ENGINEERING MECHANICS 2004
NATIONAL CONFERENCE
with international participation
Svratka, Czech Republic, 10 - 13 May 2004

PROBABILITY DENSITY ASSESSMENT OF A LINEAR SYSTEM DUE TO POLYNOMIAL OF THE NORMAL NOISE

J. Náprstek*

Summary: *Many types of external additive random excitation of dynamic systems admit to be modelled as a combination of powers of Gaussian noise. Such type of excitation produces a non-Gaussian response even if the dynamic system is linear and excitation additive only. Although the excitation as a whole is non-Gaussian, the problem can be transformed into the form of linear system with additive and multiplicative white noise excitation producing finally a non-Gaussian response. The general method of transformation, respective FPK equation, basic stochastic moments of the response and a demonstrative example are discussed.*

1. Úvod

Negaussovský charakter aditivního náhodného buzení dynamické soustavy vyplývá v řadě případů z nelineární interakce soustavy s okolním prostředím. V některých případech lze toto buzení vyjádřit jako mocninovou řadu jistého procesu, který je základem deterministického nebo náhodného buzení. Celé buzení lze pak formulovat ve tvaru kombinace mocnin tohoto vstupního procesu či procesů. Tento krok lze chápat i jako rozvoj původního procesu do mocninové řady na příklad podle blízkého Gaussova procesu. Problémem v takovém případě je následné použití FPK rovnice pro stanovení vzájemné hustoty pravděpodobnosti odezvy, která připouští na vstupu pouze gaussovské procesy. Součet mocnin gaussovského procesu však vede v obecném případě k procesu negaussovskému, což by použití FPK rovnice vylučovalo.

V některých speciálních případech však lze původní soustavu rozšířit o speciální vícekomponentní lineární filtr, na jehož vstupu stojí pouze vektor gaussovských bílých šumů. Výstupem z tohoto filtru je proces, jenž odpovídá členu s první mocninou rozvoje procesu buzení na pravé straně původní rovnice. Gaussovský bílý šum v rozšířené lineární soustavě vystupuje v roli aditivního i multiplikativního buzení a vede ke vzniku dodatečné statické složky zatížení. Odtud vyplývá, že i první mocnina generovaného šumu nemusí být v takovém případě gaussovská a dále že odezva původní soustavy, i když je lineární, bude vždy negaussovská, a to měrou, která odpovídá vlivu vyšších mocnin vstupního šumu na původní dynamické soustavě.

2. Itoův diferenciální systém

Problémem odezvy lineární soustavy vlivem aditivního náhodného buzení polynomem gaussovského šumu se zabývalo zhruba od konce osmdesátých let minulého století více autorů, viz např. Grigoriu, Ariaratnam, (1988), Muscolino (1995). Různé studie na toto téma se objevují

*Ing. Jiří Náprstek, DrSc.,
Ústav teoretické a aplikované mechaniky AV ČR; Prosecká 76, 190 00 Praha 9
naprstek@itam.cas.cz

také v souvislosti s aplikacemi. Tento příspěvek je pokusem vyjádřit celý postup řešení v kompaktním maticovém tvaru za použití Kroneckerovy symboliky zavedené pro direktní součin a součet matic, viz např. Graham (1981).

Zabývejme se lineární dynamickou soustavou aditivně buzenou náhodným procesem, který lze zapsat ve tvaru polynomu gaussovských šumů vzniklých lineární filtrací bílého šumu:

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{U}(t) + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{D}_j \mathbf{V}^{[j]}(t) \tag{1}$$

$\mathbf{U}(t)$	odezva soustavy - vektor (n)
$\mathbf{V}^{[j]}(t)$	$j-$tá mocnina filtrovaného šumu - vektor (m^j)
$\mathbf{C}$	matice tuhosti $(n \times n)$
$\mathbf{D}_j$	obdélníkové matice $(n \times m^j)$

Mocnina $j-$tého stupně vektoru $\mathbf{V}(t)$ je definována v Kroneckerově smyslu, viz např. Graham (1981), to jest podle základního schématu (označení platná pouze pro následující rovnici (2)):

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B}, & a_{12}\mathbf{B}, & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B}, & a_{22}\mathbf{B}, & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B}, & a_{m2}\mathbf{B}, & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{2}$$

kde $\mathbf{A}$ - matice $(m \times n)$, $\mathbf{B}$ - matice $(p \times q)$, $\mathbf{M}$ - výsledná matice $((m \cdot p) \times (n \cdot q))$. To znamená na příklad, že $\mathbf{V}^{[j]}(t)$ ve smyslu (1) je vektor (m^j). Pro $j = 1, 2$ tedy platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{[1]}(t) &= \mathbf{V}(t)\ ; \quad \text{vektor } (m) \\ \mathbf{V}^{[2]}(t) &= [V_1 \cdot \mathbf{V}^T(t), V_2 \cdot \mathbf{V}^T(t), \cdots, V_m \cdot \mathbf{V}^T(t)]^T\ ; \quad \text{vektor } (m^2) \end{aligned} \tag{3}$$

Vektor $\mathbf{V}(t)$ můžeme pokládat za výstup lineárního filtru, na jehož vstupu působí skalární normální bílý šum $w(t)$ o intenzitě s^2 s nulovým matematickým středem a delta korelací $\mathbf{E}\{w(t+\tau)w(t) = s^2\delta(\tau)\}$. Tento filtr se řídí rovnicí:

$$\dot{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{H}\mathbf{V}(t) + \mathbf{q}w(t) \tag{4}$$

$\mathbf{H}$	matice $(m \times m)$
$\mathbf{q}$	vektor (m)

Zavedeme-li transformaci:

$$\mathbf{V}_1(t) = \mathbf{V}(t)\ ; \quad \mathbf{V}_2(t) = \mathbf{V}^{[2]}(t)\ ; \quad \cdots ;\ \mathbf{V}_p(t) = \mathbf{V}^{[p]}(t)\ ; \tag{5}$$

můžeme rovnice (1), (4) přepsat v ekvivalentním tvaru:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{U}(t) + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{D}_j \mathbf{V}_j(t) \\ \dot{\mathbf{V}}_1(t) &= \mathbf{H}\mathbf{V}_1(t) + \mathbf{q}w(t) \end{aligned} \tag{6}$$

Soustava (6) není úplná a je třeba ji doplnit o rovnice, které vzniknou derivováním mocnin $\mathbf{V}^{[j]}(t)$ ve smyslu transformačních vztahů (5). Protože $\mathbf{V}(t)$ je odezva soustavy na náhodné buzení, derivace tohoto vektoru a jeho mocnin musí vycházet z Itoovy definice derivování náhodných funkcí, viz např. Itô, McKean (1965), Bolotin (1979). Poměrně pracnými úpravami se tak dostaneme k diferenciálním rovnicím, které popisují lineární vztahy mezi jednotlivými $\mathbf{V}_j(t)$:

$$\dot{\mathbf{V}}_j(t) = \frac{d}{dt}[\mathbf{V}^{[j]}(t)] =$$

$$\mathbf{T}_j[\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_m^{[j-1]}]\mathbf{V}^{[j]} + \mathbf{T}_j[\mathbf{q} \otimes \mathbf{I}_m^{[j-1]}]\mathbf{V}^{[j-1]}w(t) + \tfrac{1}{2}\mathbf{T}_j(\mathbf{T}_{j-1} \otimes \mathbf{I}_m)[\mathbf{q}^{[2]}s^2 \otimes \mathbf{I}_m^{[j-2]}]\mathbf{V}^{[j-2]} \tag{7}$$

V rovnici (7) znamená $\mathbf{I}_m$ jednotkovou matici řádu m. Matice $\mathbf{T}_j$ je konstantní incidenční matice, která má následující strukturu, viz Graham (1981):

$$\mathbf{T}_j = \sum_{k=0}^{j-1} \mathbf{E}_{n^{j-k},n^k} \tag{8}$$

přičemž $\mathbf{E}_{i,j}$ jsou čtvercové permutační matice o rozměrech $(ij \times ij)$. Každá z nich se skládá z $(j \times i)$ elementárních podmatic $\mathbf{E}^{kl}$, každá o rozměrech $(i \times j)$. Podmatice $\mathbf{E}^{kl}$ má jedničku na pozici (k, l) a nuly ve všech ostatních prvcích. Takže můžeme psát:

$$\mathbf{E}_{i,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{11}, & \mathbf{E}^{21}, & \cdots & \mathbf{E}^{j1} \\ \mathbf{E}^{12}, & \mathbf{E}^{22}, & \cdots & \mathbf{E}^{j2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}^{1i}, & \mathbf{E}^{2i}, & \cdots & \mathbf{E}^{ji} \end{bmatrix} ; \qquad \text{kde na příklad} \qquad \mathbf{E}^{12} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & \cdots & 0 \\ 0, & 0, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Z obecné struktury matice $\mathbf{E}_{i,j}$ vyplývá, že obsahuje vždy právě jednu jedničku na každé řádce a v každém sloupci umístěnou podle pravidel daných první částí rovnice (9).

Doplníme-li soustavu (6) podle (7) dostaneme úplnou stochastickou diferenciální soustavu:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{U}(t) + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{D}_j\mathbf{V}_j(t) & (a) \\ \dot{\mathbf{V}}_1(t) &= \mathbf{H}_1\mathbf{V}_1(t) + \mathbf{q}w(t) & (b) \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{V}}_i(t) &= \mathbf{H}_i\mathbf{V}_i(t) + \mathbf{q}_i\mathbf{V}_{i-1}(t)w(t) + \mathbf{r}_i\mathbf{V}_{i-2}(t) & (c) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{10}$$

přičemž $i = 2, 3, ..., p$, $\mathbf{V}_o = 1$. Vektory $\mathbf{q}_i, \mathbf{r}_i$ a matice $\mathbf{H}_i$ jsou dány vzorci:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i &= \mathbf{T}_i[\mathbf{q} \otimes \mathbf{I}_m^{[i-1]}] & (a) \\ \mathbf{r}_i &= \tfrac{1}{2}\mathbf{T}_i(\mathbf{T}_{i-1} \otimes \mathbf{I}_m)[\mathbf{q}^{[2]}s^2 \otimes \mathbf{I}_m^{[i-2]}] & (b) \\ \mathbf{H}_i &= \mathbf{T}_i[\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_m^{[i-1]}] & (c) \end{aligned} \tag{11}$$

Vektory $\mathbf{q}_i$ a matice $\mathbf{H}_i$ se dají snadno zkonstruovat pomocí rekurentních formulí:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_{i-1} \otimes \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_m^{[i-1]} \otimes \mathbf{q}_1 \; ; \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{q} \quad & (a) \\ \mathbf{H}_i = \mathbf{H}_{i-1} \otimes \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_m^{[i-1]} \otimes \mathbf{H}_1 \; ; \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H} \quad & (b) \end{aligned} \tag{12}$$

Soustava rovnic (10) se nyní dá zapsat v kompaktním tvaru soustavy řádu $\nu = n + \sum_{j=1}^{p} m^j$:

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = [\mathbf{R} + \mathbf{G}w(t)]\mathbf{Z}(t) + \mathbf{F} + \mathbf{Q}w(t) \tag{13}$$

Tato soustava popisuje odezvu lineární soustavy podrobené vnějším deterministickým účinkům $\mathbf{F}$ a bílému šumu $w(t)$, který zde vystupuje jakožto aditivní a dále jako parametrický. Matice, které se vyskytují v rovnici (13), mají tento tvar:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 & \mathbf{D}_3 & \cdots & \mathbf{D}_{p-2} & \mathbf{D}_{p-1} & \mathbf{D}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{r}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{H}_3 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{p-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{r}_p & \mathbf{0} & \mathbf{H}_p \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{q}_3 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{q}_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{q}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{14a, b}$$

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(t) \\ \mathbf{V}_1(t) \\ \mathbf{V}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{V}_p(t) \end{bmatrix} \; ; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{q}^{[2]}s^2 \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \; ; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{15a, b, c}$$

Původní lineární soustava (1) s aditivním buzením ve tvaru polynomu gaussovského šumu generovaného lineárním filtrem (4) byla převedena na lineární soustavu (13) s lineárně uplatňujícím se normálním bílým šumem jakožto náhodným procesem. V soustavě působí konstantní deterministické zatížení úměrné intenzitě bílého šumu s^2. Odtud vyplývá, že proces odezvy nebude centrovaný, ačkoliv vnější buzení je centrované. Dalším faktorem je vstup bílého šumu do parametrů soustavy. To znamená, že odezva nebude gaussovská, a to jak odezva původní soustavy $\mathbf{U}(t)$, tak ani generovaný šum $\mathbf{V}(t)$. Odchylka od gaussovského procesu bude dána strukturou matic $\mathbf{D}_j$. Pokud bude $\mathbf{D}_1$ dominantní a ostatní $\mathbf{D}_j$ ve smyslu normy podružné, nebude odchylka odezvy od gaussovského procesu velká a dá se vystačit s popisem odezvy pomocí náhradního gaussovského procesu s vhodně určenými parametry. Je-li však např. $\mathbf{D}_2$ významné, negaussovský charakter již nelze zanedbat. V mezním případě pak může dojít i ke ztrátě stochastické stability, viz např. Náprstek (1996), i když v praxi je taková situace v daném případě málo pravděpodobná.

Zároveň je však třeba si uvědomit, že prakticky zvládnutelné případy nemohou počítat s příliš vysokým stupněm p polynomu bílého šumu. Rozsah soustavy (13) totiž roste exponenciálně s rostoucím p, jak vyplývá z poznámky k soustavě (13). To znamená, že při studiu soustavy s jedním stupněm volnosti ($n = 2$) a filtru druhého řádu ($m = 2$) budou rozsahy pro $p = 1, 2, 3, 4, ..$ tyto: $\nu = 4, 8, 16, 32, ...$ Na druhé straně soustava s větším počtem stupňů volnosti tento nárůst příliš nezaznamená, pokud filtr (4) zůstane na úrovni jednoduché rovnice druhého řádu. K prudkému zvýšení rozsahu soustavy (13) však dojde při složitějším filtru (4).

3. Jednobodová a vícebodová charakteristika odezvy

Soustava (13) je vzhledem k postupu jejího odvození Itoova typu, viz např. Graham (1981),Itô, McKean (1965), a proto v dalším řešení ať už přímým rozkladem na stochastické momenty, anebo prostřednictvím FPK rovnice se již neuplatní korekční členy vyplývající ze skutečnosti, že procesy, se kterými se pracuje, nejsou zcela Markovova typu, viz Wong, Zakai (1965), Náprstek (2003). Na rovnici (13) tedy můžeme ihned uplatnit operátor matematického středu $\mathbf{E}\{\cdot\}$. Vzhledem k tomu, že bílý šum $w(t)$ je centrovaný, dostaneme:

$$\mathbf{E}\{\dot{\mathbf{Z}}(t)\} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{E}\{\mathbf{Z}(t)\} + \mathbf{F} \tag{16}$$

kde $\mathbf{E}\{\mathbf{Z}(t)\}, \mathbf{E}\{\dot{\mathbf{Z}}(t)\}$ je vektor středních hodnot odezvy, resp. středních hodnot časových derivací odezvy. Z rovnice (16) je zřejmé, že vzhledem k vektoru $\mathbf{F}$, který je funkcí intenzity vstupního bílého šumu, bude mít soustava (16), a tím i soustava (1), necentrovanou odezvu. Poloha středu se ze soustavy (16) získá anulací levé strany a následným vyřešením algebraické soustavy:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{E}\{\mathbf{Z}(t)\} = -\mathbf{F} \tag{17}$$

Soustava rovnic pro druhé a vyšší momenty se odvodí jako obvykle. To znamená, že celá soustava (13) se vynásobí vektorem odezvy v příslušné mocnině (zde v Kroneckerově smyslu) a na takto vzniklou relaci se uplatní operátor matematického středu. Po složitějších úpravách dostaneme:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\dot{\mathbf{Z}}^{[k]}(t)\} \; = & \left[\mathbf{R}_k + \tfrac{1}{2}\mathbf{T}_k(\mathbf{T}_{k-1} \otimes \mathbf{I}_\nu)(\mathbf{I}_\nu^{[k-2]} \otimes \mathbf{G}^{[2]} s^2\right] \cdot \mathbf{E}\{\mathbf{Z}^{[k]}(t)\} + \\ & + \mathbf{T}_k \left[\mathbf{I}_\nu^{[k-2]} \otimes \mathbf{F}\right] \cdot \mathbf{E}\{\mathbf{Z}^{[k-1]}(t)\} + \tfrac{1}{2}\mathbf{T}_k(\mathbf{T}_{k-1} \otimes \mathbf{I}_\nu) \cdot \\ & \cdot \left\{\left[\mathbf{I}_\nu^{[k-1]} \otimes \mathbf{T}_2(\mathbf{G} \otimes \mathbf{Q})\right] \cdot \mathbf{E}\{\mathbf{Z}^{[k-1]}(t)\} + (\mathbf{I}_\nu^{[k-2]} \otimes \mathbf{Q}^{[2]})\right\} s^2\end{aligned} \tag{18}$$

přičemž matice $\mathbf{R}_k$ jsou dány rekurentní formulí:

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_{k-1} \otimes \mathbf{I}_\nu + \mathbf{I}_\nu^{[k-1]} \otimes \mathbf{R} \; ; \quad \mathbf{R}_1 = \mathbf{R} \tag{19}$$

Rovnice (18) umožňuje vypočítat jak přechodové, tak stacionární momenty odezvy. Stacionární momenty v daném případě zřejmě existují, neboť nelze očekávat, že by některý z nich ztratil stabilitu. Získají se z algebraické soustavy, která vznikne anulací prvních derivací na levé straně (18), podobně jako v případě prvního momentu.

Pro soustavu (16), resp. (17) a soustavu (18) je typické, že zachovávají nenulové liché momenty, tj. matematický střed, šikmost, atd. Ve stacionárním případě mají tendenci nabývat spíše záporných hodnot (diagonální členy). Z toho vyplývá, že výsledná PDF má tendenci se koncentrovat spíše do záporných hodnot. Tento jev se ještě více projeví rozborem centrálních momentů, které se získají z jednoduché rovnice:

$$\mathbf{E}\left\{\overline{\mathbf{Z}}^{[k]}(t)\right\} = \mathbf{E}\left\{(\mathbf{Z}(t) - \mathbf{E}\left\{\mathbf{Z}(t)\right\})^{[k]}\right\} \tag{20}$$

Dá se ukázat, že v případě lineárních soustav zatížených vnějším deterministickým nebo náhodným buzením a lineárně parametrickým bílým šumem je možné zkonstruovat vztah mezi $k-$tým středem v k různých časových bodech a odpovídajícími centrálními momenty, viz Pugachev, Sinitsyn (1987), Di Paola (1988). Použije se fundamentální matice $\mathbf{\Phi}(t_j, t_1)$, která vychází z dynamické matice diferenciální soustavy pro matematický střed odezvy (16), což je matice $\mathbf{R}$ bez korekčních členů. V daném případě má tento vztah tvar:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left\{\overline{\mathbf{Z}}(t_1) \otimes \overline{\mathbf{Z}}(t_2) \otimes \; \ldots \otimes \overline{\mathbf{Z}}(t_k)\right\} = \\ &\qquad [\mathbf{I}_\nu \otimes \mathbf{\Phi}(t_k, t_1) \otimes \mathbf{\Phi}(t_{k-1}, t_1) \otimes \ldots \otimes \mathbf{\Phi}(t_2, t_1)] \, \mathbf{E}\left\{\overline{\mathbf{Z}}^{[k]}(t_1)\right\}\end{aligned} \tag{21}$$

přičemž $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$. Zavedeme-li do (21) $k = 2$, dostaneme vzorec pro dvoubodovou korelaci a příslušné centrální momenty, které jsou totožné s kumulanty druhého řádu.

Ve stacionárním případě momenty odezvy nezávisejí na čase a fundamentální matice nezávisí na dvou separátních okamžicích t_k, t_1, ale pouze na jejich rozdílu $t_k - t_1$. Z toho důvodu střed $k-$tého řádu nezávisí na okamžicích t_1 až t_k. ale pouze na rozdílech $\tau_1 = t_2 - t_1, \tau_2 = t_3 - t_1, ..., \tau_{k-1} = t_k - t_1$.

Rovnice (21) umožňují stanovit momenty vyššího řádu statistiky odezvy lineární soustavy podrobené buzení polynomem filtrovaného bílého šumu a současně momenty vzájemné statistiky vstupu a výstupu, aniž by bylo třeba provádět jakékoli další integrace. Jediným požadavkem je znalost fundamentální matice $\mathbf{\Phi}(t_j, t_1)$. Ta se stanoví z matice $\mathbf{R}$, která je funkcí zadaných matic "tuhosti" $\mathbf{C}, \mathbf{H}$, které se vyskytují v původní soustavě (1), (4).

Naznačme nyní, jak sestavit fundamentální matici problému (13) odpovídající matici $\mathbf{R}$ podle (14a). Matice $\mathbf{R}$ má speciální strukturu, která umožňuje fundamentální matici stanovit na základě matic $\mathbf{\Phi}_o, \mathbf{\Phi}_i$ $(i = 1, 2, ..., p)$, které odpovídají známým maticím $\mathbf{C}, \mathbf{H}_i$. Využijeme zároveň platnosti vztahu, viz Di Paola, Falsone (1997):

$$\mathbf{\Phi}_i(t_j, t_1) = \mathbf{\Phi}_1^{[i]}(t_j, t_1) \tag{22}$$

kde $\mathbf{\Phi}_1$ je fundamentální matice odpovídající matici $\mathbf{H}$. Fundamentální matici $\mathbf{\Phi}(t_j, t_1)$ odpovídající matici $\mathbf{R}$ můžeme nyní psát ve tvaru (pro stručnost jsou vynechávány argumenty t_j, t_1):

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_o & \mathbf{\Phi}_{o,p} & \mathbf{\Phi}_{o,p-1} & \mathbf{\Phi}_{o,p-2} & \cdots & \mathbf{\Phi}_{o,3} & \mathbf{\Phi}_{o,2} & \mathbf{\Phi}_{o,1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_p & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_{p,p-2} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_{p-1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_{p-2} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{\Phi}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_{3,1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

kde fundamentální matice $\mathbf{\Phi}_{o,i}, \mathbf{\Phi}_{i,i-2}$ jsou dány těmito vztahy:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_{o,i} &= \mathbf{N}_{o,i}\mathbf{\Phi}_i - \mathbf{\Phi}_o(\mathbf{N}_{o,i} - \mathbf{N}_{o,i+2}\mathbf{N}_{i+2,i}) - \mathbf{N}_{o,i+2}\mathbf{\Phi}_{i+2}\mathbf{N}_{i+2,i} \\ \mathbf{\Phi}_{i,i-2} &= \mathbf{N}_{i,i-2}\mathbf{\Phi}_{i-2} - \mathbf{\Phi}_i\mathbf{N}_{i,i-2} \end{aligned} \tag{24a, b}$$

Pokud je ve výrazech (24) některý z indexů větší než p, potom je odpovídající matice nulová. Matice $\mathbf{N}_{o,i}, \mathbf{N}_{i,i-2}$ se vyčíslí podle vzorců:

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{N}_{o,i}^T) &= -(\mathbf{C} \otimes \mathbf{I}_m^{[i]} - \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{H}_i)^{-1}\text{vec}(\mathbf{D}_i^T + \mathbf{N}_{i+2,i}^T\mathbf{D}_{i+2}^T) \\ \text{vec}(\mathbf{N}_{o,i}^T) &= -(\mathbf{H}_i \otimes \mathbf{I}_m^{[i-2]} - \mathbf{I}_m^{[i]} \otimes \mathbf{H}_{i-2})^{-1}\text{vec}(\overline{\mathbf{q}_i}^T) \end{aligned} \tag{25a, b}$$

kde operátor vec znamená transformaci matice vepsané do závorek na vektor, který obsahuje sloupce matice sepsané postupně pod sebou. Odvození vzorců (25) je založeno na vlastnostech vlastních čísel matice $\mathbf{R}$. Obecně jsou vzhledem k fyzikální povaze úlohy kladná, a tudíž úloha nedegeneruje v singulární případ. Situace s vícenásobnými vlastními čísly by však znamenala speciální přístup k řešení. Vzorce (25) a celá úloha by měly složitější strukturu, jak je v podobných případech obvyklé.

4. Soustava s jedním stupněm volnosti

Jako praktickou aplikaci teorie naznačené v minulé kapitole uveďme případ soustavy s jedním stupněm volnosti buzené kombinací gaussovského šumu a jeho druhé mocniny. Takovýto systém odpovídá nejjednoduššímu modelu, který popisuje kmitání konstrukce vlivem podélné fluktuační složky rychlosti větru. Přijmeme-li řadu zjednodušení ve vztahu mezi rychlostí proudu a výsledným čelným tlakem působícím na těleso, můžeme psát jednoduchý všeobecně známý vzorec:

$$p(\mathbf{x},t) = C(\mathbf{x}) \cdot v^2(\mathbf{x},t) \tag{26}$$

kde $C(\mathbf{x})$ je parametr závislý na prostorové souřadnici. Zahrnuje rozměry a geometrický tvar tělesa, hustotu proudícího media a další faktory. Vzorec (26) předpokládá, že těleso je "nekonečně malé" ve srovnání s okolním prostředím, neovlivňuje zpětně základní rychlost proudu a pohybuje se pouze ve směru proudu. V inženýrské praxi se však přesto často používá, zejména jedná-li se o štíhlé samostatně stojící konstrukce, kde detailní struktura rychlostního pole v okolí tělesa nemá rozhodující vliv na celkovou budící sílu. Vzhledem k tomu, že $\mathbf{x}$ znamená pouze polohu studovaného objektu v prostoru, můžeme nadále používat jednodušší označení $p(t), C, v(t)$.

Rychlost $v(t)$ se skládá z konstantní střední hodnoty a fluktuační části:

$$v(t) = v_s + v_d(t) \ ; \qquad v_s \ll |v_d(t)| \tag{27}$$

Složka $v_d(t)$ byla v minulosti předmětem velmi rozsáhlých experimentálních studií. V zásadě je možno ji chápat jako stacionární gaussovský náhodný proces o jisté spektrální hustotě, která je popsána ve známé publikaci (Davenport, 1967), po níž následovaly stovky dalších prací na toto téma. Dnes lze nalézt odkazy i v příslušných normách.

Předpokládejme, že dynamický systém buzený zatížením (1) lze modelovat lineární soustavou s jedním stupněm volnosti. Potom můžeme psát:

$$\ddot{u}(t) + 2\omega_b\dot{u}(t) + \omega_o^2 u(t) = C_a(v_s^2 + 2v_s v_d(t) + v_d^2(t)) \ ; \quad C_a = C/m \tag{28}$$

Vzhledem k tomu, že zkoumáme stacionární stav a rovnice (4) je lineární, můžeme vynechat první člen v závorce na pravé straně, neboť vede po odeznění přechodového děje na konstantní oddělitelnou statickou výchylku. V praxi se obvykle uvažuje pouze druhý člen, který je původcem dynamické odezvy soustavy. Kvadrát fluktuační složky rychlosti proudu se s poukazem na podmínku (3) zanedbává. V podmínkách hustější zástavby však toto zjednodušení často není oprávněné. Třetí (kvadratický) člen vyvolává vyšší harmonické složky odezvy, viz např. Náprstek (1975), Benfratello et al., (1996), což znamená vyšší dynamickou odezvu konstrukce zejména ve vyšších frekvencích spektra a změnu celkového obrazu odezvy.

I když spektrální hustota procesu $v_d(t)$ je složitější, můžeme ji pro účely kvalitatitvní studie přibližně nahradit spektrální hustotou platnou pro šum, který vznikne průchodem gaussovského bílého šumu filtrem druhého řádu. To znamená odezvou soustavy:

$$\ddot{v}_d(t) + 2\beta_d\dot{v}_d(t) + \beta_o^2 v_d(t) = \alpha w(t) \tag{29}$$

Tím se dostaneme k soustavě typu (1), (4):

$$\begin{array}{rcllll}
\dot{u}_1(t) & = & & +u_2(t) & & \\
\dot{u}_2(t) & = & -\omega_o^2 u_1(t) & -2\omega_b u_2(t) & +2C_a v_s v_1(t) & +C_a v_1^2(t) \\
\dot{v}_1(t) & = & & +v_2(t) & & \\
\dot{v}_2(t) & = & -\omega_f^2 v_1(t) & -2\omega_d v_2(t) & +\alpha w(t) & \\
\multicolumn{6}{l}{u_1(t) = u(t) \ ; \quad u_2(t) = \dot{u}(t) \ ; \quad v_1(t) = v_d(t) \ ; \quad v_2(t) = \dot{v}_d(t)}
\end{array} \tag{30}$$

Soustava (10), resp. (13) bude mít tvar ($p = 2$):

$$\begin{array}{rcllll} \dot{\mathbf{U}}(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{U}(t) & +\mathbf{D}_1\mathbf{V}_1(t) & +\mathbf{D}_2\mathbf{V}_2(t) & (a) \\ \dot{\mathbf{V}}_1(t) & = & & \mathbf{H}_1\mathbf{V}_1(t) & +\mathbf{q}w(t) & (b) \\ \dot{\mathbf{V}}_2(t) & = & & \mathbf{H}_2\mathbf{V}_2(t) & +\mathbf{q}_2\mathbf{V}_1(t)w(t) + \mathbf{q}^{[2]}s^2 & (c) \end{array} \qquad (31)$$

S přihlédnutím k (30) mají vektory $\mathbf{U}, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ ve smyslu (3), (5) tento význam:

$$\mathbf{U} = [u_1, u_2]^T \ ; \quad \mathbf{V}_1 = [v_1, v_2]^T \ ; \quad \mathbf{V}_2 = [v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22}]^T = [v_1^2, v_1v_2, v_2v_1, v_2^2]^T \qquad (32)$$

Matice $\mathbf{C}, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{H}_1, \mathbf{q}$ se odvodí velmi jednoduše porovnáním (30) a (31):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_o^2 & -2\omega_b \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2C_a v_s & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta_o^2 & -2\beta_b \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{q}^{[2]} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \qquad (33)$$

Na základě (11), (12) a s odvoláním na (8) se dá odvodit:

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 \otimes \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\beta_o^2 & -2\beta_d & 0 & 1 \\ -\beta_o^2 & 0 & -2\beta_d & 1 \\ 0 & -\beta_o^2 & -\beta_o^2 & -4\beta_d \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{q} \otimes \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \\ \alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{bmatrix} \qquad (34)$$

Soustava (31) obsahuje 8 rovnic/neznámých ($\nu = 2 + 2^1 + 2^2 = 8$). Ze struktury $V_2(t)$, viz (32), je zřejmé, že $v_{12} = v_{21}$. To vyplývá i ze základní definice $V_2(t) = V^{[2]}(t)$, které nevede na m^2, nýbrž pouze na $(m + 1)m/2$ nezávislých prvků, resp. neznámých. Výsledná soustava je tedy sedmého řádu. Rozepsáno ve skalárních veličinách:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \hline \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \hline \dot{v}_{11} \\ \dot{v}_{12} \\ \dot{v}_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_o^2 & -2\omega_b & 2C_a v_s & 0 & C_a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_o^2 & -2\beta_b & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha w(t) & 0 & -\beta_o^2 & -2\beta_d & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha w(t) & 0 & -2\beta_o^2 & -4\beta_d \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \hline v_1 \\ v_2 \\ \hline v_{11} \\ v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ \alpha w(t) \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \alpha^2 s^2 \end{bmatrix} \qquad (35)$$

Podobně by bylo třeba upravit i složitější soustavy. Soustava (25) je již Itoova typu. To znamená, že při následném sestavení FPK rovnice se koeficienty driftu berou v jednoduché formě bez korekčních členů. Také případné simulační řešení je možno zahájit ihned bez korekcí.

Povšimněme si některých vlastností soustavy (35). Je zřejmé, podobně jako z obecného případu (10), že základní část soustavy, to jest vektory $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ souvisejí se zbývající částí pouze jedním parametrem. Mimo něj by tvořila nezávislý uzavřený celek. Tato návaznost vnáší do soustavy vliv nelineárních členů na pravé straně soustavy (1), resp. (6). Poslední tři rovnice vnášejí do soustavy (25) parametrické náhodné buzení a konstantní člen na pravé straně. Potvrzuje se tak starší poznatek [10], že kvadratický člen v centrovaném náhodném buzení vede ke vzniku nenulové statické složky zatížení, která v podmínkách silné turbulence může znamenat významné zvýšení efektivní hodnoty statického zatížení. Parametrické buzení zavedené maticí $\mathbf{q}_2 \cdot w(t)$ ovlivňuje především výsledek samotné filtrace bílého šumu $w(t)$ a narušuje nejen původně gaussovský charakter buzení, ale i všech složek odezvy. Gaussova křivka dostává výraznou šikmost a její matematický střed se dále posunuje do kladných hodnot. Teoreticky by toto parametrické buzení mohlo být příčinou ztráty stochastické stability, avšak v reálných podmínkách tento jev patrně nenastane.

O platnosti závěrů naznačených v předchozím odstavci svědčí také struktura a praktické vyhodnocení rovnic pro matematický střed odezvy (17) a stochastické momenty (18). To se týká zejména zjevné nesymetrie výsledné hustoty pravděpodobnosti odezvy počínaje matematickým středem. Nenulové jsou viditelně také všechny liché momenty, které tuto nesymetrii vyvolávají. Pro zkoumanou soustavu druhého řádu mají sklon k záporným hodnotám, což vede k praktickému závěru převahy kladných výchylek nad zápornými vzhledem k matematickému středu. Naopak sudé momenty se soustřeďují spíše do kladných hodnot. To znamená zvýšení absolutních hodnot výchylek a nižší rychlost zániku jejich autokorelace. Respektovat kvadratický člen buzení v rovnici (18) vede celkově k silnější nesymetrické odezvě a je třeba tento člen respektovat. Jeho zanedbání není na bezpečné straně analýzy.

5. Závěr

Zavedení Kroneckerovy symboliky do řešení problému odezvy lineární soustavy polynomem šumu generovatelného lineárním filtrem na základě gaussovského bílého šumu umožnilo vytvořit kompaktní obecnou metodu sestavení náhradního lineárního systému. Tento proces lze tak zcela formalizovat, popř. automatizovat. Základní vlastnosti výsledků odpovídají dřívějším zkušenostem a poznatkům. Ilustrativní příklad SDOF soustavy s aditivním lineárním a kvadratickým náhodným buzením ukazuje použitelnost metodiky v praktickém případě. I když rozsah náhradní lineární soustavy může být značný oproti soustavě původní, převod problému na studium vlastností lineární soustavy, i když s parametrickým buzením, dává možnost využívat známé metody pro řešení lineárních rovnic, snadné sestavení FPK rovnice, posouzení stochastické stability a její úrovně, jakož i odhadu konvergence stochastických momentů.

Dá se předpokládat, že zavedený aparát bude možné efektivně použít i při analýze a řešení odezvy některých typů nelineárních stochastických rovnic. Problém prudkého vzrůstu počtu rovnic v náhradní lineární soustavě však zůstává. Nicméně výhody, které plynou z linearizace problému bez jakéhokoli zjednodušení původní úlohy, jsou převažující.

Z hlediska fyzikálních aplikací je třeba zdůraznit, že respektování kvadratických, popř. vyšších členů buzení může vést k citelnému zvýšení efektivní odezvy soustavy a nutnosti přehodnotit styl vyhodnocení účinků náhodného zatížení vzhledem k nesymetrii odezvy a ztrátě jejího gaussovského charakteru.

6. Poděkování

Autor děkuje Grantové agentůře ČR (grant č. 103/02/0020) a výzkumnému záměru ÚTAM AV0Z 2071913, za jejichž podpory vznikla tato práce. Text byl pořízen procesorem LaTeX.

7. Literatura

Benfratello, S., Falsone, G., Muscolino, G. (1996) Influence of the quadratic term in the alongwind stochastic response of SDOF structures. *Engineering Structures*, 18, pp.685-695.

Bolotin, V.V. (1979) *Random vibrations of elastic systems* (in Russian). Nauka, Moscow.

Davenport, A.G. (1967) Gust loading factor. In: *Jour. Struct. Div. ASCE*, 93, pp.11-34.

Di Paola, M. (1988) Moments of non-linear systems. In: *Proc. 5th ASCE Conference on Probabilistic Methods in Civil engineering*. Virginia Tech, Blacksburg, pp.285-288.

Di Paola, M., Falsone, G. (1997) Multiple times response statistics of MDOF linear systems excited by linearly parametric white noises and external excitations. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 12, pp.179-188.

Graham, A. (1981) *Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications*. Ellis Horwood, Chichester.

Grigoriu, M., Ariaratnam, S.T. (1988) Response of linear systems to polynomials of Gaussian processes. *Jour. Applied Mechanics ASME*, 55, pp.905-910.

Itô, K., McKean, H.P. (1965) *Diffusion Processes and Their Sample Paths*. Academic Press, New York.

Muscolino, G. (1995) Linear systems excited by polynomial forms of non-Gaussian filtered processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 10, pp.35-44.

Náprstek, J. (1975) On non-linear transfer between random variable velocity of fluid motion and frontal pressure on the bypassed cylindrical body. *Acta Technica ČSAV*, 4, pp.479-494.

Náprstek, J. (1996) Stochastic exponential and asymptotic stability of simple non-linear systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol.31, 5, pp. 693-705.

Náprstek, J. (2003) Real and Markov processes in stochastic systems. In: *Proc. Dynamics of Machines 2003* (I. Dobiáš edt.). IT ASCR, Prague, pp.127-134.

Pugachev, V.S., Sinitsyn, I.N. (1987) *Stochastic Differential Systems — Analysis and Filtering*, J.Wiley, Chichester.

Wong, E., Zakai, M. (1965) On the relation between ordinary and stochastic equations. *International Journal of Engineering Sciences*, vol.3, 2, pp. 213-229.