ENGINEERING MECHANICS 2004
NATIONAL CONFERENCE
with international participation
Svratka, Czech Republic, 10 - 13 May 2004

ANISOTROPIC MODELS OF HELICAL TYPE FOR THIN-WALLED CIRCURAL CYLINDRICAL SHELLS IN MEMBRANE CONDITION

R. Novotný*, P. Brož**

Summary: *Both, in the animate nature and inanimate one, as well as in a series of costruction and mechanical applications, we encounter structures which can be simulated by means of the thin-walled circular direct cylindrical shells. Thein skin, when supposing the membrane effect as for the distribution of material, is arranged a´ la the one- and twohelical anisotropy. A number of implications arises from the foregoing physical circumstance. The said consequences have an influence, on the one hand, upon the distribution and magnitude of the state of stress in the skin, and on the other hand, upon the elastic strains.*

1. Úvod

Předpokládejme, že přímá kruhová válcová skořepina, jejíž plášť je tenkostěnný, je zevnitř natlakována určitým stálým vnitřním přetlakem kapalného či plynného média, a že není vystavena okrajovým poruchám. Za takovýchto okolností je plášť namáhán jen prstencovými normálovými silami (tahy) a celkem nepatrnými prstencovými ohybovými momenty (závislými toliko na průřezových charakteristikách stěny pláště). Tyto vnitřní síly (vztáhneme-li je na jednotku délky skořepiny) jsou stálé, takže ke vzniku prstencových tangenciálních sil nedochází. Popsaný stav je vlastně stavem „téměř“ membránovým (nebo – lépe řečeno – „kvazimembránovým“). Uvažované namáhání ale odpovídá materiálové izotropii pláště nebo tzv. ortotropii, kdy v příčně tangenciálním směru plášťových (fiktivních) prstenců je třeba počítat s jiným Youngovým modulem pružnosti než je tomu v podélném směru, to je ve směru myšlených plášťových krakorců, či-li površek skořepiny. Z řečeného je zároveň patrno, že plášť skořepiny lze pojímat jako výtvor sestávající ze dvou osnov fiktivních nosných pruhů stejné (většinou jednotkové) šířky, přičemž její řešení je možno založit na kompatibilitě deformací obou takovýchto regulů. Avšak lze si představit, že materiálové strukturování pláště bude uspořádáno mnohem složitěji, např. na způsob jednošroubovicové či dvojšroubovicové anizotropie. V případě dvojšroubovicové anizotropie budeme předpokládat, že obě její „nosné“ osnovy budou navzájem opačné orientace,

* Doc. Ing. Radimír Novotný, DrSc.: Katedra betonových konstrukcí a mostů, Fakulta stavební ČVUT v Praze, Thákurova 7, 166 29 Praha 6 ; tel.: 224 354 630 ; e-mail: radimír. novotny @ seznam. cz
** Doc. Ing. Petr Brož, DrSc., dtto

takže uvedený model působnosti zároveň ukazuje i na jinou možnost geometrické definice pláště válcové skořepiny, přičemž i v tomto případě žádáme splnění podmínek kompatibility deformací obou nosných pruhů. Pokud jde o model jednošroubovitě anizotropního uspořádání materiálu v plášti skořepiny, je namístě geometrická představa, že totiž její plášť lze vytvořit z nekonečně velikého množství šroubovicových trajekrorií stejné stoupavosti i orientace.

Oba speciální modely anizotropie představují v technice i v přírodě často se vyskytující struktury (duté tyčové a trubkové konstrukční prvky se šroubovicově anizotropním strukturováním či zpevněním (dodatečným ovinutím), potrubí s „předepsanou“ anizotropií uvažovaného typu, strukturování dřevní hmoty či kostní hmoty (kmeny, stvoly, femur), apod.).

Jakkoliv jsou popisované skořepinové struktury relativně jednoduché svým tvarem i zatížením (geometrická i statická rotační symetrie) a poměrně speciální co do předpokládaného materiálového strukturování tenkostěnného pláště konstantní tloušťky, představují velmi důležité prvky strojní i stavební praxe, jejichž analýza nebyla doposud uspokojivě provedena. Autor tohoto příspěvku má tak za to, že naznačená analýza je užitečná nejen z hlediska výzkumu jako takového, to je s akcentem na „teorii“, ale například i z hlediska možností praktického uplatnění na kompozitní materiály s „řízenou“ anizotropií.

2. Základní vlastnosti obyčejného šroubovicového vlákna

Východiskem pro odvození namáhání a pružných deformací pojednávaných skořepin, jejichž plášť je anizotropní na způsob jedno či dvojšroubovicového uspořádání materiálu, je znalost geometrických vlastností šroubovicové trajektorie.

Je-li $\{O;\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3\}$ uvažovaná (a vhodně volená) ortogonální báze a J nějaká množina skalárních parametrů t, lze na ní v E_3 definovat (regulární) křivku s vektorovou rovnicí $\vec{r}(t)=x_1(t)\cdot\vec{e}_1+x_2(t)\cdot\vec{e}_2+x_3(t)\cdot\vec{e}_3$, která nechť popisuje trajektorii anizotropie. Tato (regulární) čára má v každém svém bodě dvě navzájem kolmé hlavní tečné roviny, totiž oskulační a rektifikační rovinu a (jednu) normálovou rovinu, která je k nim kolmá. Průnik obou hlavních tečných rovin definuje tečnu k uvažované křivce v bodě, průnik oskulační roviny s rovinou normálovou udává hlavní normálu a hlavní binormála je pak dána průnikem rektifikační roviny s normálovou rovinou, přičemž trojice vzájemně kolmých jednotkových vektorů kolineárních s tečnou, normálou a binormálou definuje tzv. průvodní trojhran v bodě křivky (též ortonormální repér závislý na parametru t). Konečná délka (prostorového) oblouku je zřejmě dána $s=\int_o^t\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2}\cdot dt$ a lze ukázat, že tzv. první křivost (tzv. flexe), která je pro další úvahy naprosto nezbytná, je dána vtahem ${}^1k=\frac{\sqrt{\ddot{x}_1^2+\ddot{x}_2^2+\ddot{x}_3^2-\ddot{s}^2}}{\dot{s}^2}$. Flexe pak definuje v uvažovaném bodě křivky s tzv. oskulační kružnici, která jím prochází, má v něm s křivkou společnou tečnu i prvou křivost, takže poloměr této kružnice (ležící v oskulační rovině) je dán recipročním vztahem $R_1=\frac{1}{{}^1k}$.

Uplatněme tyto skutečnosti na trajektorii definovanou trojicí parametrických rovnic

$x_1 = R_o \cdot \cos t$, $x_2 = R_o \cdot \sin t$ a $x_3 = c \cdot t$, které určují obyčejnou kruhovou šroubovici. V poslední trojici dvouparametrických rovnic značí R_o poloměr střednice přímé kruhové válcové skořepiny, konstanta c udává tzv. „stoupavost“ šroubovice po jejím plášti, zatímco parametr t je argumentem. Po příslušných dosazeních do výše uvedených vzorců a určitých úpravách vychází

$$s = \sqrt{R_o^2 + c^2} \cdot t \tag{1}$$

a

$$R_1 = \frac{R_o^2 + c^2}{R_o} \quad . \tag{2}$$

Aniž by zde bylo třeba odvozovat a analyzovat podrobnosti diferenciálně geometrické povahy (to je detailně provedeno ve [3]), uveďme, že úhel φ , který svírají tečny ke šroubovici s rovinou řídící kružnice kruhové válcové plochy, je stálý a platí pro něj $\varphi = arctg \frac{c}{R_o}$. Podobně, normála šroubovice je komplanární s rovinou, v níž se nalézá řídící kružnice válcové plochy, a je tak kolmá k ose šroubovice x_3 , s níž má společný bod. Ukazuje se, že studovaná prostorová křivka má stálou flexi i druhou křivost (torzi) a že pythagorejský vztah (1) potvrzuje, že kruhovou šroubovici je možno rozvinout do (stoupající) přímky nalézající se v rektifikační rovině, která se dotýká uvažované skořepiny vždy (v jediné) tvořící přímce, tzv. površce.

Nyní lze přejít k vyšetřování napjatosti jediného šroubovicového nosného vlákna, které zevně „ovíjí“ (a tak jakoby „podpírá“) plášť kruhové válcové skořepiny, která je vystavena rotačně symetrickému vnitřnímu tlaku konstantní velikosti. Budeme předpokládat, že membránové chování tenkostěnného pláště je dokonale realizováno prostřednictvím taženého šroubovicového vlákna. Kolmá vzdálenost vláken jedné a téže šroubovice, jejíž výška (jednoho) zdvihu je $2 \cdot \pi \cdot c$, je dána vzorcem

$$p = 2 \cdot \pi \cdot c \cdot \cos\varphi = 2 \cdot \pi \cdot c \cdot \frac{R_o}{\sqrt{R_o^2 + c^2}} \tag{3}$$

a bude-li q $[{}^{N}\!/_{cm^2}]$ vnitřní přetlak, který je kolineární s normálou ke šroubovici (i k válcové ploše), a ${}^1k = \frac{1}{R_1} = konst.$ flexe, viz též (2), lze odvodit pro velikost tahové síly ve šroubovicovém vláknu vztah

$$N = R_1 \cdot p \cdot q \quad , \tag{4}$$

kde R_1 je poloměr oskulační kružnice v oskulační rovině. Rovnice (4) přechází vzhledem k (2) a (3) na vzorec

$$N = 2 \cdot \pi \cdot q \cdot c \cdot \sqrt{R_o^2 + c^2} \quad , \tag{5}$$

v němž předpokládáme, že platí $c \succ 0$. Za účelem diskuse vztahu (5) nyní uvažujme, že tatáž skořepina je namísto jediným šroubovicovým vláknem podporována soustavou kruhových vláken (na způsob prstenců) o poloměru R_o , jejichž pravidelná vzdálenost je rovna právě velikosti zdvihu $2 \cdot \pi \cdot c$. Každé takové kruhové vlákno je pak zřejmě namáháno tahovou silou

$$N_o = 2 \cdot \pi \cdot q \cdot c \cdot R_o \tag{6}$$

a je vidět, že pro $c \succ 0$ je i $N \succ N_o$, přičemž pro malá $c \succ 0$ platí $N \to N_o$, ale pro vysoká c vzrůstá vzájemná divergence předmětných sil, viz vzorce (5) a (6). Z dosavadního výkladu je evidentní, že „šikmá“ síla (5), která je mimoběžná s podélnou osou skořepiny (a odpovídá šikmému pruhu šířky p (viz (3)), indukuje kromě „prstencové“ síly (6) (odpovídající pruhu šířky $2 \cdot \pi \cdot c$) ještě podélnou tahovou sílu P, takže platí $\vec{N} = \vec{N}_o + \vec{P}$, přičemž všechny tyto komplanární síly leží v rektifikační rovině. Uvážíme-li, že $\sin\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{R_o^2 + c^2}}$ a že $P = N \cdot \sin\varphi$, popř. $N_o = N \cdot \cos\varphi$, snadno ověříme platnost vztahu

$$P = 2 \cdot \pi \cdot q \cdot c^2 \quad . \tag{7}$$

Zaměříme-li se na stanovení deformace tahem namáhaného šroubovicového vlákna, pak pro rozsah jednoho jeho zdvihu lze odvodit odpovídající absolutní elastické prodloužení

$$\Delta s = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot q \cdot c}{E \cdot F} \cdot \left(R_o^2 + c^2\right) \quad , \tag{8}$$

přičemž původní nezdeformovaná délka oblouku vlákna uvažovaného zdvihu činí podle (1) $s = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{R_o^2 + c^2}$. Vztah (8) byl odvozen z Castiglianova energetického principu přetvárných prací, v němž E označuje Youngův modul pružnosti vlákna a F je jeho průřezová plocha. Obou posledních vzorců lze využít k vyjádření délky pružně protaženého oblouku vlákna, totiž jako $s + \Delta s$. Avšak tutéž „zvětšenou“ délku můžeme vyjádřit jako

$$s + \Delta s = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\left(R_o + \Delta R_o\right)^2 + \left(c + \Delta c\right)^2} \quad , \tag{9}$$

kde ΔR_o označuje přírůstek poloměru šroubovicovým vláknem ovíjené válcové skořepiny a Δc označuje přírůst délkového parametru c. Je patrné, že výraz (9) je jednoduše neurčitý ; zatímco přírůstek Δs je jednoznačně stanovitelný z (8), je třeba jeden ze dvou parametrů ΔR_o resp. c znát (popř. zvolit), a zbývající pak dopočítat z (9). Nejjednodušší případ nastane, budou-li „nosná“ šroubovicová vlákna před i po deformaci v afinním vztahu, to je, bude-li platit $\dfrac{c}{R_o} = \dfrac{\Delta c}{\Delta R_o}$. Tehdy bude zachován odklon tečen obou šroubovicových vláken, takže elastické přetváření bude volné, nerušené. Ve všech ostatních případech, to je pro libovolný poměr veličin ΔR_o a c, resp. při $c = 0$ půjde o vázané přetváření, takže stoupavost šroubovicových nosných vláken před a po deformaci bude navzájem různá. Poznamenejme, že (technicky ztěží reálný) případ, kdy $\Delta R_o = 0$ a $\Delta c \succ 0$, je jen teoretického významu, takže nebude uvažován.

Ukazuje se, že za uvedených předpokladů a modelové situace, kdy je celý vnitřní přetlak na plášť uvažované skořepiny přenášen jediným nosným vláknem, lze vnitřní normálovou tahovou sílu v něm při platnosti podmínky $\frac{c}{R_o} = \frac{\Delta c}{\Delta R_o}$ exaktně stanovit podle vztahu (5). Tehdy vzhledem k (8) vyjde

$$\Delta R_o = \frac{2 \cdot \pi \cdot q \cdot c \cdot R_o}{E \cdot F} \cdot \sqrt{R_o^2 + c^2} \tag{10}$$

a

$$\Delta c = \frac{2 \cdot \pi \cdot q \cdot c^2}{E \cdot F} \cdot \sqrt{R_o^2 + c^2} \quad . \tag{11}$$

Budou-li roztažení $\varepsilon_r = \frac{\Delta R_o}{R_o}$, ε_t , $\varepsilon_p = \frac{\Delta c}{c}$ a $\varepsilon_s = \frac{\Delta s}{s}$ poměrnými přetvořeními (postupně) v radiálním, příčně tangenciálním, podélném a tečně šroubovicovém směru, vychází

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t = \varepsilon_p = \varepsilon_s = \frac{2 \cdot \pi \cdot q \cdot c}{E \cdot F} \cdot \sqrt{R_o^2 + c^2} \quad . \tag{12}$$

Při jiných pružně přetvárných okolnostech lze s „dostatečnou“ přesností (i když nikoliv exaktně) také brát vzorce (5) a (8) (uvaž, že $\Delta R_o \prec\prec R_o$ a $\Delta c \prec\prec c$), ale vztah (12) je třeba uplatnit jedině vzhledem k ε_s. Pokud jde o poměrná přetvoření $\varepsilon_r = \varepsilon_t$ a ε_p , je nutno je stanovit vzhledem k volbě jedné z veličin ΔR_o resp. c .

3. Plášť kruhové válcové skořepiny s jednošroubovicovou materiálovou anizotropií

Zahrneme-li do dalších úvah principy, které byly uplatněny shora v textu, zejména pak způsobu odvození vzorce (5), lze na jednotku délky skořepiny v longitudinálním směru počítat s měrnou plášťovou tahovou silou $\nu_1 = \frac{N}{2 \cdot \pi \cdot c}$ [N/cm^{-1}] , která „se měří“ ve směru tečny k předpokládané jednošroubovicové anizotropii. Po dosazení z (5) ihned vyplyne

$$\nu_1 = q \cdot \sqrt{R_o^2 + c^2} \quad . \tag{13}$$

Tato plášťová síla indukuje prstencovou složku (viz vztah (6)) o velikosti

$$\nu_{o1} = \nu_1 \cdot \cos\varphi = \frac{N_o}{2 \cdot \pi \cdot c} = q \cdot R_o \tag{14}$$

a podélnou složku, která je dána vzhledem k (7) vzorcem

$$\lambda_1 = \nu_1 \cdot \sin\varphi = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot c} = q \cdot c \quad . \tag{15}$$

Pro uvedené „měrné“ síly, které se nalézají v rektifikační rovině, platí zřejmě vektorová relace $\vec{\nu}_1 = \vec{\nu}_{o1} + \vec{\lambda}_1$. Ve směru těchto plášťových sil lze odvodit odpovídající plášťová normálová napětí, která plynou bezprostředně z (13), (14) a (15), a to

$$\sigma_1 = \frac{\nu_1}{1 \cdot \cos\varphi \cdot t} = \frac{q \cdot \left(R_o^2 + c^2\right)}{R_o \cdot t} \quad , \tag{16}$$

$$\sigma_{o1} = \frac{\nu_{o1}}{1 \cdot t} = \frac{q \cdot R_o}{t} \tag{17}$$

a

$$\sigma_p = \frac{\lambda_1}{\frac{1}{tg\varphi} \cdot t} = \frac{q \cdot c^2}{R_o \cdot t} \quad . \tag{18}$$

V posledních vzorcích t označuje tloušťku stěny uvažované skořepiny (nezaměňovat s parametrem t při matematickém popisu trajektorie anizotropie !), přičemž σ_1 je „šikmé“ plášťové normálové napětí, σ_{o1} je „prstencové“ normálové napětí (příčně tangenciálního směru) a σ_p je podélné normálové napětí (ve směru površky válcové skořepiny). Všechna tato napětí jsou též odvoditelná z podmínek silové rovnováhy na elementárním rovnoběžníku anizotropního pláště skořepiny, kdy jeho elementární výška dh v podélném směru představuje zároveň i jednu z jeho uhlopříček, zatímco ta druhá (v příčně tangenciálním směru) je dána $\frac{dh}{tg\varphi}$, takže odklon dvou jeho příslušných rovnoběžných stran odpovídá úhlu φ .

Poslední odvozené výsledky ukazují na platnost vztahu $\sigma_{o1} + \sigma_p = \sigma_1 = invariant$. Tento skalár (tzv. první, lineární invariant, popř. též „stopa“) náleží tenzoru napjatosti $\vec{T}$ druhého řádu (vlastně diagonální matici typu „2*2“ – podle předpokladu jde o membránovou napjatost), takže

$$\vec{\vec{T}} = \begin{Vmatrix} \sigma_{o1} & 0 \\ 0 & \sigma_p \end{Vmatrix} \quad .$$

Analýzou uvedeného tenzoru napjatosti „na tečné ploše“ skořepiny a detailním výkladem jeho transformačních vlastností se zde již nebudeme zabývat ; jsou podrobně provedeny v [3]. Poznamenejme jen, že tenzor $\vec{T}$ lze transformovat do tvaru

$$\vec{\vec{T}}^* = \begin{Vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

a uveďme, že diagonální komponenty v obou alternativních tenzorech jsou podle předpokladů kladné (tahy), takže zobrazením plášťové napjatosti je elipsa (popř. úsečka).

Vyjádřeme ještě pro tento typ anizotropie odpovídající poměrná prodloužení za předpokladu, že plášť uvažované skořepiny se může „nevázaně“ elasticky přetvářet (viz druhá kapitola příspěvku). Lze se snadno přesvědčit, že vyjde

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t = \varepsilon_p = \varepsilon_s = \frac{q \cdot \left(R_o^2 + c^2\right)}{E \cdot t \cdot R_o} \tag{19}$$

a uvážíme-li, že lze (jednorozměrně) napsat $\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_s$, $\sigma_{o1} = E_t \cdot \varepsilon_t$ a $\sigma_p = E_p \cdot \varepsilon_p$, kde E označuje Youngův modul pružnosti odpovídající směru jednošroubovicové anizotropie, zatímco E_t a E_p představují moduly pružnosti pláště skořepiny v příčně tangenciálním a v axiálně longitudinálním směru, lze z (19) vzhledem ke vztahům (16), (17) a (18) dospět k důležitým vzorcům, totiž

$$E_t = \frac{R_o^2}{R_o^2 + c^2} \cdot E \prec E \tag{20}$$

a

$$E_p = \frac{c^2}{R_o^2 + c^2} \cdot E \prec E \quad . \tag{21}$$

Z nich je okamžitě patrno, že platí i

$$E = E_t + E_p \quad , \tag{22}$$

popř. též

$$\frac{E_p}{E_t} = \frac{c^2}{R_o^2} = tg^2 \varphi \quad . \tag{23}$$

Na základě řady provedených numerických verifikací konstatujme, že poslední čtyři exaktně stanovené vztahy platí „přibližně“ i pro „rozumně“ volené proporce $\frac{\Delta c}{\Delta R_o} \neq \frac{c}{R_o}$.

4. Plášť kruhové válcové skořepiny s dvojšroubovicovou materiálovou anizotropií

Uvažujme o obecné dvojšroubovicové anizotropii pláště skořepiny za membránové působnosti a vnitřního stálého přetlaku q s tím, že obě její osnovy jsou navzájem opačných orientací. Oba směry aelotropie se tak vyznačují „svojí“ geometrií (c_1 resp. φ_1 a c_2 resp. φ_2) i „svými“ moduly pružnosti (E_1 a E_2). Přepíšeme-li nyní vztah (9) na ekvivalentní rovnici

$$2 \cdot \pi \cdot \sqrt{R_o^2 + c^2} \cdot (1 + \varepsilon_s) = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{(R_o + \Delta R_o)^2 + c^2 \cdot (1 + \varepsilon_p)^2} \quad ,$$

v níž zanedbáme (jen) „velmi“ malý člen $\varepsilon_s^2 \approx 0$, dostaneme (ze vzniknuvší kvadratické rovnice) reálné řešení ve tvaru

$$\Delta R_o = \left[\sqrt{1 + 2\cdot\varepsilon_s + 2\cdot\frac{c^2}{R_o^2}\cdot\left(\varepsilon_s - \varepsilon_p\right)} - 1 \right]\cdot R_o \quad . \tag{24}$$

O přírůstku ΔR_o přirozeně předpokládáme, že je pozitivní, a proto je třeba splnit podmínku $\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p} \geq 1 + \frac{R_o^2}{c^2}$. Vztah (24) ale musí splňovat zároveň prvý i druhý regulus anizotropie (postačí společný příčně radiální posuv ΔR_o vyjádřit pomocí parametrů jedné i druhé osnovy), přičemž „podílové“ radiální tlaky q_1 a q_2 jsou přenášeny „svými“ nosnými reguly aelotropie, takže platí

$$q = q_1 + q_2 \quad . \tag{25}$$

Vyjádříme-li navíc podle (19)

$$\varepsilon_{s_i} = \frac{q_i\cdot\left(R_o^2 + c_i^2\right)}{E_i\cdot t\cdot R_o} \quad ; \quad i = 1\,,\ 2 \quad , \tag{26}$$

lze z (24), (25 a (26) pro parciální tlaky po úpravách odvodit

$$q_1 = \frac{q + \dfrac{\left(c_1^2 - c_2^2\right)\cdot R_o\cdot t\cdot E_2}{\left(R_o^2 + c_2^2\right)^2}\cdot\varepsilon_p}{\left[\dfrac{E_2}{E_1}\cdot\left(\dfrac{R_o^2 + c_1^2}{R_o^2 + c_2^2}\right)^2 + 1\right]} \tag{27}$$

a

$$q_2 = \frac{\dfrac{E_2}{E_1}\cdot\left(\dfrac{R_o^2 + c_1^2}{R_o^2 + c_2^2}\right)^2\cdot q - \dfrac{\left(c_1^2 - c_2^2\right)\cdot R_o\cdot t\cdot E_2}{\left(R_o^2 + c_2^2\right)^2}\cdot\varepsilon_p}{\left[\dfrac{E_2}{E_1}\cdot\left(\dfrac{R_o^2 + c_1^2}{R_o^2 + c_2^2}\right)^2 + 1\right]} \quad . \tag{28}$$

Vztahy (27) a (28) byly odvozeny na principu kompatibility deformací obou nosných regulů ; pro oba jsou společné posuvy ΔR_o a ε_p , přičemž předpokládáme $\Delta R_o \succ 0$, zatímco „neurčitý“ parametr musí být (realisticky) zvolen ($\varepsilon_p = \frac{\Delta l}{l} \geq 0$, kde l značí délku skořepiny v podélném směru a Δl je pak absolutní prodloužení v tomtéž směru). Význam vzorců (27) a (28) je tedy průzračný: Je možno ověřit, že skutečně platí výchozí předpoklad $q = q_1 + q_2$ a např. pro $c_1 = c_2$ přechází rovnice (27) na dobře představitelný vztah $q_1 = \frac{E_1}{E_1 + E_2}\cdot q$, zatímco rovnice (28) přejde v $q_2 = \frac{E_2}{E_1 + E_2}\cdot q$. Bude-li navíc platit i $E_1 = E_2$, vyjde zřejmě $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}\cdot q$.

Po distribuci vnitřního přetlaku na oba parciální tlaky lze již, pokud jde o stanovení tenzorů napjatosti odpovídajících příslušným osnovám anizotropie, postupovat standardním způsobem podle vzorců (16), (17) a (18), které je ovšem třeba „opatřit“ příslušnými indexy. Úplný obraz o napjatosti v plášti s „dvojsměrnou“ anizotropií za membránového stavu získáme sečtením obou tenzorů napjatosti:

$$^{1}\vec{\vec{T}}+{}^{2}\vec{\vec{T}}=\begin{Vmatrix} ^{1}\sigma_{o1} & 0 \\ 0 & ^{1}\sigma_{p} \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} ^{2}\sigma_{o1} & 0 \\ 0 & ^{2}\sigma_{p} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} ^{1}\sigma_{01}+{}^{2}\sigma_{01} & 0 \\ 0 & ^{1}\sigma_{p}+{}^{2}\sigma_{p} \end{Vmatrix}={}^{v}\vec{\vec{T}} \quad .$$

Vzniknuvší tenzor $^{v}\vec{\vec{T}}$ definoval autor jako **tenzor výsledného napětí** a jeho vlastnosti jsou diskutovány v [3].

Na základě vztahu (24) můžeme ověřit, že skutečně platí $\Delta R_{o_1} = \Delta R_{o_2}$ (vzorec (24) je ale třeba opatřit příslušnými indexy), přičemž vyjde, že obecně $\varepsilon_{s_1} \neq \varepsilon_{s_2}$, viz vztah (26).

5. Závěr

V tomto příspěvku byly analyzovány a diskutovány ty výsledky, které se týkaly napjatosti a „pružných“ deformací stěny přímé kruhové válcové skořepiny za membránové působnosti, jednošroubovicové či dvojšroubovicové plášťové anizotropie a stálého vnitřního přetlaku. Přestože jsou předpoklady v této studii poměrně speciální, analyzovaný model působnosti dobře odpovídá v přírodě i v praxi se často vyskytujícím strukturám. Některé z uvažovaných předpokladů jsou velmi realistické (předpoklad o „geometrii“ tvaru pláště a jeho metrice (hlavně tenkostěnnost pláště) a dále představa o jedno či dvojšroubovicově „protismyslném“ aelotropním strukturování materiálu v mase pláště). Jiné premisy jsou spíše výrazem zidealizování (zjednodušení) skutečné působnosti pláště (membránové chování pláště skořepiny za konstantního radiálního přetlaku je „přijatelné“ jen za vyloučení okrajových poruch). Velmi zidealizovaným se také jeví předpoklad o zanedbání smykových napětí při interakci obou navzájem různě se elasticky prodlužujících anizotropních regulů (na jejich kontaktu), takže obě osnovy aelotropie mohou po sobě jakoby prokluzovat bez vzájemného tření.

Zdá se, že výsledky této práce mohou být dobře uplatnitelné pro přímá kruhová potrubí s předpokládanou anizotropií svého pláště, popř. i pro jejich zesilování dodatečným ovíjením (za či bez předepnutí) – a řada numerických případů, které autor tohoto příspěvku verifikoval, to jen potvrzuje. Ukazuje se například, že při dvojité symetrické anizotropii s opačnou orientací a s „mírným“ stoupáním ($c_1 = c_2$; $E_1 = E_2$; $c_1 = c_2 \leq R_o$) vychází plášťová napjatost přízniveji (menší) než by tomu bylo v případě tzv. ortotropie (kdy $E_t = E_1 = E_2$; $E_t \succ\succ E_p\ (\rightarrow 0)$; index p značí podélný směr a index t označuje příčně tangenciální směr). Je rovněž patrno, že za přijatých předpokladů není izotropně uspořádaný materiál pláště právě nejvýhodnější (pro svojí „nevyužitost“ v podélném směru). Naproti tomu anizotropní uspořádání materiálu pláště na způsob jednošroubovice, kdy $E = E_t$; $c \succ 0$, dává nejméně příznivou napjatost v plášti potrubí (a to jak co do velikosti (větší napjatost než v případě ortotropie či izotropie), tak i co do jeho rozložení (což souvisí s tvarem i transformací tenzoru výsledného napětí, viz též práce [3]).

Za cenné teoretické zjištění lze pokládat potvrzení té „očekávatelné“ fyzikální představy, že totiž stálé vnitřní normálové síly v plášti kruhové válcové skořepiny v tečných směrech k její předpokládané anizotropii šroubovicového typu jsou snadno odvoditelné z první křivosti trajektorií uvažované aelotropie za předpokládaného stálého vnitřního přetlaku.

Práce při analýze napjatosti a elastických přetváření pláště studované skořepiny metodicky využívala principů tenzorového počtu ve spojitosti s aplikacemi diferenciální geometrie. Tento příspěvek obsahuje jen některé analytické a praktické závěry ; k hlubšímu i zevrubnějšímu studiu odkazujeme čtenáře zejména na práci [3]. Výsledky tohoto příspěvku lze využít nejen v oblasti železobetonového stavitelství (orientace nepředpjaté nebo i předpjaté výztuže jakoby „předjímá“ uvažovanou anizotropii), ale i například v oblasti kompozitních materiálů a materiálů na bázi dřeva (vhodně navinuté umělohmotné či přírodní vláknité tkanivo na válcovou formu, které je posléze nasyceno („natuženo“) umělou pryskyřicí vlastně determinuje zde analyzovanou anizotropii), apod.

LITERATURA

[1] Kovařík, V. : Válcové skořepiny vrstevnaté struktury, Praha, Academia, 1985 .

[2] Novotný, R. : Kruhové válcové skořepinové konstrukce za některých speciálních okolností. Doktorská disertační práce, Praha, FSv ČVUT, 2001 .

[3] Novotný, R. : Některé specifické případy konstrukčně geometrického a fyzikálně strukturálního uspořádání materiálů na bázi dřeva. Habilitační práce, Praha, FLE ČZU, 2003

[4] Brdička, M. ; Samek, L. ; Sopko, R. : Mechanika kontinua, Praha, Academia ČMT, ISBN 80 – 200 – 0772 – 5 , 2000 .

[5] Budinský, B. ; Kepr, B. : Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi, Praha, SNTL, 1970