se získá řešení soustavy (1) pro model mTM

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k_F \sin \alpha x \cdot \sin \beta y \sum_{j=1}^3 \frac{A_j}{\omega_j} \int_0^t F(\tau) \cdot \sin \omega_j(t - \tau) d\tau$$

$$\varphi_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k_F \cos \alpha x \cdot \sin \beta y \sum_{j=1}^3 \frac{B_j}{\omega_j} \int_0^t F(\tau) \cdot \sin \omega_j(t - \tau) d\tau$$

$$\varphi_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k_F \sin \alpha x \cdot \cos \beta y \sum_{j=1}^3 \frac{C_j}{\omega_j} \int_0^t F(\tau) \cdot \sin \omega_j(t - \tau) d\tau$$

Posuv w desky v místě rázu pro mTM

$$w(x_F, y_F, t) = \frac{16}{a \cdot b \cdot \rho \cdot h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\gamma_{mn} c)}{\gamma_{mn}^2} \sin^2 \alpha x_F \cdot \sin^2 \beta y_F \sum_{j=1}^3 \frac{A_j}{\omega_j} \int_0^t F(\tau) \cdot \sin \omega_j(t - \tau) d\tau$$

určením posuvu $w = w(x_F, y_F, t)$ se z výchozí podmínky rovnosti posuvů obou těles v místě rázu

$$w_d(t) = w_t(t) - w(x_F, y_F, t)$$

získá integrální rovnice pro určení rázové síly

$$k_d \cdot [F(t)]^\delta = \Psi(t) - \int_0^t F(\tau) \cdot K(t - \tau) d\tau \quad \text{pro } K(t) = w(L_F; t) + w(x_F, y_F, t)$$

Numerická řešení integrální rovnice [2] umožní výpočet složek posuvů, rychlostí a napětí.

Např.: Složky posuvů [5]

ve směru x

$$u = -z \cdot \varphi_x$$

ve směru y

$$v = -z \cdot \varphi_y$$

Složky napětí [5]

$$\sigma_x = \frac{-z.E_x}{1-\mu_{xy}\cdot\mu_{yx}} \left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + \mu_{yx} \frac{\partial\varphi_y}{\partial y} \right) \quad \sigma_y = \frac{-z.E_y}{1-\mu_{xy}\cdot\mu_{yx}} \left(\frac{\partial\varphi_y}{\partial y} + \mu_{xy} \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} \right)$$

Složky smykových napětí [5]

$$\tau_{xy} = -z.G_{xy} \left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2z}{h} \right)^2 . G_{xz} . h . k \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_x \right)$$

$$\tau_{yz} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2z}{h} \right)^2 . G_{yz} . h . k \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_y \right)$$

Uvedeným postupem je možno určit všechny veličiny popisující proces přetvoření desky při příčném rázu.

Literatura:

- [1] Volek, J., Soukup, J., Karásek, V.: *Transversale Impact of Elastic rod on thin Elastic Rectangular Plate*. In.: Sborník Inženýrská mechanika 2002, Svratka 5/2002
- [2] Volek, J., Soukup, J.: *Transversale Impact of Elastic rod on thin Elastic Isotropic and Orthotropic Rectangular Plate*. In.: Sborník Inženýrská mechanika 2003, Svratka 5/2003
- [3] Volek, J., Červ, J., Valeš, F.: *Vlny v tenké ortotropní elastické desce (model Kirchhoffův a Rayleighův) generované příčným pulsním zatížením*. In.: Sborník Výpočtová mechanika 2003, Nečtiny 11/2003
- [4] Valeš, F., Červ, J., Volek, J.: *Napjatost tenké ortotropní elastické desky vyvolaná příčným pulsním zatížením (model Kirchhoffův a Rayleighův)*. In.: Sborník I. konference Dynamika tuhých a deformovatelných těles. ÚTŘV UJEP Ústí n. L. 2003 (v tisku)
- [5] Volek, J.: *Odvození vztahů pro posuvy, rychlosti a napětí v tenké ortotropní elastické desce s příčně působícím zatížením na jedné lícni ploše II. Model Flügeův a model Timoshenko-Mindlinův*. Bulletin vědeckých, výzkumných a pedagogických prací ústavu za rok 2003, ÚTŘV UJEP Ústí n. L. 2004 (v tisku)