

SHOCK WAVE IN TWO-PHASE FLUID

Jiří Maxa, Vladimír Horák*

Summary: *There are formulated the fundamental laws of fluid mechanics for the one-dimensional unsteady state flow of two-phase fluid. The solution of the shock wave in two-phase fluid respects these fundamental laws of fluid mechanics and used computational method results from the course of Rayleigh and Fanno curves. The two-phase fluid speed of sound is solved with help of numerical derivation of pressure dependence on fluid density at constant entropy.*

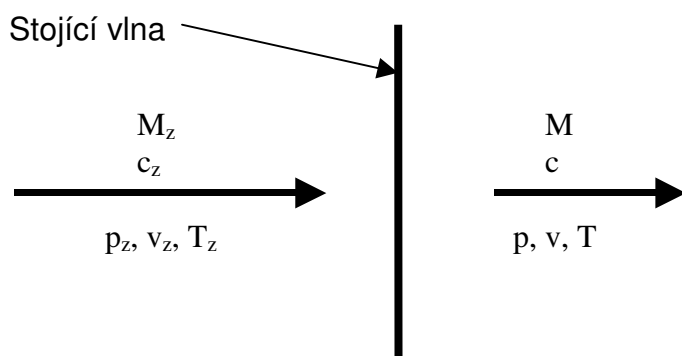
Calculated state quantities of flow behind the shock wave in wet steam depend on the ratio of both phases, its dryness ratio (quality).

Results of the shock wave solution are presented for the passage of the supersonic flow into subsonic flow in the mixing chamber.

1. Úvod

V technické praxi se setkáváme s celou řadou časově ustálených i časově neustálených případů proudění tekutin s rázovými vlnami.

Případy časově neustáleného proudění tekutiny s rázovými vlnami můžeme na základě principu absolutnosti a relativnosti proudění – pomocí vhodně volené unášivé rychlosti – převést na časově ustálené proudění tekutiny se stojící tlakovou vlnou.



Obr. 1. Schéma nespojitého případu proudění

Tento model tvoří základní přístup pro řešení nespojitého proudění s nepohybující se tlakovou vlnou (viz obr. 1). Určovací veličiny stavu proudu před stojící vlnou jsou dány: rychlostí c_z , tlakem p_z , měrným objemem v_z , teplotou T_z a Machovým číslem M_z větším než jedna. Určovací veličiny stavu proudu za stojící vlnou jsou: rychlost c , tlak p , měrný objem v , teplota T a Machovo číslo M menší než jedna.

* Doc. Ing. Jiří Maxa, CSc., doc. Ing. Vladimír Horák, CSc.: Katedra letadel a motorů, Fakulta vojenských technologií, Vojenská akademie v Brně, Kounicova 65, 612 00 Brno; tel.: +420.973.442749; E-Mail: jiri.maxa@vabo.cz, vladimir.horak@vabo.cz

2. Formulace základních zákonů

Řešení časově neustáleného proudění tekutiny s rázovými vlnami vychází ze základních zákonitostí daných: rovnicí stavu tekutiny, zákonem zachování hmotnosti, zákonem zachování pohybu a zákonem zachování energie.

Uvedenou soustavu čtyř základních rovnic doplňuje druhý zákon termodynamiky umožňující podrobnější rozbor probíhajících stavových změn [1].

2.1 Rovnice stavu

Pro popis stavového chování dvoufázové tekutiny se obvykle v technické praxi obvykle užívá grafická či tabelární forma [4]. Rovnice stavu reprezentující vzájemnou závislost určovacích veličin stavu tekutiny – tj. tlaku p , měrného objemu v a teploty T – má zobecněný tvar

$$F(p, v, T) = 0 \quad (1)$$

Stavového chování dále determinuje i potřebné termodynamické funkce tekutiny: měrnou vnitřní energii u , měrnou entalpii i , měrnou entropii s .

Vzájemná přeměna fází v mokré páře při daném tlaku p a teplotě T probíhá jako izobaricko-izotermický děj

$$p = \text{konst.} \quad a \quad T = \text{konst.}, \quad (2)$$

kdy se mění vzájemný poměr kapalně a plynné fáze vyjádřený suchostí x mokré páry.

Měrný objem mokré páry v lze určit na základě součtu objemů kapalně a plynné fáze prostřednictvím suchosti x vztahem

$$v = v' + x(v'' - v'), \quad (3)$$

kde měrné objemy syté kapaliny v' a syté páry v'' představují hodnoty na mezních křivkách, definovaných suchostmi $x' = 0$ a $x'' = 1$.

Měrné objemy v' a v'' na mezních křivkách lze vyjádřit polynomičtým analytickým vztahem v závislosti na tlaku p v obecném tvaru

$$v' = f'(p) \quad a \quad v'' = f''(p). \quad (4)$$

Závislost teploty T na tlaku nasycených par p vyjadřuje obecný vztah

$$T = f(p). \quad (5)$$

Hodnoty termodynamických funkcí mokré páry – měrné vnitřní energie u , měrné entalpie i a měrné entropie s – se určují prostřednictvím suchosti x na základě aditivnosti termodynamických veličin analogicky jako u měrného objemu v , viz vztah (3).

Rychlost zvuku a v mokré páře je určována na základě přímého využití definičního vztahu

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = -v^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \quad (6)$$

který udává rychlost šíření slabých (infinitesimálních) tlakových rozruchů do klidného prostředí.

2.2 Zákon zachování hmotnosti

Zákon zachování hmotnosti pro jednorozměrové časově ustálené proudění tekutin s tlakovými vlnami je dán rovnicí spojitostí ve tvaru

$$q_m = \frac{Q_m}{A} = \frac{c}{v} = konst. \quad (7)$$

kde hustota proudu tekutiny q_m – daná podílem rychlosti proudu tekutiny c a měrného objemu tekutiny v – zůstává konstantní.

2.3 Zákon zachování pohybu

Aplikace věty o změně hybnosti, když výsledná vnější síla je povrchová tlaková síla, pro uvažovaný typ proudění vede ke vztahu

$$i_p = \frac{I_p}{A} = \frac{c^2}{v} + p = konst. \quad (8)$$

kde měrný impuls proudu i_p – daný součtem hybnostního toku tekutiny c^2/v a tlakové síly p , vztažené na jednotkovou průtočnou plochu – zůstává konstantní.

2.4 Zákon zachování energie

Aplikace prvního zákona termodynamiky – s uvážením zákona zachování pohybu v energetickém vyjádření – vede k rovnici

$$e = \frac{c^2}{2} + i = konst. \quad (9)$$

kde celková měrná energie tekutiny e je dána součtem měrné kinetické energie $c^2/2$ a měrné entalpie i . Tento součet zůstává konstantní pokud se tekutině z vnějšku nepřivádí žádná tepelná a ani mechanická energie.

2.5 Druhý zákon termomechaniky

Druhý zákon termodynamiky doplňuje výše uvedený komplex základních zákonitostí mechaniky tekutin a slouží k posouzení míry nevratnosti probíhajících stavových změn tekutiny. Pro uvažované řešení platí

$$ds = \frac{dq}{T} \geq 0 \quad (10)$$

že měrná entropie tekutiny se při řešených tlakových vlnách nemění nebo roste.

3. Rázová vlna v mokré páře

Pro ideální plyn existuje obecné analytické řešení výše uvedených rovnic, např. []. U reálných plynů a par však není možné formulovat obecné analytické řešení vzhledem ke složitosti vyjádření jejich stavového chování a termodynamických vlastností.

Základní zákonitosti doplněné o druhý zákon termodynamiky popisují základní případ proudění tekutiny se stojící rázovou vlnou, na které se nespojitě mění určovací veličiny stavu proudu tekutiny. Řešení rázové vlny plyne z algebraického řešení tří základních zákonů a rovnice stavu popisující chování dvoufázové tekutiny. Tyto se aplikují jednak pro základní proud dvoufázové tekutiny před stojící rázovou vlnou, jednak pro proud mokré páry za touto vlnou.

3.1 Základní rovnice pro řešení

Rovnice stavu v oblasti mokré páry, upravená do bezrozměrového tvaru, je popsána rovnicemi

$$\frac{p}{p_z} = konst., \quad \frac{T}{T_z} = konst., \quad \frac{v}{v_z} = \frac{v'}{v_z} \left[1 + x \left(\frac{v''}{v'} - 1 \right) \right]. \quad (11)$$

Bezrozměrové vyjádření měrné entalpie a měrné entropie dvoufázové tekutiny je ve tvaru

$$\frac{i}{i_z} = \frac{i'}{i_z} \left[1 + x \left(\frac{i''}{i'} - 1 \right) \right] \quad \text{a} \quad \frac{s}{s_z} = \frac{s'}{s_z} \left[1 + x \left(\frac{s''}{s'} - 1 \right) \right]. \quad (12)$$

Pro **zákon zachování hmotnosti** pak platí bezrozměrový vztah

$$\frac{v}{v_z} = \frac{c}{c_z}. \quad (13)$$

Zákon zachování pohybu, s uvážením rovnice (13), nabývá bezrozměrový tvar

$$\frac{p}{p_z} = 1 + \frac{c_z^2}{p_z v_z} \left[1 - \left(\frac{c}{c_z} \right) \right]. \quad (14)$$

Bezrozměrové vyjádření **zákona zachování energie** má po jednoduché úpravě tvar

$$\frac{i}{i_z} = 1 + \frac{c_z^2}{2i_z} \left[1 - \left(\frac{c}{c_z} \right)^2 \right] \quad (15)$$

Pro silné tlakové vlny (rázové vlny) v tekutinách platí, že rychlost proudění c_z v základním proudu před stojící rázovou vlnou je větší než rychlost zvuku a_z v tomto proudu. Platí tedy, že

$$c_z \geq a_z, \quad (16)$$

a pro Machovo číslo M_z tohoto základního proudu pak platí relace

$$M_z = \frac{c_z}{a_z} \geq 1. \quad (17)$$

Z *druhého zákona termodynamiky* pak pro silné tlakové vlny vyplývá nerovnost

$$s - s_z \geq 0, \quad (18)$$

tj. měrná entropie tekutiny za rázovou vlnou roste.

3.2 Určení rychlosti zvuku

Při určování rychlosti zvuku a v mokré páře se vychází z definičního vztahu (6), který je pro numerické řešení upraven do diferenčního tvaru

$$a^2 = -v^2 \left(\frac{p_h - p_d}{v_h - v_d} \right)_s. \quad (19)$$

Rozdíl tlaků $\Delta p = p - p_d = p_h - p$ se vhodně volí mezi horní p_h a dolní hodnotou p_d tlaku.

Suchost mokré páry x_h je pro horní hodnotu tlaku p_h dána při stejné entropii vztahem

$$x_h = \frac{s - s'_h}{s''_h - s'_h}. \quad (20)$$

Měrný objem tekutiny v_h se pro horní hodnotu tlaku p_h a suchost x_h určí ze vztahu

$$v_h = v'_h + x_h(v''_h - v'_h), \quad (21)$$

kde hodnoty měrných objemů v'_h a v''_h na mezních křivkách jsou funkcí tlaku p_h .

Analogicky se pak určí měrný objem v_d odpovídající dolní hodnotě tlaku p_d a dané suchosti x_d .

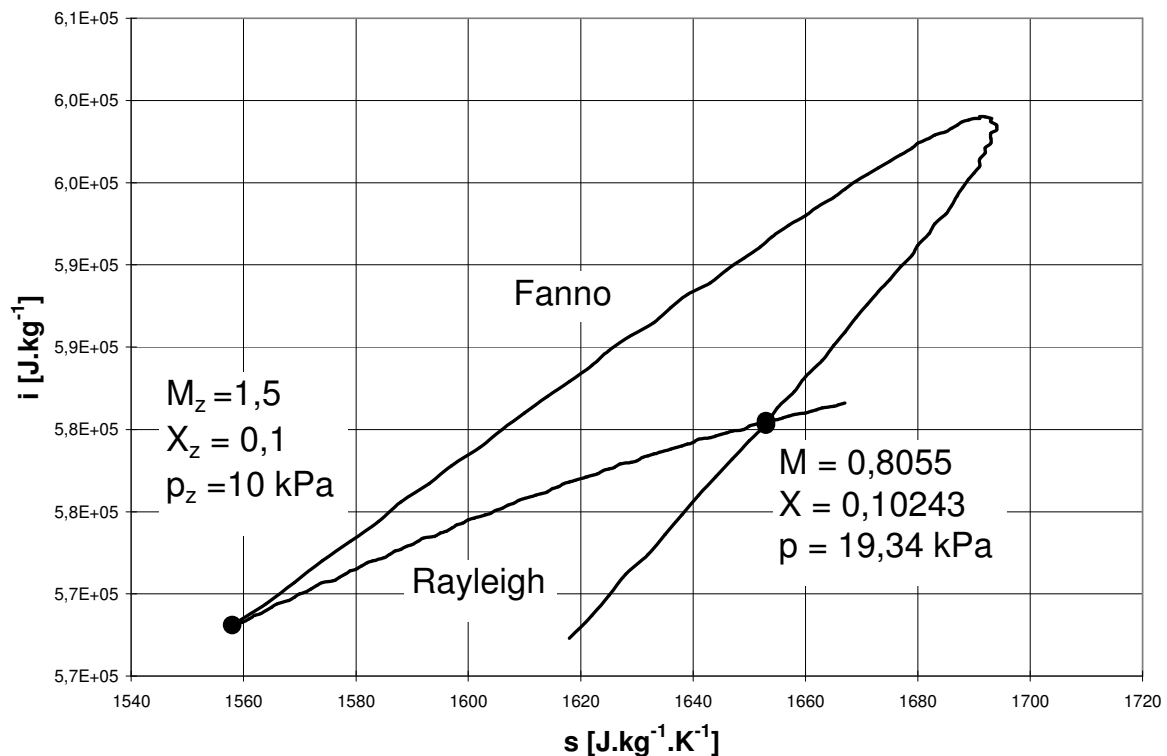
3.3 Rayleighova a Fannova a křivka

Výpočet určovacích veličin stavu proudu c , p , v , a i za rázovou vlnou vyplývá z řešení soustavy čtyř základních rovnic, tj. stavové rovnice a tří zákonů „zachování“: hmotnosti, pohybu a energie. Pro řešení byl zvolen iterační způsob za pomoci graficko-početního stanovení Fannovy a Rayleighovy křivky [5], které vyjadřují dvě různé závislosti měrné entalpie i na měrné entropii s proudící tekutiny.

Rayleighova křivka představuje grafické znázornění řešení problému za použití tří rovnic: stavové rovnice, zákona zachování hmotnosti a zákona zachování pohybu. Při výpočtu se volí rychlost $c \leq c_z$ a určí se tlak p ze zákona zachování pohybu (14) a měrný objem v ze zákona zachování hmotnosti (13). Z rovnice stavu (11) se, při znalosti měrného objemu v a tlaku p , určí suchost tekutiny x . Znalost suchosti x a tlaku p umožní dále určit měrnou entalpii i a měrnou entropii s (12).

Fannova křivka je dána řešením rovnice stavu, zákona zachování hmotnosti a zákona zachování energie. Ze zvolené rychlosti c se určí ze zákona zachování hmotnosti (13) měrný objem v a ze zákona zachování energie (15) měrná entalpie i jako funkce tlaku p a měrného objemu v . Měrný objem v a měrná entalpie i mohou být též určeny ze stavové rovnice (11) a (12) jako funkce tlaku p a suchosti x . Vyloučením suchosti x z výše uvedených rovnic (11) a (12) obdržíme závislost měrné entalpie i na tlaku p a měrném objemu v .

Tato popsané způsoby určení entalpie i v závislosti na tlaku p a měrném objemu v poskytují výsledné řešení úlohy při splnění jejich vzájemné rovnosti. Vhodnou iterací lze obdržet odpovídající hodnotu tlaku p a měrného objemu v . Z rovnice stavu (11) se pak určí suchost tekutiny x . Měrná entropie s je dále určena ze stavové rovnice (12) jako funkce tlaku p a suchosti x . Pro úplnost řešení pak lze k vypočteným určovacím veličinám stavu proudu za kolmou rázovou vlnou určit dále teplotu tekutiny T ze vztahu (5), rychlost zvuku a z diferenční rovnice (19) a z definičního vztahu (17) Machovo číslo M .



Obr. 2. Rayleighova a Fannova křivka

Průběhy Rayleighovy a Fannovy křivky jsou uvedeny na obr. 2. Řešení určovacích veličin stavu proudu za kolmou rázovou vlnou je dáno v průsečíku obou křivek, kde jsou splněny podmínky pro platnost všech čtyř základních zákonitostí mechaniky tekutin.

3.4 Graf bezrozměrových závislostí

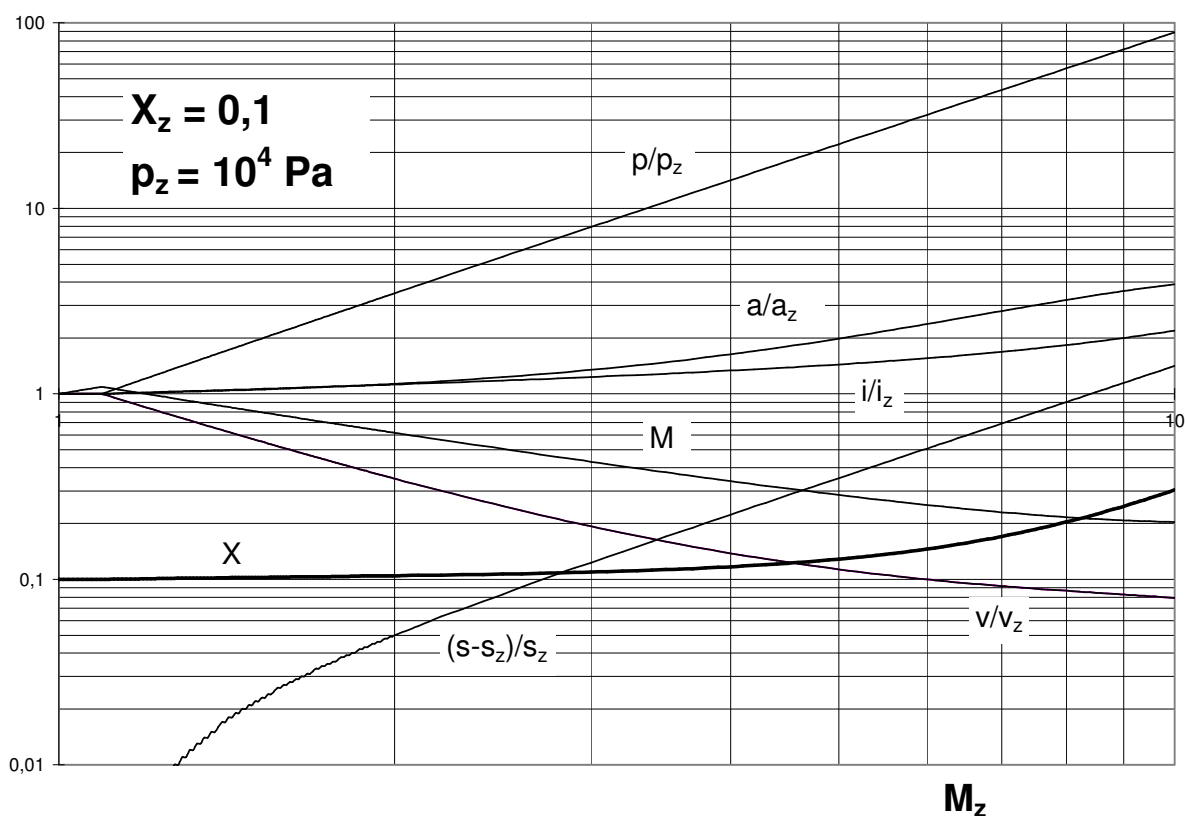
Při výpočtu bezrozměrových závislostí volíme Machovo číslo M_z , tlak p_z a suchost x_z základního proudu páry před rázovou vlnou. Z rovnice stavu (3) určíme měrný objem v_z jako funkce tlaku p_z a suchosti x_z . Analogicky se určí měrná entalpie i_z a měrná entropie s_z . Postupem uvedeným v části 3.2 se určí rychlost zvuku a_z a z definičního vztahu (17) pro Machovo číslo M_z pak rychlost proudění c_z .

Ze zákona zachování pohybu (14) určíme poměr rychlostí c/c_z , který je roven, dle zákona zachování hmotnosti (13), poměru měrných objemů v/v_z . Tento poměr měrných objemů v/v_z je funkcí tlaku poměru tlaků p/p_z .

Ze zákona zachování energie (15) určíme poměr měrných entalpií i/i_z jako funkci poměru rychlostí c/c_z , respektive poměru měrných objemů v/v_z . Poměr měrných entalpií i/i_z může být též určen ze stavové rovnice (12) jakožto funkce suchosti x . Tuto suchost x můžeme vyjádřit jako funkci v/v_z z rovnice (11). Úpravou obdržíme kvadratickou rovnici pro řešení poměru měrných objemů v/v_z v závislosti na poměru tlaků p/p_z a na veličinách v' , v'' , p' a p'' na mezních křivkách, které jsou funkcí tlaku p . Kladný kořen poměru je pak funkcí poměru tlaků p/p_z .

Poměr tlaků p/p_z pak určíme iteračním způsobem [2] pro podmínku, že rozdíl měrných objemů v/v_z určených jednak ze zákona zachování pohybu (14), jednak ze zákona zachování energie (15) je nulový. Iteraci provedeme metodou půlení intervalů pro vhodně volený interval poměru tlaků p/p_z .

Po stanovení poměru p/p_z určíme další poměry c/c_z , v/v_z a i/i_z z rovnic (14), (13) a (15). Suchost x je pak vypočítána z rovnice (11) a poměr s/s_z z rovnice (12). Postupem uvedeným v části 3.2 se určí rychlost zvuku a , respektive poměr a/a_z a z definičního vztahu (17) Machovo číslo M . Průběhy bezrozměrových křivek na Machově čísle M_z pro dané x_z a p_z , jsou uvedeny na obr. 3.



Obr. 3. Graf bezrozměrových závislostí

4. Příklad aplikace

Pro prezentaci výsledků řešení rázové vlny v mokré vodní páře byl zvolen následující příklad:

V potrubí, po smíšení vody a přehřáté páry, proudí mokrá vodní pára rychlostí $c_z = 190,8 \text{ m.s}^{-1}$ o tlaku $p_z = 10\,000 \text{ Pa}$ a suchosti $x_z = 0,1$. Tento nadzvukový proud přechází v kolmé rázové vlně do proudu podzvukového. Další parametry základního proudu jsou: měrný objem $v_z = 1,693 \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$, teplota $T_z = 328,815 \text{ K}$, měrná entalpie $i_z = 568\,100 \text{ J.kg}^{-1}$ a měrná entropie $s_z = 1\,558 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Rychlost zvuku $a = 134,0 \text{ m.s}^{-1}$ základního proudu před rázovou vlnou byla určena pro zvolený tlakový rozdíl $\Delta p = 10 \text{ Pa}$. Machovo číslo základního proudu je $M = 1,5$.

Iterační řešení poskytuje parametry proudu za rázovou vlnou: rychlost $c = 107,9 \text{ m.s}^{-1}$, tlak $p = 19\,340 \text{ Pa}$, měrný objem $v = 0,9577 \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$, měrnou entalpii $i = 580\,500 \text{ J.kg}^{-1}$, měrnou entropii $s = 1\,653 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, teplotu $T = 338,858 \text{ K}$, a suchost $x = 0,1024$.

Rychlost zvuku, určená pro tlakový rozdíl $\Delta p = 10 \text{ Pa}$, je $a = 134,0 \text{ m.s}^{-1}$ a odpovídající Machovo číslo je $M = 0,8055$.

5. Závěr

V příspěvku jsou formulovány základní zákony mechaniky tekutin pro jednorozměrové časově ustálené nespojitě proudění tekutiny. Je formulováno stavové chování mokré páry jako polynomická náhrada stavových veličin na mezních křivkách pro vodu a vodní páru.

Řešení silné tlakové (rázové) vlny vyplývá z řešení tří zákonů zachování: hmotnosti, pohybu a energie, doplněné rovnicí stavu. Výpočet je proveden iteračním řešením za použití Rayleighovy a Fannovy křivky. Rychlost zvuku v mokré páře je určena pomocí numerické derivace. Prezentovaný příklad výpočtu rázové vlny je aplikován na přechod nadzvukového proudu mokré páry v proud podzvukový ve směšovací komoře.

Výpočet rázové vlny v mokré páře vykazuje určité problémy pro Machova čísla blízká se jedné a pro suchosti páry blízká se nule, kdy selhává numerická iterace a řešení v těchto oblastech proudění bude zasluhovat hlubší rozbor.

Uvedené řešení bylo popsáno pro oblast dvoufázové tekutiny, tedy pro suchost x v intervalu nula až jedna. Nemá tedy řešen přechod mokré páry v páru přehřátou.

6. Literatura

- [1] KŘÍŽ, R. - VÁVRA, P. a kol.: Strojírenská příručka. Sv. 4, odd. L. SCIENTIA a SNTL, Praha 1994.
- [2] PŘIKRYL, P.: Numerické metody matematické analýzy. SNTL, Praha 1985.
- [3] DEJČ, M. E.: Technická dynamika plynů. SNTL, Praha 1967.
- [4] ŠUBART, F.: Základy technické termodynamiky. VA, Brno 1963.
- [5] SHAPIRO A.H.: The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow. The Ronald Press Company, New York 1953.