

MODELLING OF STRUCTURES WITH MOVING LOADS**J. Novotný*, J. Novotný jun.****

Summary: *Moving loads are characteristic for railway and road bridges. Dynamic analysis is as a rule based in this case on a beam model loaded by moving forces of magnitude, which is constant, changing with time harmonically or randomly. If a structure is modelled by a system of finite elements, its stiffness and mass matrices ought to be variable. Modelling of two structural problems is considered. The rail and rolling vehicle interaction and the response of a pipeline entered by a stream of fluid due to the weight and centrifugal forces of the stream. Modelling and response analysis are based on the SYSTUS programme*

1. Úvod

Pohyblivá břemena představují charakteristické zatížení železničních a silničních mostů. Dynamická řešení byla vesměs zaměřena právě na tyto typy konstrukcí. Zpravidla vycházela z modelu konstrukce jako nosníku zatíženého pohybující se silou co do velikosti stálou, měnící se harmonicky nebo náhodně (Timošenko, Koloušek, Frýba).

Není-li hmotnost nosné konstrukce velká ve srovnání s tělesem, jehož tíha představuje pohyblivé zatížení, nelze změnu rozložení hmotnosti soustav zanedbávat. Jsou-li nosná konstrukce i pohybující se objekt modelovány jako soustavy konečných prvků, mělo by jít o soustavu s proměnnou maticí tuhosti i proměnnou maticí hmotnosti. Jde např. o pojezd železničního vozidla po kolejích.

Současné programové systémy neumožňují měnit v závislosti na čase matici hmotnosti soustavy. Proto nezbývá, než hledat nějaký způsob, jak nějak obejít tuto nesnáz. Za jeden možný způsob lze považovat vyšetřování interakce koleje a vozidla jako samostatných soustav.

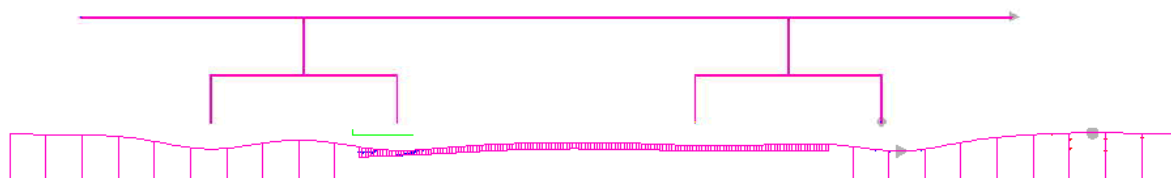
Budeme se zabývat zejména modelováním a odezvou potrubní soustavy, do níž vstupuje proud tekutiny za předpokladu, že čelo proudu zůstává rovinné a pohybuje se danou rychlostí. Hmotnost proudu je malá ve srovnání s hmotností vysokotlakého potrubí, takže lze považovat změnu matice hmotnosti za zanedbatelnou. Proud vyvolává narůstající tíhové zatížení a proměnné zatížení změnou hybnosti tekutiny v obloucích.

* Prof. Ing. Jiří Novotný, DrSc., Ing. Rostislav Zídek, Ústav stavební mechaniky stavební fakulty VUT v Brně, Veverí 95, 662 37 Brno, tel. +420549257368, fax. +4205745147, e-mail: zidek.r@fce.vutbr.cz

** Ing. Jiří Novotný, Ústav aplikované mechaniky Brno, spol. s r.o., Veverí 95, Brno, tel. +420541321291, fax. +420541211189, e-mail: novotnyj.uam@telecom.cz

2. Interakce koleje a vozidla

Navržený postup při řešení úlohy interakce drážního vozidla a koleje ukážeme na příkladu modelu elektrické lokomotivy ES 499.1 a deformovaného modelu koleje přecházející přes betonovou desku silničního přejezdu (obr. 1).



Obr. 1 Modely koleje a vozidla

Podloží pod pražcem se nahrazuje ekvivalentním pružným podpěrným prutem, jehož hmotnost má zároveň zavádět vliv hmotnosti podloží. Pružné podložky a elastomerové žabky kolejnice se nahrazují ekvivalentními pružnými prvky, které mají rozdílnou tuhost při deformaci ve směru dolů a nahoru. Předpokládá se, že betonová deska přejezdu je uložena na Winklerovském podloží.

Předpokládají se dokonale symetrické tvary a vlastnosti jak koleje, tak drážního vozidla. Modelována je jen jedna kolejnice, polovina betonové desky přejezdu a polovina vozidla. K modelování kolejnice, podpěrných prutů pražců i betonové desky a poloviny vozidla je užito prutových konečných prvků. Jednostranné vazby, pružné podpěry s lomenou tuhostní charakteristikou a disipace energie se modeluje zvláštními prvky SYSTUS 1602.

Úloha interakce se řeší ve třech krocích:

- Vypočítá se odezva modelu koleje na účinek čtyř pohybujících se sil stálé velikosti, které jsou rozmístěny tak, aby odpovídaly polohám kol vozidla se čtyřmi nápravami. Určí se posuvy pod pohybujícími se silami.
- Vypočítanými časovými průběhy posuvů pod silami, tj. pod koly vozidla, se vybudí pohyb modelu vozidla a z jeho odezvy se vypočítají síly, kterými model (kola vozidla) působí na kolejnici.
- Vypočítá se odezva modelu koleje na účinek čtyř časově proměnných pohybujících se sil. Jsou to síly, kterými model vozidla podle působí na kolejnici. Určí se namáhání kolejnice a jejích upevňovacích prvků.

Vyšetřovaná dynamická soustava je tedy nelineární a integrace pohybových rovnic přechodového děje, který představuje účinek pohyblivých sil, se provádí krokovou, např. Newmarkovou metodou. Tento výpočet je časově náročný a výpočtové modely musí umožňovat jeho provedení s přijatelnými nároky na čas a paměť počítače.

3. Model zatížení potrubí tíhou proudu tekutiny

Předpokládáme, že do prázdného potrubí začne proudit např. směs páry a vody danou rychlostí v [ms^{-1}] a průtočnou hmotností Q [kgs^{-1}].

Průtočnou hmotnost Q [kgs^{-1}] lze vyjádřit jako

$$Q = \frac{dm}{dt} = \rho A_1 \frac{ds}{dt} = \rho A_v v = m_1 v. \quad (1)$$

Součin ρA_l představuje hmotnost tekutiny m_l průměrné hustoty ρ v potrubí o vnitřním průřezu A_l a délce 1 m. Tíha tekutiny připadající na jednotku délky l_e prvku prutového modelu potrubí podle (1) je

$$q_1 = \frac{Q}{v} g. \quad (2)$$

Mají-li prvky se společným uzlem u délky l_e a l_{e+1} , má uzlová síla zavádějící účinek tíhy tekutinového proudu podle (4.3) velikost

$$F_u = q_1 \frac{l_e + l_{e+1}}{2}. \quad (3)$$

Do uzlu u modelu se zavádí síla $F_u = \text{konst.}$, jakmile čelo proudu projde průřezem uzlu.

4. Model zatížení oblouku proudem tekutiny

Pomocí veličin definovaných v předcházejícím odstavci dostáváme pro velikost odstředivé síly proudu v úseku o středovém úhlu $d\varphi$ výraz

$$dF = m_1 R d\varphi \frac{v^2}{R} = \frac{Q}{v} R d\varphi \frac{v^2}{R} = Q v d\varphi. \quad (4)$$

Výsledná odstředivá síla F v úseku oblouku o středovém úhlu φ je

$$F = Qv \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \cos \psi d\psi = 2Qv \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (5)$$

Ke stejnému výsledku lze dospět také na základě změny hybnosti proudu.

Je-li oblouk o středovém úhlu ϕ rozdělen na p stejných prvků, má uzlová síla zavádějící účinek odstředivé síly (změny hybnosti) velikost

$$F_u = 2Qv \sin \frac{\phi}{2p}. \quad (6)$$

Do uzlu modelu oblouku je zavedena síla $F_u = \text{konst.}$, jakmile čelo proudu projde průřezem uzlu.

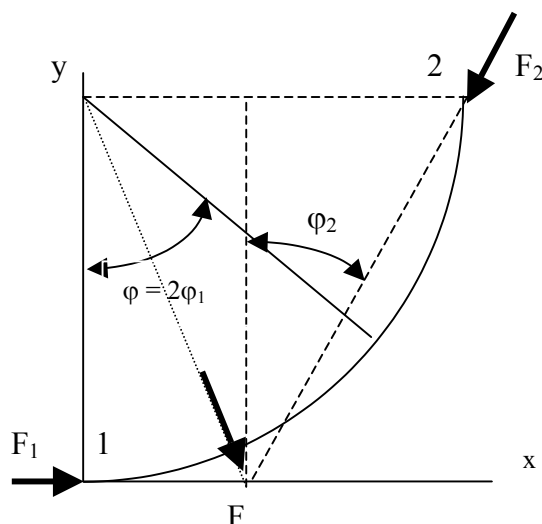
Snížení nároků na paměť počítače lze dosáhnout zavedením časově proměnných ekvivalentních sil působících v krajních uzlech oblouku (obr. 2).

Výslednou odstředivou sílu F sílu nahradíme složkou $\mathbf{F}_1(X_1, Y_1)$ v počátečním uzlu oblouku 1 a $\mathbf{F}_2(X_2, Y_2)$ v konečném uzlu oblouku 2 (obr. 2 a 3).

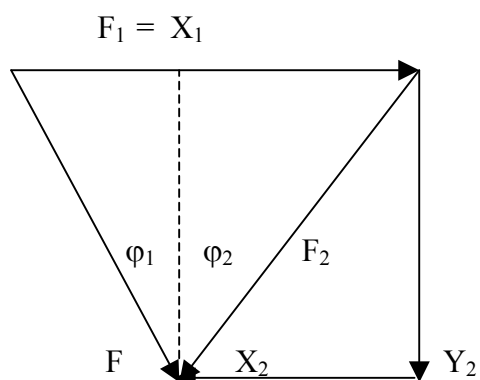
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_M \quad (7)$$

Směr síly $\mathbf{F}_1$ je volen tak, aby měla směr osy x v tečně oblouku, takže je $Y_1 = 0$. Jednoduchým postupem podle obr. 2 a 3 dostáváme

$$X_1 = Qv \sin \varphi, \quad X_2 = -Qv(\sin \varphi + \cos \varphi - 1), \quad Y_2 = -Qv \sin \varphi. \quad (8)$$



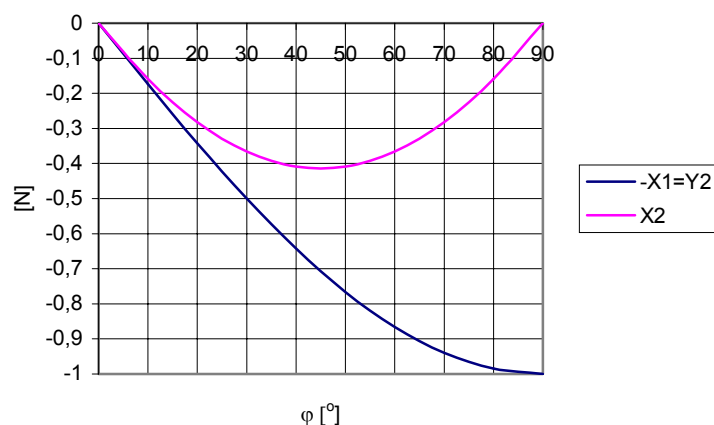
Obr. 2 Výsledná odstředivá síla



Obr. 3 Složky výsledné odstředivé síly

Pro oblouk o středovém úhlu $\phi = 90^\circ$ je závislost složek ekvivalentních zatěžovacích sil v krajních uzlech modelu oblouku pro $Q_v = 1$ znázorněna na obr. 4.

$Q_v = 1$ [N]



Obr. 4 Průběh složek výsledné odstředivé síly

Je-li poloměr oblouku malý, takže doba, kterou prochází čelo proudu obloukem je malá ve srovnání s dobou potřebnou k průchodu přímých úseků a oblouků je větší množství, lze dále snížit nároky na přípravu a na operační dobu. Časově proměnné zatížení oblouku se nahradí zavedením výsledné odstředivé síly v čase, kdy čelo proudu je uprostřed oblouku.

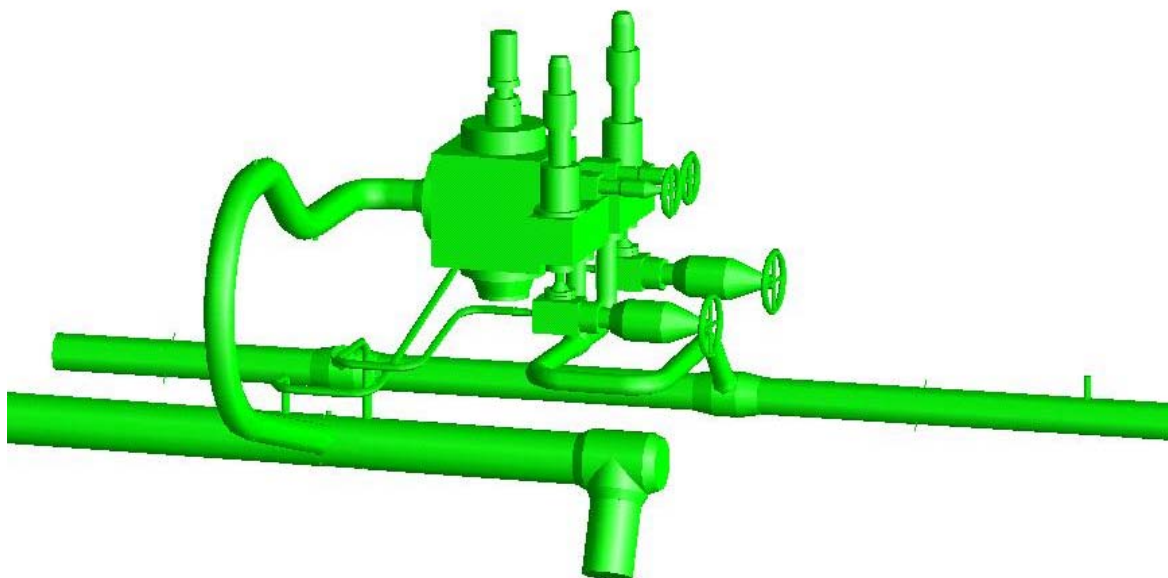
Označme vektor rychlosti tekutiny na vstupu do oblouku $\mathbf{v}_1$ a na výstupu $\mathbf{v}_2$. Tekutina působí na oblouk potrubí výslednou silou vyjádřenou změnami hybnosti na vstupu a výstupu ve tvaru

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v}_1 - Q\mathbf{v}_2 . \quad (9)$$

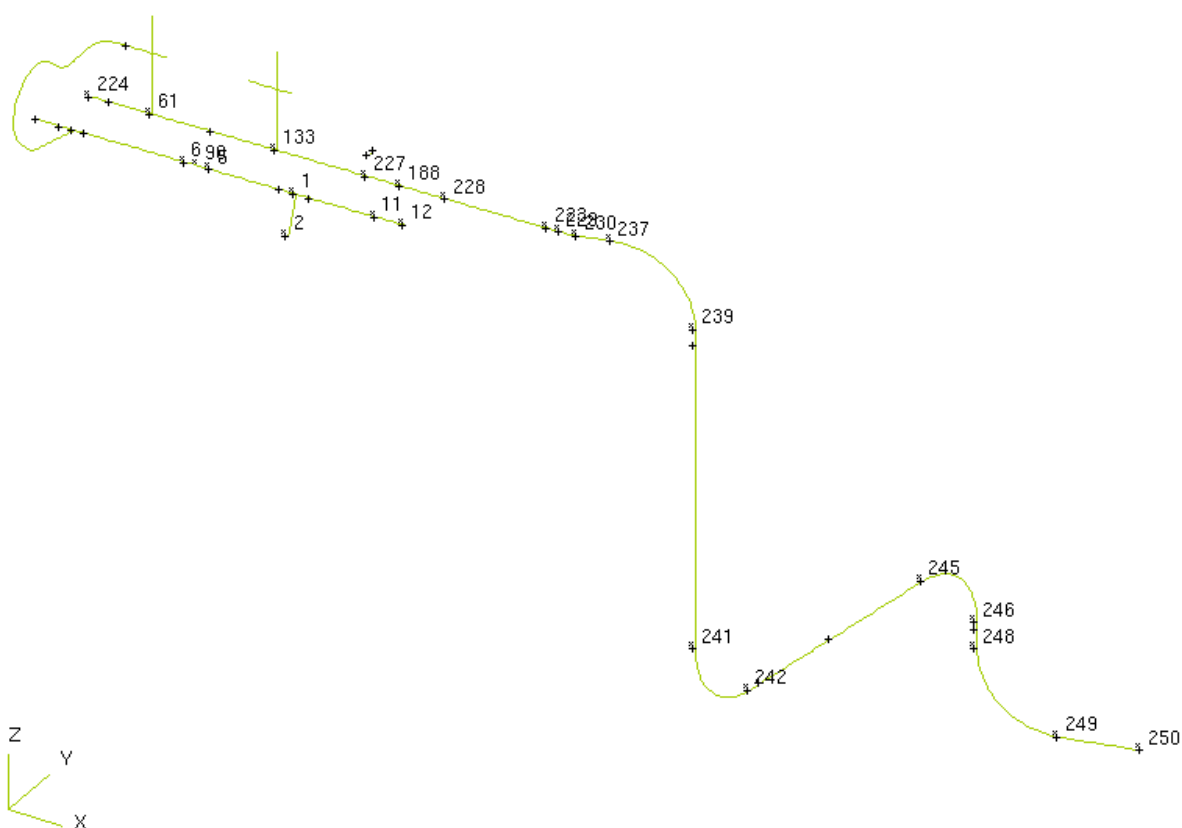
Do krajních uzlů prutového modelu oblouku se zavedou poloviny složek výsledné síly (9). Zlom potrubí se považuje za oblouk, jehož poloměr se blíží nule.

5. Model potrubní soustavy a jejího zatížení

Jako příklad jsou uvedeny některé výsledky výpočtu odezvy proudu parovodní směsí protékající hlavním pojistným ventilem kompenzátoru objemu. Na obr. 5 je znázorněn protékající pojistný ventil, do něhož je přiváděn proud parovodní směsí a na obr. 6 dílčí model protékaného potrubí.



Obr. 5 Pohled na pojistný ventil



Obr. 6 Model protékaného potrubí

Úsek 2,1 (obr. 6) představuje nátrubek kompenzátoru objemu, který ústí do rozdělovacího potrubí. Proud parovodní směsi vychází z kompenzátoru objemu, protéká rozdělovacím potrubím a potrubím ve tvaru smyčky (obr. 6) vstupuje do tělesa pojistného ventilu. V uzlu č. 61 (obr. 6) vstupuje do tzv. sběrného potrubí a proudí do barbotážní nádrže (uzel č. 250).

Tab. 1 Proud parovodní směsi

Parametry proudu parovodní směs		Rozváděcí potrubí	Smyčka před PV KO	Sběrné potrubí	Vstup do barbotéru
Q - vody	[kg s ⁻¹]	57,51	57,51	34,14	33,39
Q - páry	[kg s ⁻¹]	0,00	0,00	23,46	24,97
v - vody	[m s ⁻¹]	2,86	11,23	71,94	155,67
v - páry	[m s ⁻¹]	2,92	11,32	104,80	187,26
t - vody	[°C]	346,24	346,24	182,05	177,47
t - páry	[°C]	347,96	347,96	179,74	177,23
p	[MPa]	16,12	57,51	1,00	0,94

Výpočtový model předpokládá, že nedochází k porušení rovinného čela proudu, které se pohybuje rychlostí společnou pro vodu i páru. Společná rychlost se vypočítá ze vztahu, který vyjadřuje zachování celkové změny hybnosti v ohybech

$$v = \frac{Q_v v_v + Q_p v_p}{Q_v + Q_p} \quad (10)$$

Velikosti rychlosti, součinu Qv , hmotnosti m_l a tíhy q_l sloupce tekutiny délky 1m o průřezu A_l jsou v tab. 2.

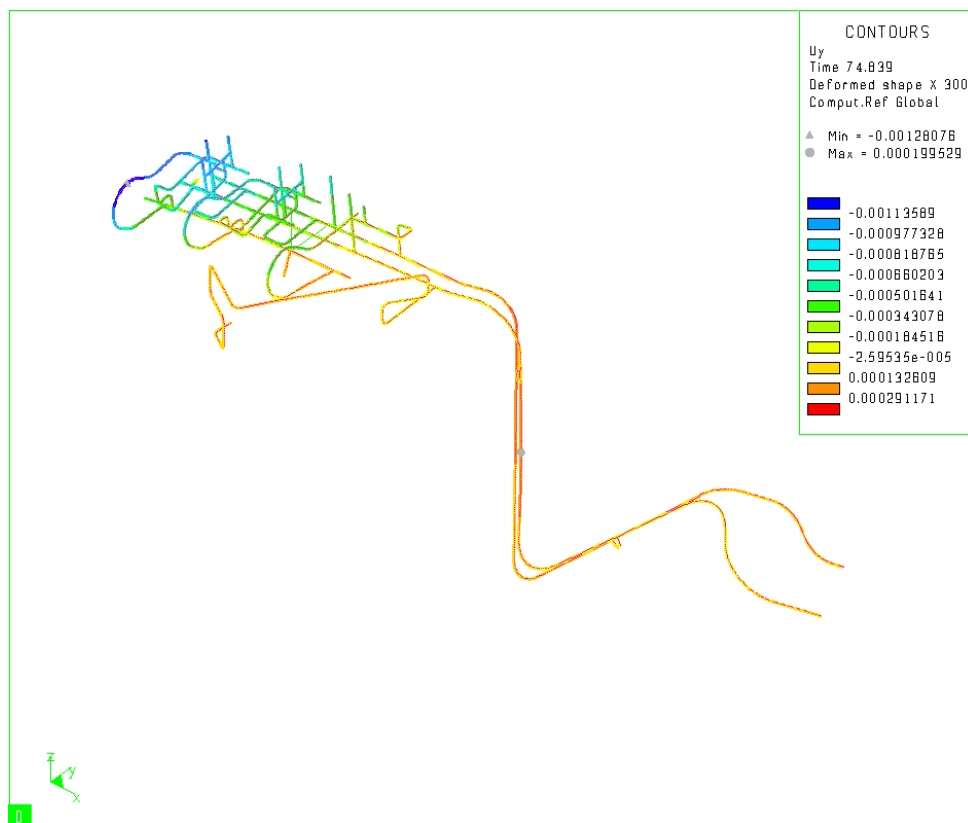
Tab. 2 Vstupní výpočtové hodnoty

Vstupní hodnoty		Rozváděcí kolektor	Smyčka před PV KO	Sběrné potrubí	Vstup do barbotéru
Qv	[kgm s ⁻²]	164	646	4915	9874
v	[m s ⁻¹]	2,86	11,23	85,32	169,19
Q	[kg s ⁻¹]	57,51	57,51	57,60	58,36
m _l = Q/v	[kg/m]	20,11	5,12	0,68	0,34
q _l = m _l g	[N/m]	197,3	50,2	6,6	3,4

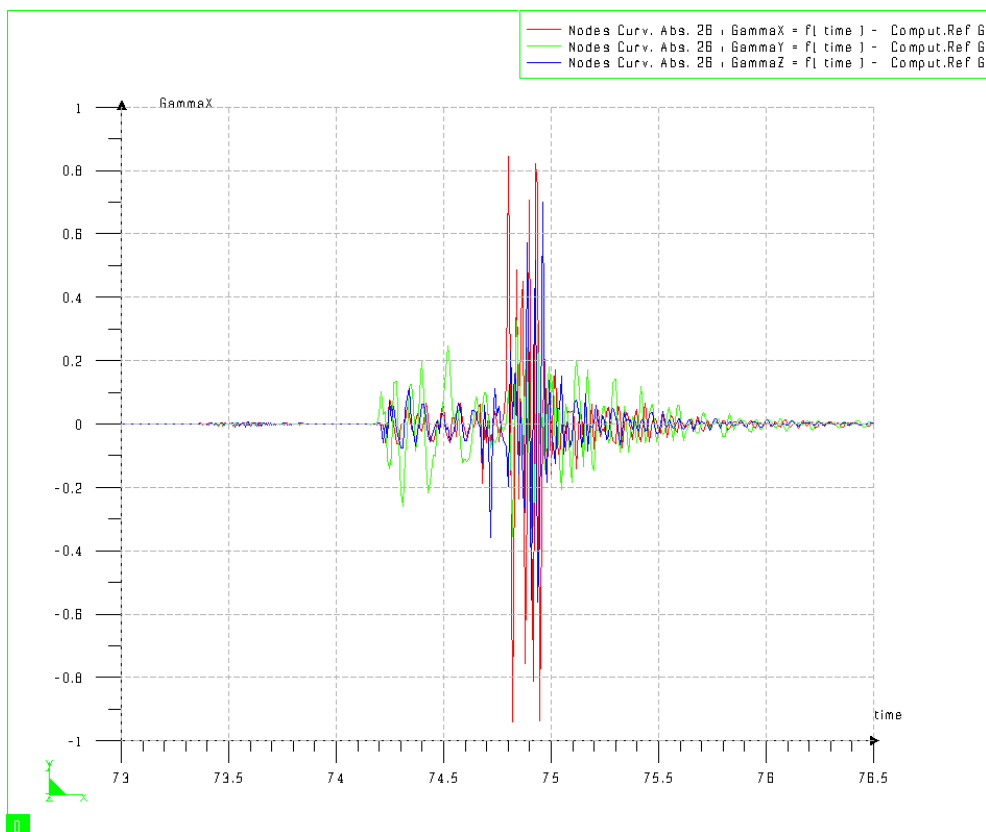
6. Odezva potrubní soustavy

Proud vstupuje do nátrubku kompenzátoru objemu v čase 73 s po otevření pojistného ventilu. Velikost posuvu dosahuje až 1,2 mm. Znázornění deformované soustavy v čase, kdy čelo proudu dorazilo k barbotážní nádrži, ukazuje naklápění pojišťovacích ventilů (obr. 7). Potrubí, které je protékáno proudem parovodní směsi výrazně kmitá. Na obr. 8 jsou časové průběhy zrychlení těžiště protékaného pojistného ventilu.

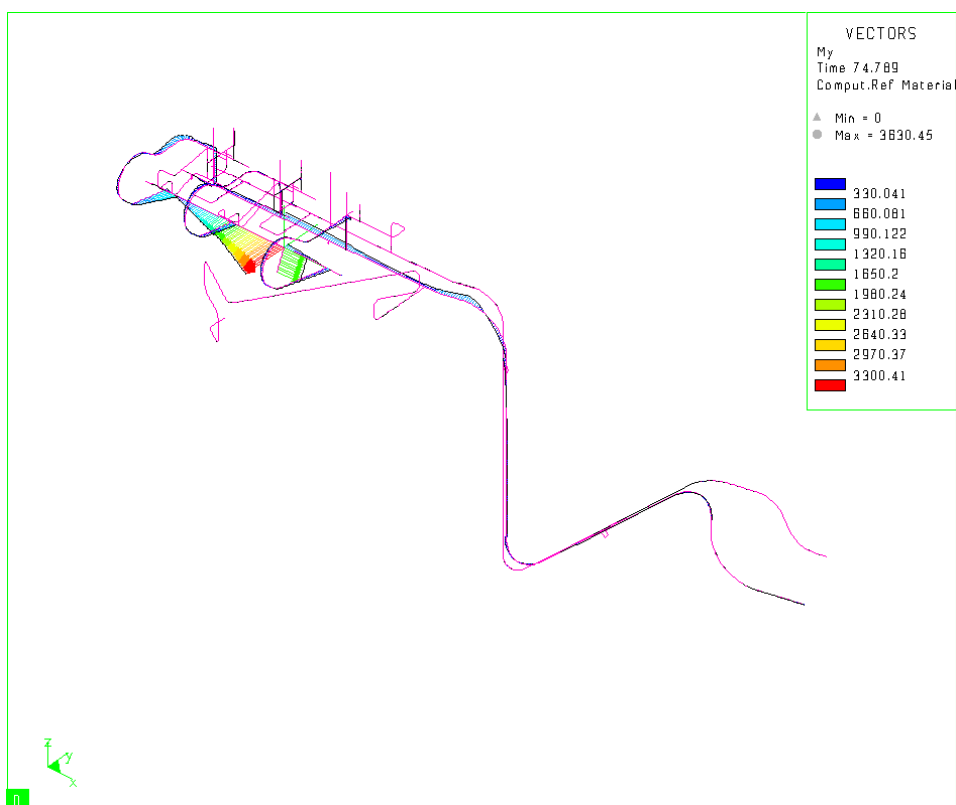
Rozložení ohybových momentů v okamžiku největšího namáhání nátrubku kompenzátoru objemu je znázorněno na obr. 9 a 10. Na obr. 11 a 12 jsou časové průběhy ohybových momentů a na obr. 13 průběh výsledného ohybového momentu na nátrubku kompenzátoru objemu.



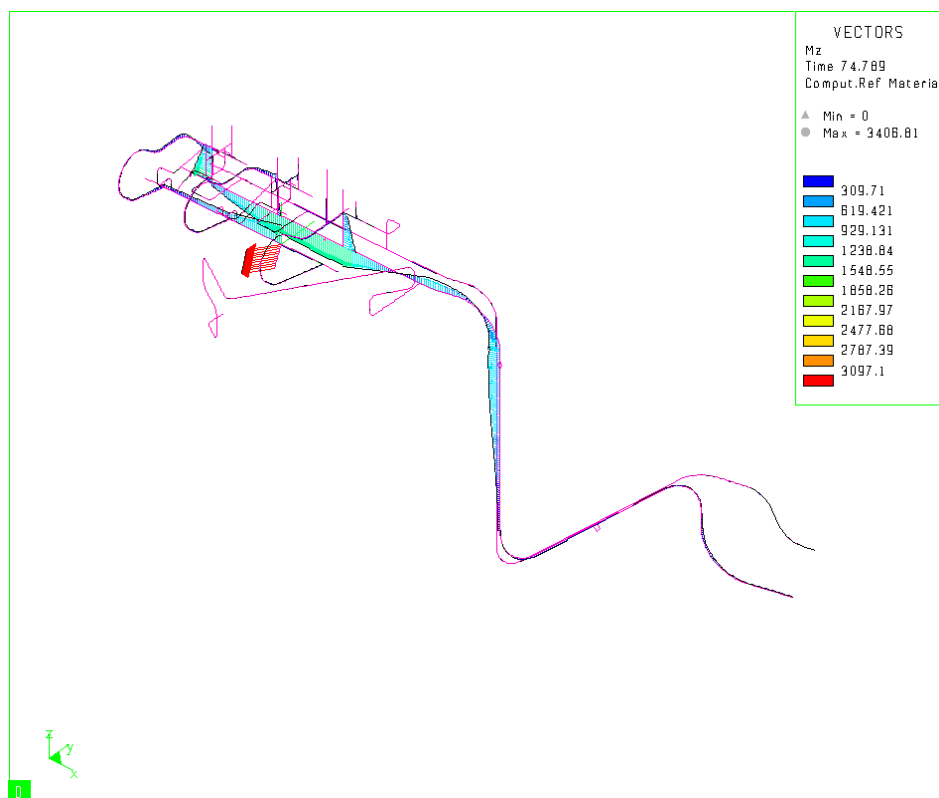
Obr. 7 Posuvy v čase $t = 74,839$ s



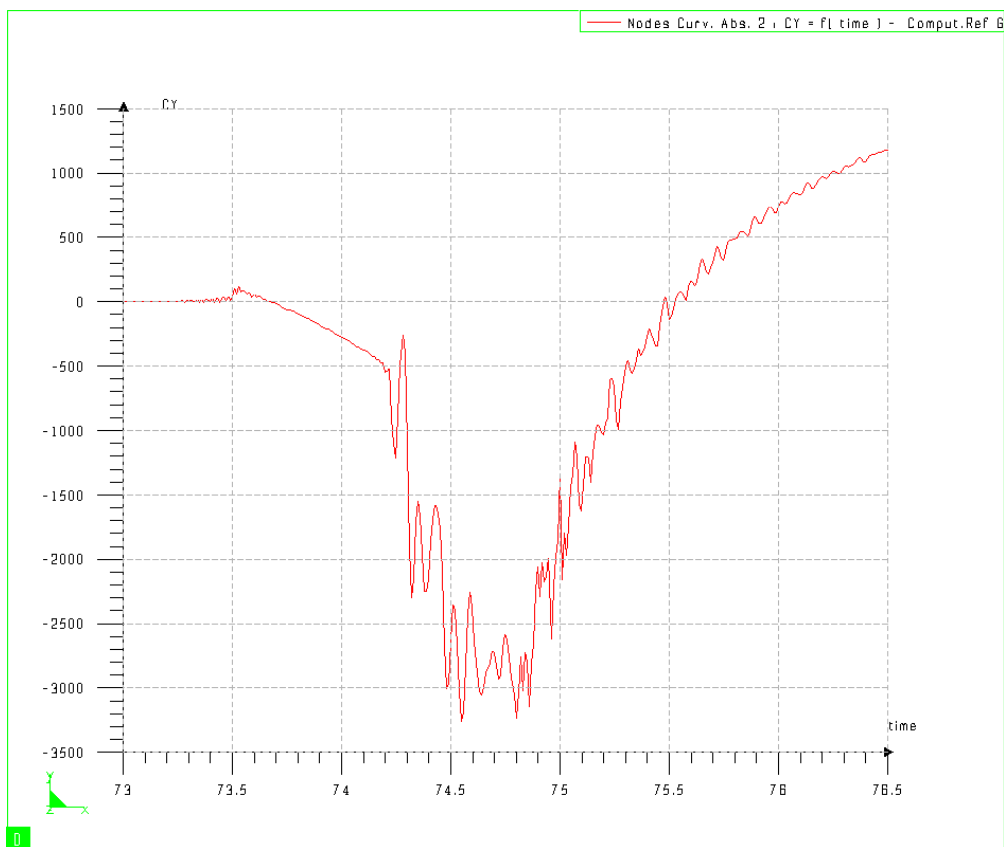
Obr. 8 Složky zrychlení těžiště protékajícího pojistného ventilu



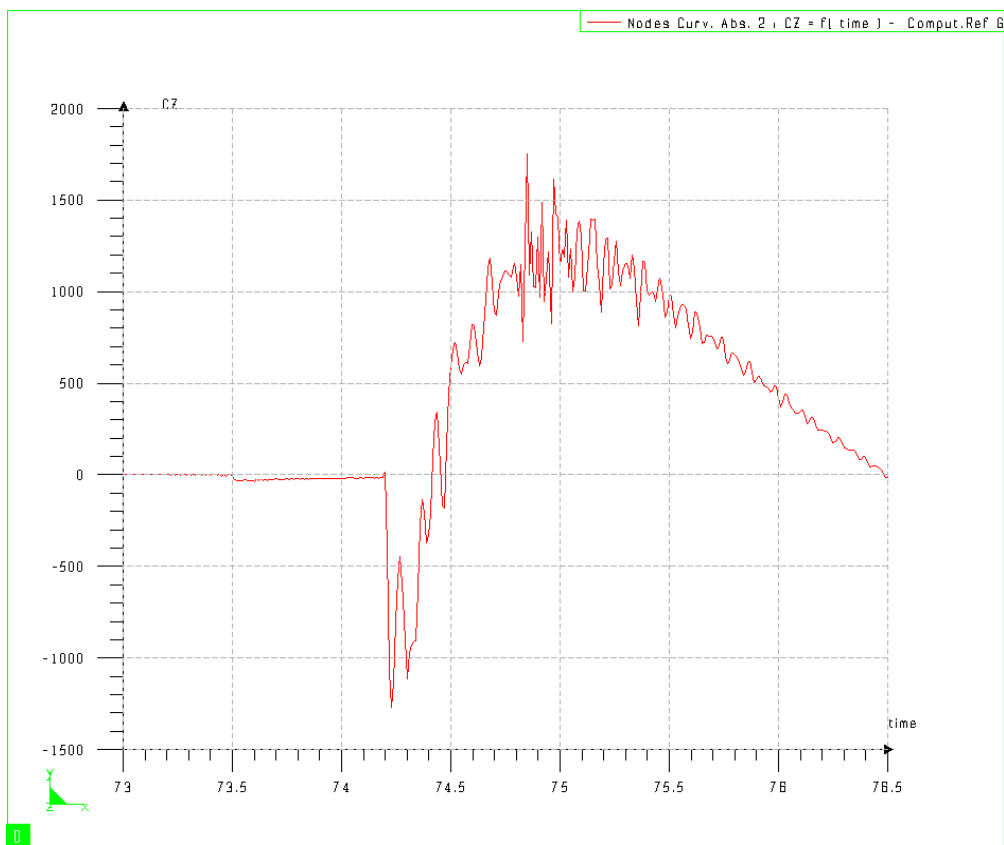
Obr. 9 – M_y ($t = 74,789$ s)



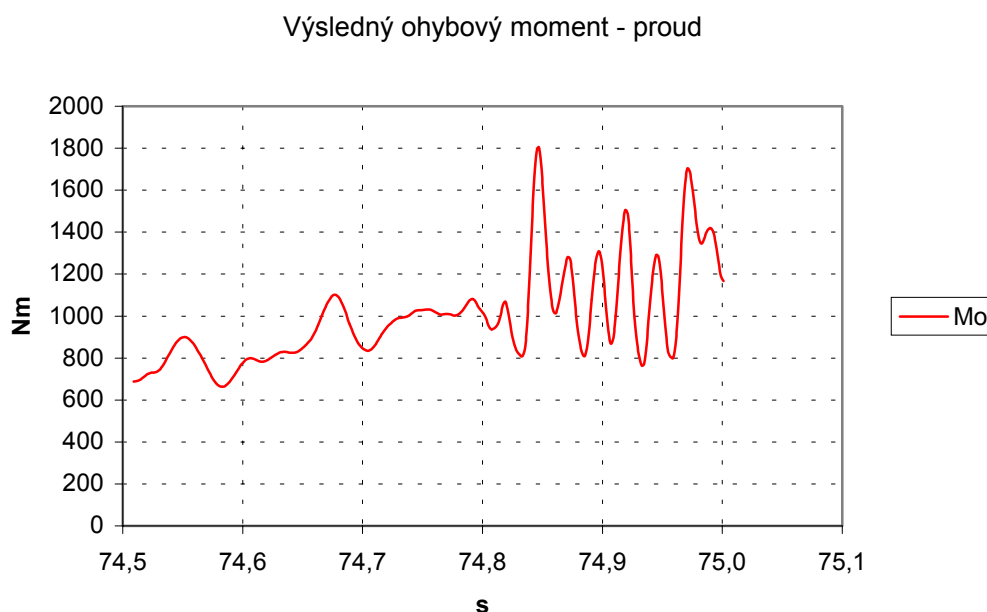
Obr. 10 – $-M_z$ ($t = 74,789$ s)



Obr. 11 $M_y - KO$



Obr. 12 $M_z - KO$



Obr. 13 Průběh výsledného ohybového momentu na nátrubku kompenzátoru objemu

7. Závěr

Konstrukce zatížená pohyblivým zatížením, které jsou složitějšího tvaru a nejdou nahradit ekvivalentním prutem, nelze vyšetřovat jinak než jako soustavy konečných prvků. Není-li hmotnost nosné konstrukce velká ve srovnání s objektem, jehož tíha představuje pohyblivé zatížení, mělo by jít o soustavu s proměnnou maticí hmotnosti. Jde-li o velký objekt, jehož model se stýká s konstrukcí ve větším počtu uzlů, je i matice tuhosti proměnná.

Současné programové systémy neumožňují měnit v závislosti na čase tyto matice. K obejití tohoto problému byl užit v případě koleje a drážního vozidla na přejezdu model interakce koleje a vozidla jako samostatných soustav.

Hmotnost proudu tekutiny, jde-li o potrubí zatížené normálně velkým přetlakem, je malá ve srovnání s hmotností potrubí a tekutina neovlivňuje tuhost soustavy. Účinek proměnné vlastní tíhy zpravidla není významný. Rozhodující je změna hybnosti proudu v ohybech a zlomech potrubí.

7. Literatura

Timošenko Š.: Kmitání ve strojnictví, SNTL Praha, 1960.

Koloušek V.: Stavebné konštrukcie namáhané dynamickými účinkami, *SVTL Bratislava*, 1967.

Frýba L: Dynamics of railway bridges, *Academia Praha*, 1996.

Krásný I., Pečínka L.: Ohybové kmitání přímých úseků a kolen s pohyblivým zatížením, sborník Kolokvia. *Dynamics of machines* 2003 Praha, str. 81-88.

Novotný J., Novotný J, jun.: Pružné uložení kolejnic systému RAILFLEX. Zjištění maximální dovolené rychlosti na přejezdu. Zpráva ÚAM Brno, arch.č. 3259/02, 2002.