ENGINEERING MECHANICS 2004
NATIONAL CONFERENCE
with international participation
Svratka, Czech Republic, 10 - 13 May 2004

DYNAMIC RESPONSE OF THE LAGRANGE AND TIMOSHENKO BEAM ON THE MOVING LOAD

L. Pečínka*

Summary: *In our previous papers has been analysed the influence of moving load (fluid flow with high velocity) on the Euler-Bernoulli type of straight beam. We have concluded that in normal and accidental operational conditions the reliability of NPPs piping is not significant influenced. In this paper the similar analyses have been performed for Lagrange and Timoshenko type of beams. The results of calculations are compared with Euler-Bernoulli theory.*

1. Úvod

V předchozích pracích Pečínka & Krásný 2003 a, b bylo analyzováno chování potrubí protékaného proudem média o vysoké rychlosti; Pohybová rovnice vycházela z Euler-Bernoulliho (dále jen E-B) teorie přímého nosníku. Na základě numerické studie parametrů $\gamma_1 = \left(m_M\, U^2 + p\, A - S\right) \times L^2 / (E J)$ a $\gamma_2 = 2\, m_M\, U L \left(m_T\, E J\right)^{-1/2}$ bylo dokázáno, že pro standardně navržená potrubí lze jejich chování v normálních i havarijních provozních režimech jaderných elektráren označit jako spolehlivé, tj. splňující projektem stanovené funkce. V dalším je na základě metody, popsané v Pečínka & Krupa 2002, proveden rozbor Lagrangeova a Timoshenkova (dále jen L, T) typu nosníku.

2. Lagrangeův nosník – přejezd břemene

Pohybová rovnice má tvar

$$E J \frac{\delta^4 w}{\delta x^4} + \rho J \frac{\delta^4 w}{\delta x^2 \delta t^2} + M \frac{\delta^2 w}{\delta t^2} + \mu_Q U^2 \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \mu_Q \frac{\delta^2 w}{\delta t^2} = Q \qquad (1)$$

Standardním rozvojem dle nosníkových funkcí $w(x,t) = \sum_m F_m(x)\, q_m(t)$, dosazením do rovnice (1) a integrací přes celou délku nosníku dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru

* Ing. Ladislav Pečínka, CSc., Ústav jaderného výzkumu Řež a.s., Husinec-Řež, čp. 130, PSČ 250 68; Tel.: 266 172 610, fax: 220 940 519, e-mail: pel@ujv.cz

$$\left[\left(M+\mu_Q\right)+\rho\ J\frac{\int_0^L F_m''(x)F_m(x)\,dx}{\int_0^L F_m^2(x)\,dx}\right]\ddot{q}_m(t)+k_m^{red}\ q_m(t)=\frac{Q}{\int_0^L F_m^2(x)\,dx}\int_0^L F_m(x)\,dx \quad (2)$$

kde

$$k_m^{red}=\frac{1}{\int_0^L F_m^2(x)\,dx}\left[EJ\int_0^L F_m^{IV}(x)F_m(x)\,dx+\mu_Q\,U^2\int_0^L F_m''(x)F_m(x)\,dx\right] \quad (3)$$

Odtud lze odvodit, že rovnice pro vlastní frekvenci má tvar

$$\left(\omega_m^2\right)^{red}=\frac{\omega_{0m}^2}{1+\kappa_B+\kappa_L}\left(1+\kappa_B\ \beta_m\right) \quad (4)$$

kde

ω_{0m}	je m-tá vlastní frekvence nosníku nezaplněného médiem,
ω_m^{red}	je m-tá vlastní frekvence nosníku s uvážením vlivu proudu kapaliny,
$\kappa_B=\mu_Q/M$	respektuje přídavnou hmotnost kapaliny shodně s E-B nosníkem,
κ_L	respektuje vliv natočení v rovnici (1) po normování k M; je vždy záporný,
β_m	respektuje shodně s Pečínka & Krupa 2002 vliv protékajícího média, je funkcí okrajových podmínek a je vždy záporný.

Rovnici (4) lze přepsat do tvaru

$$\left(\omega_m^2\right)^{red}=\omega_{0m}^2\ \varphi \qquad\qquad \varphi=\frac{1+\kappa_B\ \beta_m}{1+\kappa_B+\kappa_L} \quad (5)$$

kde φ je redukční frekvenční koeficient. Vzhledem k tomu, že je vždy $\beta_m<0$, protékající médium snižuje hodnotu vlastní frekvence až na nulu. Pro $\left(\omega_m^2\right)^{red}<0$ nastává vzpěr.

S cílem objasnit rozdíl mezi E-B a L nosníkem byla provedena numerická studie hodnot koeficientů φ_B a φ_L pro potrubí ø 32 × 3,5, L = 2,5 m a ø 630 × 25, L = 6 m v rozsahu rychlostí až po $\varphi \doteq 0$ a to pro vodu s $\rho=1000\,kg/m^3$ a páru 7,8 MPa, 280°C, tj. $\rho=50\,kg/m^3$. Uvažována byla okrajová podmínka podpora – podpora a první tvar kmitu, pro který platí $\beta_1=-U^2/c_{01}^2$, $c_{01}=2L\,f_{01}$. Výsledky jsou uvedeny v následujících tabulkách T1 až T4.

Tabulka T1: ø 630 × 25, L = 6 m
voda $\kappa_B=0{,}708$, $\kappa_L=-0{,}01272$

U/c_{01}	0	1	1,1	1,18
φ_B	0,58548	0,17096	0,083911	8,302576 E-3
φ_L	0,589973	0,172243	0,08454	8,3648719 E-3
φ_L/φ_B	1,007674	1,0075047	1,0075032	1,00750032

Tabulka T2: ø 630 × 25, L = 6 m

pára $\kappa_B = 0{,}0354, \quad \kappa_L = -0{,}01272$

U/c$_{01}$	0	2	4	5	5,31
φ_B	0,96501	0,82905	0,4187753	0,0111681	1,7945325 E-3
φ_L	0,977823	0,8393632	0,42399	0,0124496	1,8168538 E-3
φ_L / φ_B	1,01244	1,012438	1,02428	1,0124379	1,0124379

Tabulka T3: ø 32 × 3,5, L = 2,5 m

voda $\kappa_B = 0{,}1716, \quad \kappa_L = -0{,}171328\, E-3$

U/c$_{01}$	0	1	2	2,414
φ_B	0,8535336	0,7070672	0,2676681	1,6086 E-3
φ_L	0,8536584	0,7071706	0,2677072	1,608839 E-3
φ_L / φ_B	1,0001462	1,0001462	1,0001462	1,0001462

Tabulka T4: ø 32 × 3,5, L = 2,5 m

pára $\kappa_B = 8{,}674\, E-3, \quad \kappa_L = -0{,}171328\, E-3$

U/c$_{01}$	0	4	8	10	10,73
φ_B	0,9914	0,85381	0,4410384	0,13146	1,3257261 E-3
φ_L	0,9915453	0,853955	0,4411133	0,131482	1,3258514 E-3
φ_L / φ_B	1,0001461	1,00017	1,0001698	1,00017	1,00017

Pro výpočet vynuceného kmitání nutno rovnici (2) upravit do tvaru

$$\ddot{q}_m + \left(\omega_m^2\right)^{red} q_m = \frac{1}{M} \frac{Q}{1+\kappa_B+\kappa_L} \frac{2L}{m\,\pi} \frac{1}{\int\limits_0^L F_m^2\left(x\right) d\,x} \tag{6}$$

Za předpokladu nulových počátečních podmínek, okrajové podmínky podpora – podpora a omezíme-li se pouze na první tvar kmitu, dostaneme jako výsledek

$$q_1 = \frac{Q}{k_1^{(EJ)}} \frac{4}{\pi} \frac{1+\kappa_B+\kappa_L}{1+\kappa_B\,\beta_1} \tag{7}$$

kde

$$k_1^{(EJ)} = \frac{1}{\int\limits_0^L F_1^2\left(x\right) d\,x} EJ \int\limits_0^L F_1^{IV}\left(x\right) F_1\left(x\,d\,x\right) \tag{8}$$

Protože ale $Q / k_1^{(EJ)} = q_{st}$, lze rovnici (7) upravit do tvaru

$$q_1 = q_{st} \frac{4}{\pi} \frac{1+\kappa_B+\kappa_L}{1+\kappa_B\,\beta_1}$$

$$= q_{st} \frac{4}{\pi} \frac{1}{\varphi} = q_{st} \frac{4}{\pi} \Phi \qquad \Phi = \frac{1}{\varphi} \tag{9}$$

přičemž q_{st} je statická deformace a Φ je tzv. amplifikační koeficient, který v důsledku průtoku zvyšuje odezvu.

Vzhledem k tomu, že amplifikační koeficient $\Phi = 1/\varphi$, lze jeho numerické hodnoty zcela jednoduše odvodit z tabulek T1 ÷ T4.

Dílčí závěr:

Numerickým rozborem pro typické velké potrubí ø 630 × 25 a impulzní potrubí ø 32 × 3,5, zaplněného proudící vodou nebo parou, bylo prokázáno, že jak z hlediska výpočtů vlastních frekvencí, tak i vynuceného kmitání, je rozdíl mezi E-B a L typem nosníku zanedbatelný. Nepatrná odlišnost je pouze u velkých parních potrubí, kde E-B nosník má maximálně o 1,3% vyšší odezvu, než nosník Lagrangeův.

3. Timoshenkův nosník – přejezd břemene

Pohybová rovnice má dle Brepta & Půst & Turek 2004 tvar

$$EJ\,\frac{\delta^4 w}{\delta x^4} + \rho A\,\frac{\delta^2 w}{\delta t^2} - \rho J\left[1 + 2\,\frac{1+\mu}{\alpha}\right]\frac{\delta^4 w}{\delta x^2\,\delta t^2} + \frac{\rho^2}{\alpha}\,\frac{J}{G}\,\frac{\delta^4 w}{\delta t^4} = 0 \tag{10}$$

Po zavedení pohyblivého zatížení na pravou stranu viz Pečínka & Krupa 2002 a zanedbáním Coriolisova zrychlení se vztah (10) změní na

$$EJ\,\frac{\delta^4 w}{\delta x^4} + \mu_Q U^2\,\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} - \rho J\left[1 + 2\,\frac{1+\mu}{\alpha}\right]\frac{\delta^4 w}{\delta x^2\,\delta t^2} + \left(M + \mu_Q\right)\frac{\delta^2 w}{\delta t^2} + \frac{\rho^2}{\alpha}\,\frac{J}{G}\,\frac{\delta^4 w}{\delta t^4} = Q \tag{11}$$

Standardním rozvojem dle nosníkových funkcí $w(x,t) = \sum_m F_m(x)\,q_m(t)$ a integrací přes celou délku nosníku dostaneme po jednoduchých úpravách pohybovou rovnici ve tvaru

$$\ddot{\ddot{q}}_m(t) + \left[\frac{M+\mu_Q}{\frac{\rho^2}{\alpha}\frac{J}{G}} - \frac{\rho J}{\frac{\rho^2}{\alpha}\frac{J}{G}}\left(1 + 2\,\frac{1+\mu}{2}\right)\frac{\int_0^L F_m''(x)\,F_m(x)\,dx}{\int_0^L F_m^2(x)\,dx}\right]\ddot{q}_m(t) + \frac{1}{\frac{\rho^2}{\alpha}\frac{J}{G}\int_0^L F_m^2(x)\,dx}\times$$
$$\times\left[EJ\int_0^L F_m''''(x)\,F_m(x)\,dx + \mu_Q U^2\int_0^L F_m''(x)\,F_m(x)\,dx\right]q_m(t) = \frac{Q}{\frac{\rho^2}{\alpha}\frac{J}{G}\int_0^L F_m^2(x)\,dx}\int_0^L F_m(x)\,dx \tag{12}$$

což lze zjednodušeně zapsat jako

$$\ddot{\ddot{q}}_m(t) + a_m\,\ddot{q}_m(t) + b_m\,q_m(t) = d_m\,Q \tag{13}$$

přičemž pro okrajovou podmínku podpora – podpora opět platí

$$\begin{aligned} a_m &= \left[\frac{M+\mu_Q}{\rho J}\,\alpha\,c_2^2 - \frac{(1+2\,\mu)}{\alpha}\,\frac{\int_0^L F_m''(x)\,F_m(x)\,dx}{\int_0^L F_m^2(x)\,dx}\,\frac{\alpha\,c_2^2}{\rho A}\,\rho A\right] \\ &= \frac{\rho A}{\rho J}\,\alpha\,c_2^2\left[\left(1+\kappa_Q\right)\alpha\,c_2^2 + \left(1 + 2\,\frac{1+\mu}{\alpha}\right)\left(\frac{m\,\pi}{L}\right)^2\frac{\rho J}{\rho A}\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho\, E\, A}{\rho\, E\, J}\, \alpha\, c_2^2 \left[\left(1+\kappa_Q\right) + \left(1 + 2\,\frac{1+\mu}{\alpha}\right) \left(\frac{m\pi\, j}{L}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{E\, A}{\rho\, J}\, \alpha \left(\frac{c_2}{c_0}\right)^2 \left[\left(1+\kappa_Q\right) + \left(1 + 2\,\frac{1+\mu}{\alpha}\right) \left(\frac{m\pi\, j}{L}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{c_0^2}{j^2}\, \alpha \left(\frac{c_2}{c_0}\right)^2 \left[\left(1+\kappa_Q\right) + \left(1 + 2\,\frac{1+\mu}{\alpha}\right) \left(\frac{m\pi\, j}{L}\right)^2 \right] \qquad (13a)$$

$$b_m \quad = \left[EJ \int_0^L F_m^{IV}(x)\, F_m(x)\, dx + \mu_Q\, U^2\, F_m'(x)\, F_m(x)\, dx \right] \times \frac{1}{\int_0^L F_m^2(x)\, dx}\, \frac{\alpha\, c_2^2}{\rho J}$$

$$= \frac{\alpha\, c_2^2}{\rho\, J} \left[EJ \left(\frac{m\,\pi}{L}\right)^4 - \mu_Q\, U^2 \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{\alpha\, c_2^2}{\rho\, J} \left(\frac{m\,\pi}{L}\right)^4 EJ \left[1 - \mu_Q\, U^2\, \frac{1}{EJ} \left(\frac{L}{m\pi}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{\alpha\, c_2^2}{\rho\, J} \left(\frac{m\,\pi}{L}\right)^4 EJ \left[1 - \frac{\mu_Q}{\rho A} U^2\, \frac{\rho A}{EJ} \left(\frac{L}{m\pi}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{\alpha\, c_2^2}{\rho\, J} \left(\frac{m\,\pi}{L}\right)^4 EJ \left[1 - \kappa_B\, U^2\, \frac{1}{\frac{EJ}{\rho A}\,\frac{m^2\pi^2}{L^2}} \right]$$

$$= \frac{\alpha\, c_2^2}{\rho\, J} \left(\frac{m\,\pi}{L}\right)^4 EJ \left[1 - \kappa_B m^2\, \beta_m^2\right]$$

$$= \frac{\alpha\, c_2^2\, A}{\rho\, J A} \left(\frac{m\,\pi}{L}\right)^4 EJ \left[1 - \kappa_B m^2\, \beta_m^2\right]$$

$$= \frac{c_0^2}{j^2}\, \frac{\alpha\, c_2^2}{\rho\, A\, c_0^2} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 EJ \left[1 - \kappa_B m^2\, \beta_m^2\right]$$

$$= \frac{c_0^2}{j^2}\, \alpha \left(\frac{c_2}{c_0}\right)^2 \omega_{0m}^2 \left[1 - \kappa_B m^2\, \beta_m^2\right] \qquad (13b)$$

přičemž $\beta_m^2 = U^2 / c_{0m}^2$

Řešení rovnice (13) hledáme ve tvaru $q_m(t) = e^{i\omega_m t}$ což vede na rovnici čtvrtého stupně

$$\Omega_m^2 - a_m\, \Omega_m + b_m = 0 \qquad\qquad \omega_m^2 = \Omega_m \qquad (14)$$

Odtud

$$\Omega_{1,2}^{(m)} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \qquad (15)$$

Po dosazení za a a b dostaneme

$$\Omega_{1,2}^{(m)} = \frac{c_0^2}{2j^2}\alpha\left(\frac{c_2}{c_0}\right)^2\left[\left(1+\kappa_Q\right)+\left(1+2\,\frac{1+\mu}{\alpha}\right)\left(\frac{m\pi\, j}{L}\right)^2\right]\pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c_0^2}{j^2}\right)^2\left\{\alpha\left(\frac{c_2}{c_0}\right)^2\left[\left(1+\kappa_Q\right)+\left(1+2\frac{1+\mu}{\alpha}\right)\left(\frac{m\pi\, j}{L}\right)^2\right]\right\}^2-\left(\frac{c_0^2}{j^2}\right)\alpha\left(\frac{c_2}{c_0}\right)^2\omega_m^2\left[1-\kappa_B\, m^2\,\beta_m^2\right]}$$

$$=\frac{c_0^2}{j^2}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{c_2}{c_0}\right)^2\left\{\left[\left(1+\kappa_Q\right)+\left(1+2\,\frac{1+\mu}{\alpha}\right)\left(\frac{m\pi\, j}{L}\right)^2\right]\pm\right.$$

$$\left.\pm\sqrt{\left[\left(1+\kappa_Q\right)+\left(1+2\,\frac{1+\mu}{\alpha}\right)\left(\frac{m\pi\, j}{L}\right)^2\right]^2-\frac{4}{\alpha}\left(\frac{j}{c_2}\right)^2\left(\frac{c_0}{c_2}\right)\omega_{0m}^2\left[1-\kappa_B\, m^2\,\beta^2\right]}\right\} \tag{16}$$

Vztah pro vlastní frekvenci $\omega_{1,2}^{(m)}$ napíšeme v bezrozměrném tvaru Brepta & Půst & Turek, 1994

$$\frac{\omega_{1,2}^{(m)}\, j}{c_0}=$$

$$=\frac{c_2}{c_0}\sqrt{\frac{\alpha}{2}\left\{\left[\left(1+\kappa_B\right)+\left(1+2\frac{1+\mu}{\alpha}\right)\left(\frac{m\pi j}{L}\right)^2\right]\pm\sqrt{\left[\left(1+\kappa_B\right)\right]+\left(1+2\frac{1+\mu}{\alpha}\right)\left(\frac{m\pi j}{L}\right)^2-\frac{4}{\alpha}\left(\frac{j}{c_2}\right)\omega_{0m}^2\left(1-\kappa_B m^2\beta_m^2\right)}\right\}} \tag{17}$$

Analogicky k Lagrangeovu nosníku je v dalším provedena stejná numerická studie vlivu proudu média na změnu vlastní frekvence. Je zvolen pouze první tvar kmitu m = 1, přičemž nutno mít na zřeteli, že mu přísluší dvě vlastní frekvence.
Výsledky jsou uvedeny v následujících tabulkách T5 až T8.

Tabulka T5: voda , ø 630 × 25, L = 6 m, κ_B = 0,708

β	0	0,5	1	1,18	1,5	2
$\omega_1 j/c_0$	2,7075 E-3	2,4512 E-3	1,463 E-3	3,2241 E-4	i 2,0849 E-3	i 5,125206 E-3
$\omega_2 j/c_0$	0,4608	0,46081	0,460815	0,4608172	0,460822	0,460846

Tabulka T6: pára , ø 630 × 25, L = 6 m, κ_B = 0,0354

β	0	2	4	5	7
$\omega_1 j/c_0$	3,4333 E-3	3,180937 E-3	2,26072 E-3	1,164246 E-3	i 2,94242 E-3
$\omega_2 j/c_0$	0,36339	0,363393	0,3634	0,363405	0,3634186

Tabulka T7: voda , ø 32 × 3,5, L = 2,5 m, κ_B = 0,1716

β	0	2	10	100
$\omega_1 j/c_0$	0,97 E-4	0,543 E-4	i 0,38986 E-3	i 0,4016 E-2
$\omega_2 j/c_0$	0,3776	0,37762	0,37762	0,377641

Tabulka T8: pára , ø 32 × 3,5, L = 2,5 m, κ_B = 8,674 E-3

β	0	10	100
$\omega_1 j / c_0$	0,10455 E-3	0	i 0,9681 E-3
$\omega_2 j / c_0$	0,35028	0,35028	0,3502808

Dílčí závěr:
Typickým rysem Timoshenkova nosníku je, že každému tvaru kmitu přísluší dvě vlastní frekvence. Numerickým rozborem pro stejné podmínky jako u Lagrangeova nosníku bylo dokázáno, že nízká frekvence se chová obdobně, tj. s rostoucí rychlostí se zmenšuje až na nulu a pak kmitání přechází do vzpěru. U vysoké frekvence je trend opačný: rostoucí rychlost média ji zvyšuje, ale ne významně.

4. Timoshenkův nosník – nájezd břemene

Pohybová rovnice má dle Frýba 1999 tvar

$$EJ\,\frac{\delta^4 w}{\delta x^4}+\rho A\,\frac{\delta^2 w}{\delta t^2}-\rho J\left[1+2\,\frac{1+\gamma}{\alpha}\right]\frac{\delta^4 w}{\delta x^2\delta t^2}+\frac{\rho}{\alpha}\,\frac{J}{G}\,\frac{\delta^4 w}{\delta t^4}=Q\left[1-\eta\left(x-Ut\right)\right] \qquad (18)$$

Použijeme opět rozboj dle nosníkových funkcí $w(x,t)=\sum_m F_m(x)\,q_m(t)$ s okrajovou podmínkou podpora – podpora. Integrací přes celou délku nosníku se pro první tvar kmitu vztah (18) změní na

$$\ddot{\ddot{q}}_m(t)+a\,\ddot{q}_m(t)+b\,q_1(t)=\frac{2Q}{\pi}\left[1-\cos\frac{\pi U t}{L}\right] \qquad (19)$$

kde
$$a=\frac{c_0^2}{j}\,\alpha\left(\frac{c^2}{c_0}\right)^2\left[1+\left(1+2\,\frac{1+\mu}{\alpha}\right)\left(\frac{\pi j}{L}\right)^2\right]$$

$$b=\frac{\alpha\,c_2^2}{\rho\,j^2 A}\,EJ\left(\frac{\pi}{L}\right)^4$$

Řešení této rovnice provedeme Laplaceovou transformací za předpokladu nulových počátečních podmínek. Jako výsledek dostaneme

$$\left(p^4+a\,p^2+b\right)Q(p)=\frac{2Q}{\pi}\left[\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+\left(\frac{\pi U}{L}\right)^2}\right] \qquad (20)$$

Odtud

$$Q(p)=\frac{f}{p^4+a\,p^2+b}\left[\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+\left(\frac{\pi U}{L}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{f}{p^4+a\,p^2+b}\left[\frac{\left(\frac{\pi U}{L}\right)^2}{p\left[p^2+\left(\frac{\pi U}{L}\right)^2\right]}\right] \qquad f=\frac{2Q}{L} \tag{21}$$

Originál má dle Frýba 1999 tvar

$$q(t)=\frac{f}{\left(A^2-B^2\right)\left[B^2-\left(\frac{\pi U}{L}\right)^2\right]\left[A^2-\left(\frac{\pi U}{L}\right)^2\right]}\times$$

$$\times\left\{\left(A^2-B^2\right)\left(1-\cos\frac{\pi U}{L}b\right)-\frac{\left(\frac{\pi U}{L}\right)^2}{B^2}\left[A^2-\left(\frac{\pi U}{L}\right)^2\right](1-\cos Bt)+\frac{\left(\frac{\pi U}{L}\right)^2}{A^2}\left[B^2-\left(\frac{\pi U}{L}\right)^2\right](1-\cos At)\right\} \tag{22}$$

Numerický rozbor byl opět proveden pro 630 × 25, L = 6 m a ø 32 × 3,5, L = 2,5 m a okrajovou podmínku podpora – podpora. Numerické hodnoty konstant A a B jsou následující

- ø 630 × 25, L = 6 m
  A_1 = 327,85 [s^{-1}] B_1 = 6740,1 [s^{-1}]
  A_2 = 566,8 [s^{-1}] B_2 = 11652,2 [s^{-1}]
- ø 32 × 3,5, L = 2,5 m
  A_1 = 80,99 [s^{-1}] B_1 = 80,287 [s^{-1}]
  A_2 = 2,744×10^8 [s^{-1}] B_2 = 2,72074×10^5 [s^{-1}]

Z rovnice (22) je zřejmé, že podmínky rezonance mají tvar

$$A=B; \qquad A=\frac{\pi U}{L}; \qquad B=\left(\frac{\pi U}{L}\right)$$

zatímco v případě Euler-Bernoulliho nosníku je to pouze $\omega=\pi U/L$, neboť řešení pohybové rovnice má v tomto případě tvar

$$q(t)=\frac{f}{\omega^2}(1-\cos\omega t)-\frac{f}{\omega^2-\left(\frac{\pi U}{L}\right)^2}\left(\cos\frac{\pi U}{L}t-\cos\omega t\right) \tag{23}$$

Vzájemné porovnání kritických rychlostí je provedeno v následující tabulce T9.

Tabulka T9: kritické rychlosti [m s^{-1}] pro E-B a T typ nosníku

	E-B	Timoshenko			
ø 630 × 25	551,4	626,14	1082,5	12872,6	22254,16
ø 32 × 3,5	64,85	64,45	21836 E+8	63,89	1,7566 E+5

Dílčí závěr:
Typickým znakem Timoshenkova nosníku je, že každému tvaru kmitu přísluší dvě vlastní frekvence. Z provedeného rozboru vyplynulo, že každé frekvenci zřejmě přísluší dvě kritické rychlosti. Tento jev by zasloužil experimentální ověření.

5. Závěr

Z numerického rozboru provedené pro typické velké potrubí ø 630 × 25, L = 6 m a impulzní potrubí ø 32 × 3,5, L = 2,5 m zaplněného proudící vodou nebo parou vyplynulo následující

- jak z hlediska výpočtů vlastních frekvencí tak i vynuceného kmitání je rozdíl mezi E-B a L typem zanedbatelný,
- nepatrná odlišnost je pouze u velkých parních potrubí, kde E-B nosník má maximálně o 1,3% vyšší odezvu než nosník Lagrangeův,
- u Timoshenkova nosníku se nízká frekvence chová obdobně, tj. s rostoucí rychlostí se frekvence zmenšuje až na nulu a pak kmitání přechází do vzpěru,
- u vysoké frekvence T nosníku je trend opačný: rostoucí rychlost média ji zvyšuje, ale ne významně,
- nájezdu břemene u T nosníku přísluší čtyři kritické rychlosti, ty nejnižší se dosti blíží hodnotám E-B nosníku.

Literatura

Pečínka L. & Krásný I. (2003a) Dynamic of Piping with Moving Load. Int. Conf SMIRT 17, Prague, paper V05-1.
Pečínka L. & Krásný I. (2003b) Vliv protékajícího média na dynamické chování přímého úseku a kolena potrubí. Výpočtová mechanika 2003, str. 343 ÷ 350.
Pečínka L. & Krupa Vl. Dynamic Response of Piping Systems Due to Moving Load (2002). Inženýrská mechanika 2002, str. 215, 216 (abstrakt).
Brepta R., Půst L., Turek F. (1994) Mechanické kmitání, Sobotáles, Praha.
Frýba L. (1999) Vibration of Solids and Structures under Moving Loads, Academia, Praha.