

FATIGUE STRENGTH CRITERION FIT FOR PROPORTIONAL LOADED MATERIAL

J. Fuxa, R. Kubala, K. Frydryšek, F. Fojtík, M. Fusek, R. Halama, R. Rojíček*

Summary: Using a critical analyze method it was found Basquin's and Manson-Coffin's approaches are not good enough as a ground of the multiaxial fatigue criterion. Searching the mean stress effect on the limit stress/strain fatigue strength it was found the Morrow's equation is in a quite good harmony with some experiments, but Gerber's, Goodman's and SWT approaches do not give tight results. Sine's multiaxial criterions as well as Fuch's criterion are not in harmony with some experimental data. A new approximation of the S – N curve was proposed and verified on four dissimilar steel grades. True tensile strength and the endurance limit are taken into account. The endurance limit stress strength condition is also proposed as a function of the mean stress effect.

1. Úvod

Připomeňme stručně approximace, které jsou dosud často užívány k popisu chování kovových materiálů při únavovém namáhání:

BASQUINOVA APROXIMACE

popisuje závislost mezní amplitudy napětí σ_a na počtu cyklů N_f do lomu. Aproximuje Wöhlerovu křivku v oblasti vysokocyklové únavy. Z důvodu programování zkušebních únavových strojů se často užívá tzv. počet půlcyklů ($2N_f$) do lomu (reversals to failure):

$$\sigma_a = \sigma_f' \cdot (2N_f)^b, \quad (1)$$

σ_f' je únavová pevnost, b je exponent únavové pevnosti. Věří se, že tato empirická závislost platí od přibližně 1000 cyklů výše, σ_f' má hodnotu blízkou σ_f (skutečná hodnota statické pevnosti v tahu), b je v rozmezí od -0.05 do -0.12 .

MANSON & COFFINOVA APROXIMACE

popisuje závislost mezní amplitudy plastické deformace ϵ_p na počtu cyklů N_f do lomu. Vyjádřená v půlcyklech do lomu má tvar:

$$\epsilon_p = \epsilon_f' \cdot (2N_f)^c, \quad (2)$$

*Prof. Ing. Jan Fuxa, CSc., Ing. Rostislav Kubala, CSc., Ing. Karel Frydryšek, Ph.D., Ing. František Fojtík, Ing. Martin Fusek, Ing. Radim Halama, Ing. Jaroslav Rojíček: Katedra pružnosti a pevnosti, SF VŠB-TU Ostrava; 17. listopadu 15; 708 33 Ostrava - Poruba; tel.: +420.596 994 412, fax:-; e-mail: jan.fuxa@vsb.cz

ε_f' je únavová tažnost, c je exponent únavové tažnosti. Vztah je využíván v celém rozsahu cyklů, ε_f' má často hodnotu blízkou ε_f (skutečná hodnota mezní deformace v tahu), c je v rozmezí od -0.5 do -0.7 .

KONSTITUČNÍ ROVNICE

v oblasti stabilizované hysterezní smyčky popisuje závislost amplitudy napětí σ_a na amplitudě plastické deformace ε_P :

$$\sigma_a = K' \cdot (\varepsilon_P)^n, \quad (3)$$

K' je koeficient cyklické pevnosti, n' je exponent cyklické pevnosti.

Platí-li Basquinova a Manson & Coffinova approximace, pak platí také: $K' = \sigma_f' / (\varepsilon_f')^n$, $n' = b/c$.

VLIV STŘEDNÍHO NAPĚТИ

Střední napětí σ_m se při jednoosém napěťovém stavu počítá z horního σ_h a spodního σ_d napětí. Při neměnných hodnotách σ_h a σ_d je střední napětí konstantní: $\sigma_m = (\sigma_h + \sigma_d) / 2$ a amplituda napětí $\sigma_a = (\sigma_h - \sigma_d) / 2$. Při shodném počtu cyklů do porušení je při tahovém středním napětí nižší amplituda napětí než při tlakovém středním napětí. Tento poznatek je kvantifikován vztahy:

$$\sigma_a / \sigma_C + (\sigma_m / \sigma_{Pt})^2 = 1 \dots \text{Gerber} \quad (4)$$

$$\sigma_a / \sigma_C + \sigma_m / \sigma_{Pt} = 1 \dots \text{Goodman} \quad (5)$$

$$\sigma_a / \sigma_C + \sigma_m / \sigma_{Kt} = 1 \dots \text{Soderberg} \quad (6)$$

$$\sigma_a / \sigma_C + \sigma_m / \sigma_f = 1 \dots \text{Morrow} \quad (7)$$

$$\Delta\varepsilon / 2 = (\sigma_f' - \sigma_m) / E \cdot (2N_f)^b + \varepsilon_f' \cdot (2N_f)^c \dots \text{Morrow (1968)} \quad (8)$$

$$\Delta\varepsilon / 2 = (\sigma_f' - \sigma_m) / E \cdot (2N_f)^b + \varepsilon_f' \cdot ((\sigma_f' - \sigma_m) / \sigma_f')^{(c/b)} \cdot (2N_f)^c, \dots \text{Manson \& Halford} \quad (9)$$

$$(\sigma_a + \sigma_m) \cdot \Delta\varepsilon / 2 = (\sigma_f')^2 / E \cdot (2N_f)^{2b} + \sigma_f' \cdot \varepsilon_f' \cdot (2N_f)^{(b+c)}, \dots \text{Smith \& Watson \& Topper (SWT)} \quad (10)$$

$$(\sigma_a + \sigma_m) \cdot \sigma_a = (\sigma_C)^2 \dots \text{modifikovaný SWT}, \quad (11)$$

σ_{Kt} je mez kluzu, σ_{Pt} je smluvní mez pevnosti, σ_f je skutečná hodnota statické pevnosti v tahu, σ_C je mez únavy, E je Yongův modul pružnosti, $\Delta\varepsilon$ je celkový rozkmit deformace.

2. Posouzení věrohodnosti

uvedených fenomenologických vztahů je věnována následující analýza. Jsou využity výsledky experimentů, získané na odlišných typech materiálu. Basquinova, Manson & Coffinova approximace a mocninný tvar konstituční rovnice jsou hodnoceny z výsledků měření na čtyřech odlišných ocelích – viz Tab. I - označených zde jako materiál A - Fugger, T. Jr. (1985), materiál B, C - Socie, D.F., Dowling, N.E., Kurath, P. (1984), materiál D - Landgraf, R. W. (1968). Vliv středního napětí je posuzován na materiuu označeném AM - Forrest, P.G. (1968) a dalších čtyřech ocelích označených jako materiál Ax, Bx, Cx a Dx - Moore, H.F., Jasper, T.M. (1923). Literatura žel neobsahuje dostatek údajů, které udávají hodnověrně jak statické, tak i únavové parametry materiálu.

Tab.1 – Základní údaje materiálů A, B, C, D
 $(1 \text{ [ksi]} = 6,895 \text{ [MPa]})$

Užity k verifikaci Basquinovy, Manson&Coffinovy a Fuxovy approximace						
	Statické hodnoty	Kontrakce				
označení	σ_{Kt} [ksi]	σ_{Pt} [ksi]	RA%	σ_f [ksi]	ε_f	E [ksi]
A	38,0	57	55,0000	108,0	0,810	E=30000
B	94,0	114	68,0000	225,0	1,140	E=30000
C	185,0	195	59,0000	270,0	0,890	E=30000
D	230,0	255	42,0000	320,0	0,540	E=30000

únava - mat. B							
únava - mat. A			únava - mat. B				
	ε	σ_a	$2 N_f$	ε	σ_a	$2 N_f$	
1	0,8100	108,0	0,5	1	1,1400	225,0	0,5
2	0,0100	49,5	2174	2	0,02640	103,5	250
3	0,0080	48,5	2246	3	0,01530	91,5	824
4	0,0070	42,8	3034	4	0,00885	77,5	4128
5	0,0040	39,0	15880	5	0,00540	69,5	11900
6	0,0030	33,9	27460	6	0,00274	61,0	72000
7	0,0020	29,5	106700	7	0,00253	63,5	972000
8	0,0018	27,6	171700	8	0,00204	62,5	456000
9	0,0014	26,2	426200	9	0,00187	56,5	636000
10	0,0012	25,3	536500	10	0,00187	56,5	818000
				11	0,00194	59,5	1914000

únava - mat. C			únava - mat. D				
	ε	σ_a	$2 N_f$	ε	σ_a		
1	0,8900	270,0	0,5	1	0,5400	320,0	0,5
2	0,0160	148,0	240	2	0,0135	190,0	178
3	0,0100	135,0	722	3	0,0125	184,0	258
4	0,0090	128,0	1020	4	0,0110	185,0	266
5	0,0084	125,0	1250	5	0,0100	185,0	488
6	0,0080	125,0	1350	6	0,0083	184,0	584
7	0,0072	122,0	1760	7	0,0075	166,0	956
8	0,0060	120,0	3000	8	0,0058	152,0	2350
9	0,0052	115,0	6000	9	0,0050	146,0	6880
10	0,0042	112,0	15000	10	0,0040	120,0	63400
11	0,0033	100,0	82000	11	0,0033	100,0	785000

Komentář k Tab.1 a Tab. 2:

RA ... kontrakce, ε_p ... amplituda plastické deformace (dopočtená ze změrených údajů), $\varepsilon_{p M\&C}$... amplituda plastické deformace podle rovnice (2), CH_{MC} ... chyba M&C approximace ($CH_{MC} = \text{sum}(\text{abs}(\varepsilon_{pi} - \varepsilon_{p M\&C i}) / \varepsilon_{pi} * 100\%)$), $\sigma_{a B}$... Basquinova approximace podle rovnice (1), CH_B ... chyba Basquinovy approximace ($CH_B = \text{sum}(\text{abs}(\sigma_{ai} - \sigma_{a Bi}) / \sigma_{ai} * 100\%)$), $\sigma_{a F}$... Fuxova approximace podle rovnice (12), CH_F ... chyba Fuxovy approximace ($CH_F = \text{sum}(\text{abs}(\sigma_{ai} - \sigma_{a Fi}) / \sigma_{ai} * 100\%)$).
 Sloupce končí zvýrazněnou hodnotou střední chyby dané approximace.

Tab. 2 - Vyhodnocení Basquinovy, M&C a Fuxovy aproximace
mat. A

měření	ε (total)	σ_a [ksi]	2 Nf	ε_p	$\varepsilon_{p\text{ M\&C}}$	CH MC [%]	σ_{aB} [ksi]	CH B [%]	σ_{aF} [ksi]	CH F [%]
1	0,8100	108,0	0,5	0,80640	0,72694	9,85	127,0	17,6	108,0	0,00
2	0,0100	49,5	2174	0,00835	0,00787	5,72	47,4	4,2	48,7	1,65
3	0,0080	48,5	2246	0,00638	0,00773	21,17	47,3	2,6	48,5	0,08
4	0,0070	42,8	3034	0,00557	0,00658	17,97	45,6	6,6	46,4	8,50
5	0,0040	39,0	15880	0,00270	0,00269	0,41	37,5	3,7	36,7	5,86
6	0,0030	33,9	27460	0,00187	0,00200	6,97	35,2	3,8	34,1	0,53
7	0,0020	29,5	106700	0,00102	0,00096	5,49	30,0	1,7	28,9	2,04
8	0,0018	27,6	171700	0,00088	0,00074	15,55	28,4	2,8	27,6	0,18
9	0,0014	26,2	426200	0,00053	0,00045	13,66	25,5	2,7	25,7	2,04
10	0,0012	25,3	536500	0,00036	0,00040	12,59	24,8	1,9	25,3	0,12
						10,94		4,8		2,10

mat. B

1	1,1400	225,0	0,5	1,13250	0,91428	19,27	142,7	36,6	225,0	0,00
2	0,02640	103,5	250	0,02295	0,02745	19,62	96,1	7,2	104,1	0,54
3	0,01530	91,5	824	0,01225	0,01401	14,36	89,1	2,7	90,4	1,24
4	0,00885	77,5	4128	0,00627	0,00564	9,93	80,4	3,7	76,2	1,63
5	0,00540	69,5	11900	0,00308	0,00311	0,75	75,1	8,1	69,5	0,06
6	0,00274	61,0	72000	0,00071	0,00113	59,23	67,0	9,9	62,0	1,63
7	0,00253	63,5	972000	0,00041	0,00026	37,29	56,8	10,6	59,0	7,14
8	0,00204	62,5	456000		0,00040	22,92	59,6	4,6	59,0	5,60
9	0,00187	56,5	636000		0,00033		58,3	3,3	58,9	4,26
10	0,00187	56,5	818000		0,00029		57,4	1,6	58,9	4,27
11	0,00194	59,5	2E+06		0,00018		54,4	8,6	59,5	0,07
						8,8		2,40		

mat. C

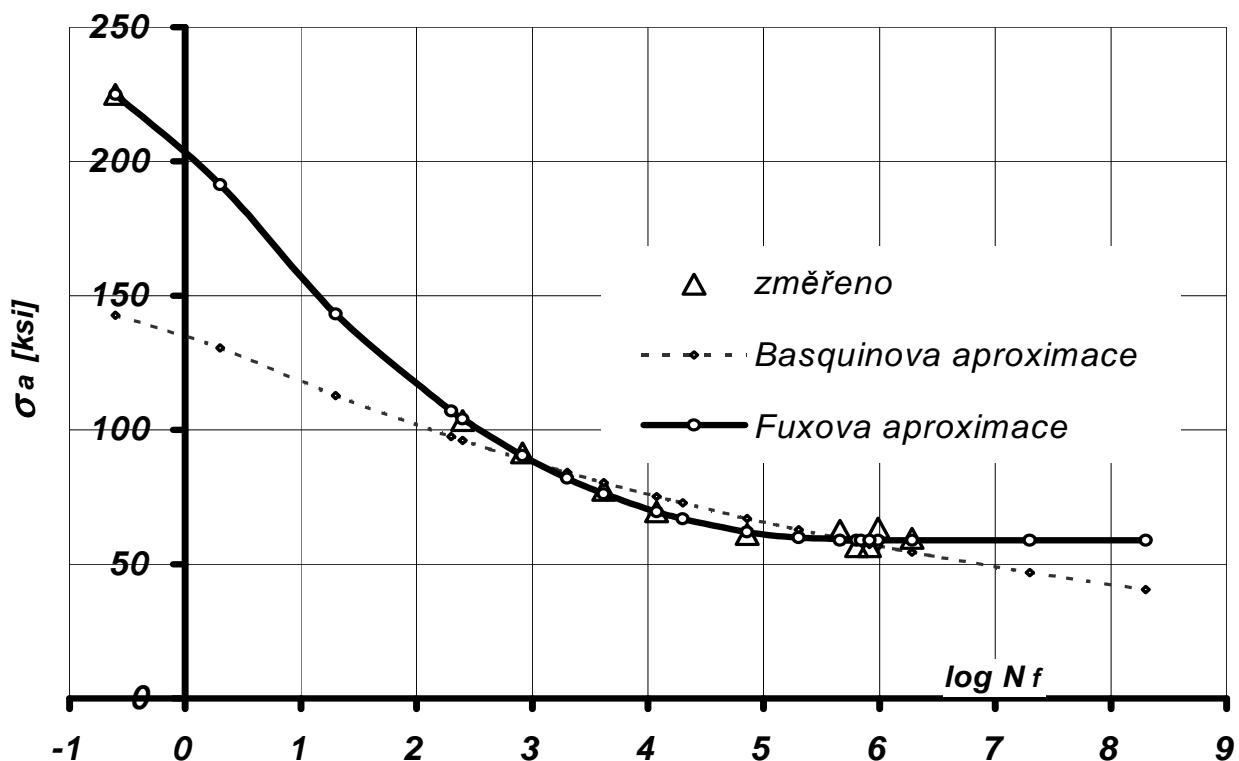
1	0,8900	270,0	0,5	0,88100	0,93968	6,66	215,9	20,0	270,0	0,00
2	0,0160	148,0	240	0,01107	0,01198	8,24	142,9	3,4	145,1	1,93
3	0,0100	135,0	722	0,00550	0,00550	0,02	132,8	1,6	133,0	1,52
4	0,0090	128,0	1020	0,00473	0,00431	8,96	129,7	1,4	129,5	1,20
5	0,0084	125,0	1250	0,00423	0,00373	11,83	128,0	2,4	127,6	2,08
6	0,0080	125,0	1350	0,00383	0,00353	7,79	127,3	1,9	126,9	1,51
7	0,0072	122,0	1760	0,00313	0,00293	6,46	125,1	2,5	124,5	2,05
8	0,0060	120,0	3000	0,00200	0,00201	0,53	120,7	0,6	120,0	0,01
9	0,0052	115,0	6000	0,00137	0,00123	9,85	115,3	0,2	114,7	0,25
10	0,0042	112,0	15000	0,00047	0,00064	38,18	108,4	3,2	108,7	2,98
11	0,0033	100,0	82000		0,00019	9,85	96,8	3,2	100,0	0,01
						3,7		1,23		

mat. D

1	0,5400	320,0	0,5	0,52933	0,75629	42,88	309,7	3,2	320,0	0,00
----------	---------------	--------------	------------	----------------	----------------	--------------	--------------	------------	--------------	-------------

2	0,0135	190,0	178	0,00717	0,00608	15,15	193,1	1,6	191,9	0,99
3	0,0125	184,0	258	0,00637	0,00448	29,58	187,5	1,9	185,5	0,81
4	0,0110	185,0	266	0,00483	0,00437	9,54	187,0	1,1	185,0	0,01
5	0,0100	185,0	488	0,00383	0,00266	30,69	178,1	3,7	175,1	5,34
6	0,0083	184,0	584	0,00217	0,00229	5,81	175,5	4,6	172,3	6,34
7	0,0075	166,0	956	0,00197	0,00153	22,22	168,7	1,6	165,0	0,60
8	0,0058	152,0	2350	0,00073	0,00073	0,32	156,9	3,3	152,8	0,49
9	0,0050	146,0	6880	0,00013	0,00030	126,96	144,0	1,4	140,0	4,09
10	0,0040	120,0	63400	0,00000	0,00005	31,46	120,4	0,4	120,0	0,02
11	0,0033	100,0	785000				98,4	1,6	106,6	6,61
								2.2		2.3

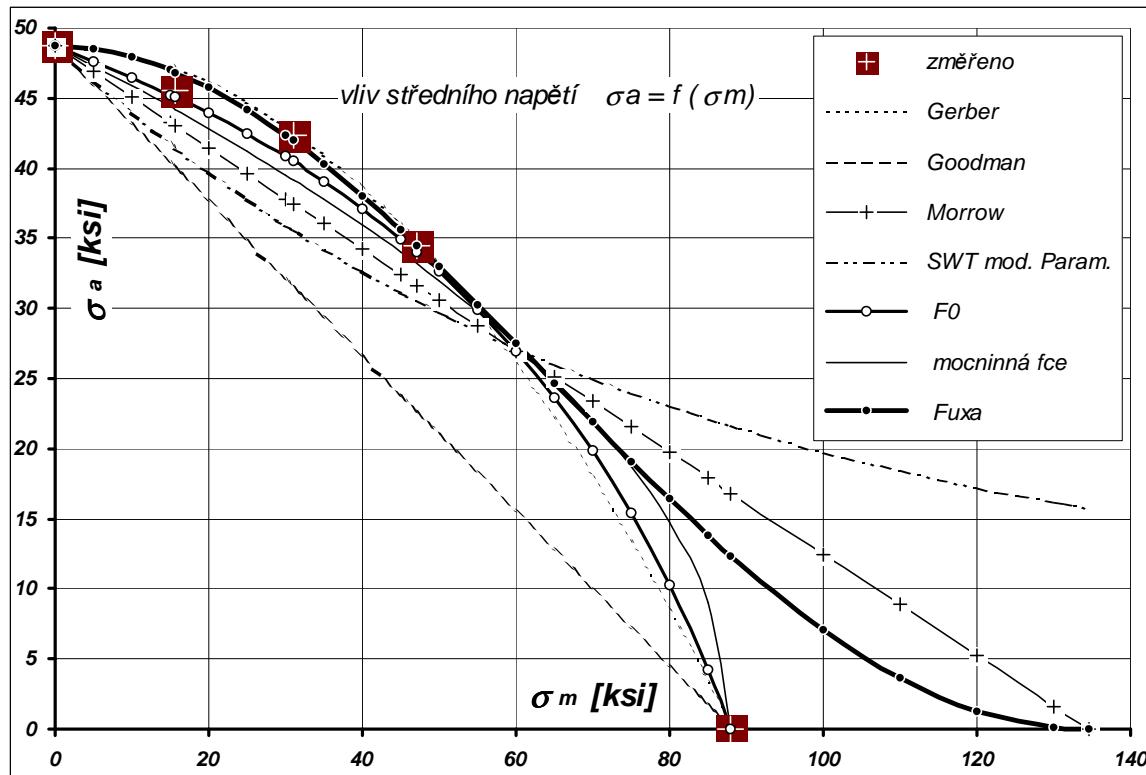
Z Tab. 2 je zřejmé, že Basquinova i Manson&Coffinova approximace jsou mnohdy nepřesné. Jako příklad nové approximace Fuxa (1999), Fuxa (2002), (viz dále v části 3) uvádíme nahradu Basquinova vztahu rovnicí (12):



Obr. 1 – Počet cyklů do porušení ($R = -1$, materiál B)

Vliv středního napětí na amplitudu napětí lze posoudit z Tab. 3 – materiál AM. Ve sloupci 1 a 2 jsou podržením zvýrazněny změřené hodnoty, sloupec 3 uvádí hodnoty spočtené podle Gerberovy approximace (4), sloupec 4 – podle Goodmanovy approximace, sloupec 5 – approximace Morrowa, sloupec 6 – modifikovaný SWT – rovnice (11), sloupec 7 – logaritmická approximace, sloupec 8 – mocninná funkce, sloupec 9 – nově navrženou approximaci (viz část 3).

Základní nedostatek approximací podle rovnic (4, 5, 6) spočívá ve skutečnosti, že jsou navrženy pro hodnoty smluvní pevnosti (nikoliv pro hodnoty skutečné pevnosti). Approximace (8, 9, 10) vycházejí z nepříliš přesných vztahů (1, 2) a ani approximace (11) neskytá hodnověrné výsledky. Situace je znázorněna na Obr. 2:



Obr.2 – Vliv středního napětí

Tab. 3 - Vliv středního napětí
(materiál AM)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
σ_m [ksi]	σ_a změř. [ksi]	σ_a GER [ksi]	σ_a GOOD [ksi]	σ_a MORR [ksi]	σ_a SWT [ksi]	σ_a F0 [ksi]	σ_a moc [ksi]	σ_a FX [ksi]
0,0	48,7	48,7	48,7	48,7	48,7	48,7	48,7	48,7
5,0		48,5	45,9	46,9	46,3	47,6	47,3	48,5
10,0		48,1	43,2	45,1	44,0	46,5	45,8	47,9
15,0		47,3	40,4	43,3	41,8	45,3	44,4	47,0
15,7	45,5	47,1	40,0	43,0	41,5	45,1	44,1	46,8
20,0		46,2	37,6	41,5	39,7	43,9	42,8	45,7
25,0		44,8	34,9	39,6	37,8	42,4	41,2	44,2
30,0		43,0	32,1	37,8	36,0	40,8	39,5	42,4

<u>31,0</u>	<u>42,4</u>	<u>42,7</u>	<u>31,5</u>	37,5	35,6	40,5	<u>39,2</u>	<u>42,0</u>
35,0		<u>41,0</u>	<u>29,3</u>	36,0	34,2	39,1	<u>37,8</u>	<u>40,3</u>
40,0		<u>38,6</u>	<u>26,6</u>	34,2	32,6	37,1	<u>36,0</u>	<u>38,0</u>
45,0		<u>36,0</u>	<u>23,8</u>	32,4	31,1	35,0	<u>34,0</u>	<u>35,6</u>
<u>47,1</u>	<u>34,5</u>	<u>34,7</u>	<u>22,6</u>	31,6	30,5	34,0	<u>33,2</u>	<u>34,5</u>
50,0		<u>33,0</u>	<u>21,0</u>	30,6	29,7	32,6	<u>32,0</u>	<u>33,0</u>
55,0		<u>29,7</u>	<u>18,3</u>	28,8	28,4	30,0	<u>29,8</u>	<u>30,3</u>
60,0		<u>26,1</u>	<u>15,5</u>	27,0	27,2	27,0	<u>27,5</u>	<u>27,5</u>
65,0		<u>22,1</u>	<u>12,7</u>	25,2	26,0	23,7	<u>24,9</u>	<u>24,7</u>
70,0		<u>17,9</u>	<u>10,0</u>	23,4	25,0	19,8	<u>22,0</u>	<u>21,9</u>
75,0		<u>13,3</u>	<u>7,2</u>	21,5	24,0	15,4	<u>18,7</u>	<u>19,1</u>
80,0		<u>8,5</u>	<u>4,4</u>	19,7	23,0	10,3	<u>14,7</u>	<u>16,4</u>
85,0		<u>3,3</u>	<u>1,7</u>	17,9	22,1	4,2	<u>9,0</u>	<u>13,8</u>
<u>88,0</u>	0,0	<u>0,0</u>	<u>0,0</u>	16,8	21,6	0,0	<u>0,0</u>	<u>12,4</u>

3. Nově navrhované approximace

Od nově navrhovaného řešení se zejména očekává, že:

- approximace *Wöhlerovy křivky* (pro $R = -1$) prochází bodem statické pevnosti $[\sigma_f, N_f = 1/4]$ a bodem na mezi únavy $[\sigma_C, N_f = N_C]$, když N_C je počet cyklů na mezi únavy,
- porušování při *střídavém tahu / tlaku* (pro R v intervalu -1 až $+1$) respektuje mezní hodnotu *středního tahového napětí* $\sigma_m = \sigma_f$ (nikoliv smluvní pevnosti σ_{Pt}),
- kritérium *statické pevnosti* je „*okrajovou podmínkou*“ multiaxálního *únavového* kritéria, tedy pro $N_f = 1/4$ přechází *únavové* kritérium na tvar *statického* kritéria pevnosti,
- *únavové* kritérium respektuje vliv *hydrostatického napětí* σ_R (je uvážen *constraint effect*)
- *experiment* je arbitrem, který pro dané měření potvrdí či vyvrátí navrhované vztahy.

K řešení *nelineárních vztahů* – zejména v případech, kdy je nelze linearizovat a pak použít „metodu nejmenších čtverců“ - je využíván originální program „**VĚŠTEC**“, který umožňuje pro *navrženou approximační funkci* vyhledat až *tři konstanty*, z výsledků měření. Současně s výpočtem konstant je počítána *střední chyba* approximace.

APROXIMACE WÖHLEROVY KŘIVKY

Pro náhradu *Basquinovy approximace* byl navržen původní vztah:

$$\sigma_{aF} = (\sigma_f + \sigma_C) / 2 + (\sigma_f - \sigma_C) / 2 \cdot \cos \{ \pi \cdot [\log(4N_f) / \log(4N_C)]^a \} \quad (12)$$

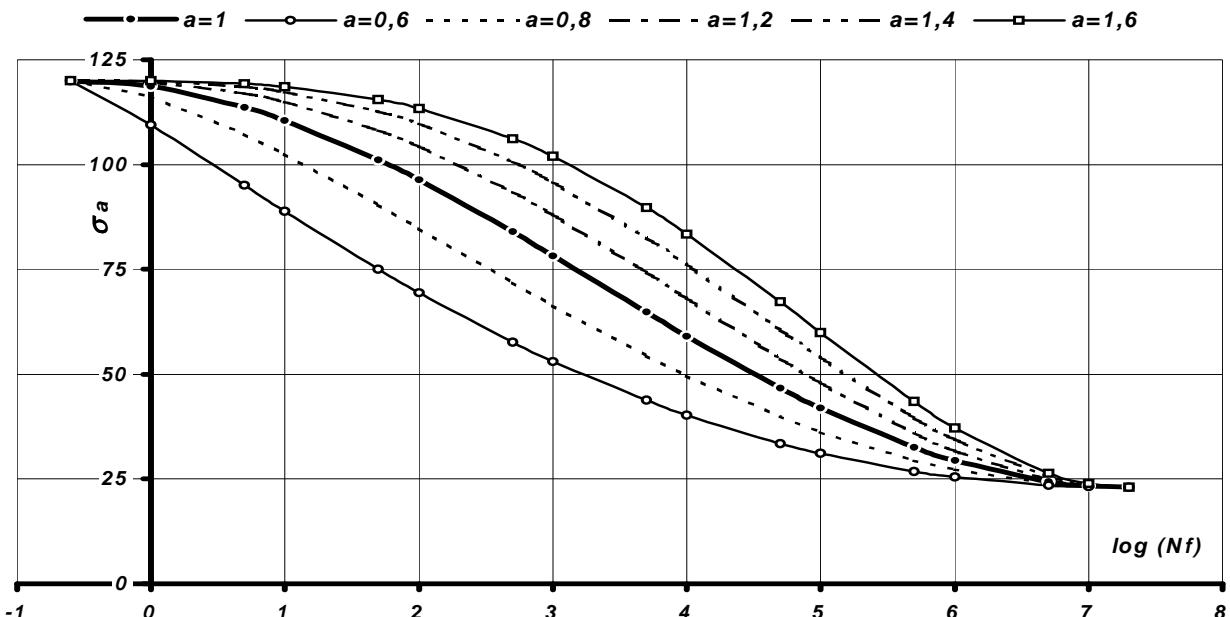
pro N_f v intervalu $[1/4; N_C]$ a σ_{aF} v intervalu $[\sigma_f; \sigma_C]$.

σ_f je hodnota *skutečné pevnosti* v tahu, σ_C je napětí na mezi únavy v tahu, N_C je počet cyklů na mezi únavy, a je konstanta. σ_{aF} značí mezní amplitudu napětí při $R = -1$, N_f značí mezní počet cyklů do porušení.

Variabilitu approximace při změně konstanty a (a zadaných hodnotách σ_f, σ_C, N_C) znázorňuje Obr. 3. Přesnost approximace (12) je s užitím programu VĚŠTEC ověřována na materiálech A, B, C, D – charakterizovaných v Tab. 1. Chyba této approximace CH_F a hodnoty konstant jsou uvedeny v Tab. 4:

Tab. 4

materiál	σ_f [ksi]	σ_c [ksi]	N_c [cyklů]	a [/]	CH_F [%]
A	108	24.5	941 408	0.7578	2.1
B	225	58.9	346 677	0.5224	2.4
C	270	89.6	8 802 134	0.4534	1.2
D	320	101.8	6 678 562	0.5498	2.3



Obr. 3 – Variabilita approximace podle rovnice (12)

POSOUZENÍ VLIVU STŘEDNÍHO NAPĚTÍ

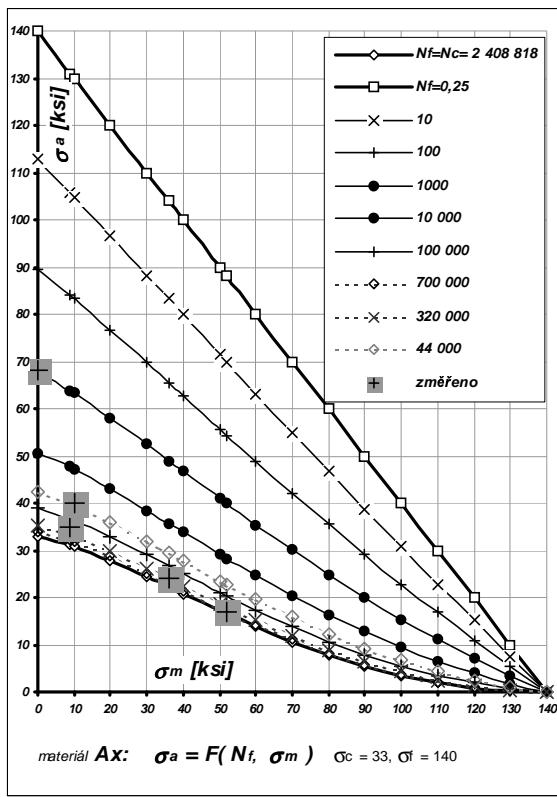
Vliv středního napětí σ_m na mezní amplitudu napětí σ_a při namáhání tahem / tlakem s předpětím lze approximovat vztahem:

$$\sigma_{af2} = (\sigma_f^* + \sigma_c^*)/2 + (\sigma_f^* - \sigma_c^*)/2 \cdot \cos \{ \pi \cdot [\log(4.N_f) / \log(4.N_c)]^a \} \quad (13)$$

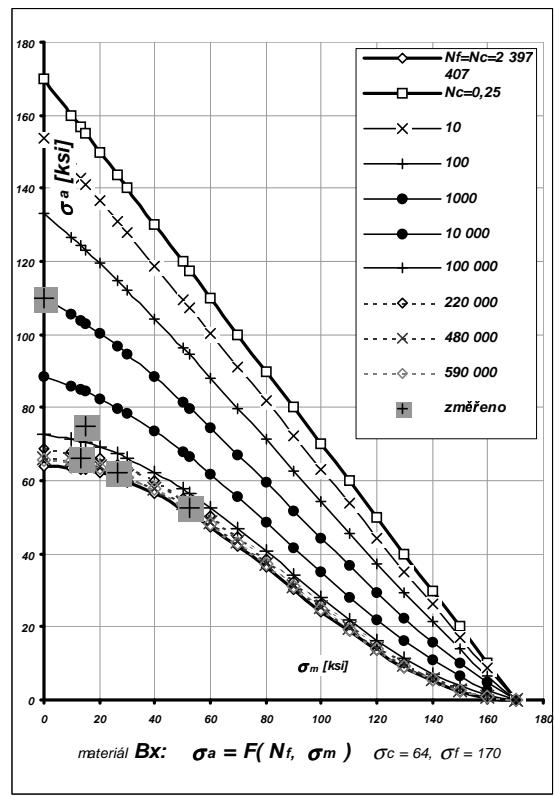
$$\sigma_f^* = \sigma_f - \sigma_m \dots \text{podmínka statické pevnosti při } N_f = 1/4 \quad (14)$$

$$\sigma_c^* = \sigma_c / 2 \cdot \{ 1 + \cos[\pi \cdot (\sigma_m / \sigma_f)^B] \} \dots \text{podmínka pevnosti na mezi únavy } N_f = N_c, \quad (15)$$

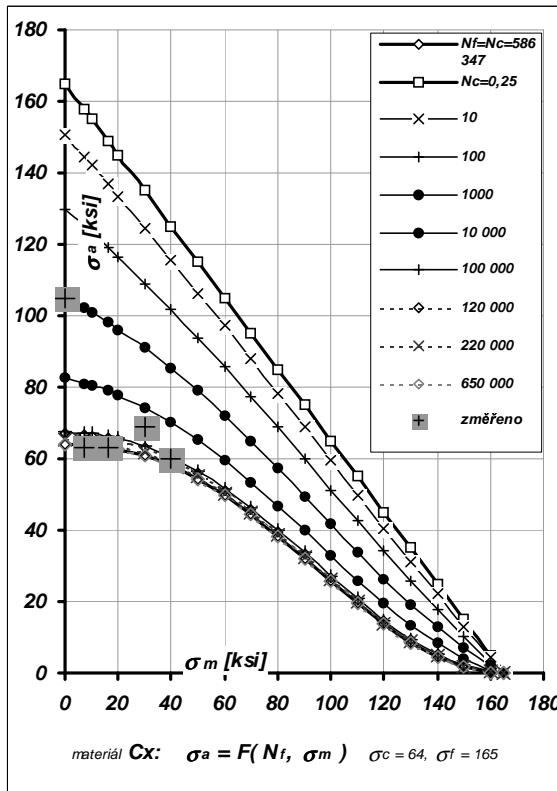
σ_f je hodnota skutečné pevnosti v tahu, σ_c je napětí na mezi únavy v tahu / tlaku pro $R = -1$, N_c je počet cyklů na mezi únavy, a je konstanta, B je konstanta, σ_{af2} značí mezní amplitudu napětí pro R v intervalu -1 až $+1$, σ_m je střední tahové napětí, N_f značí mezní počet cyklů do porušení. Vhodnost approximace (13) je patrná z následujících Obr. 4, 5, 6, 7:



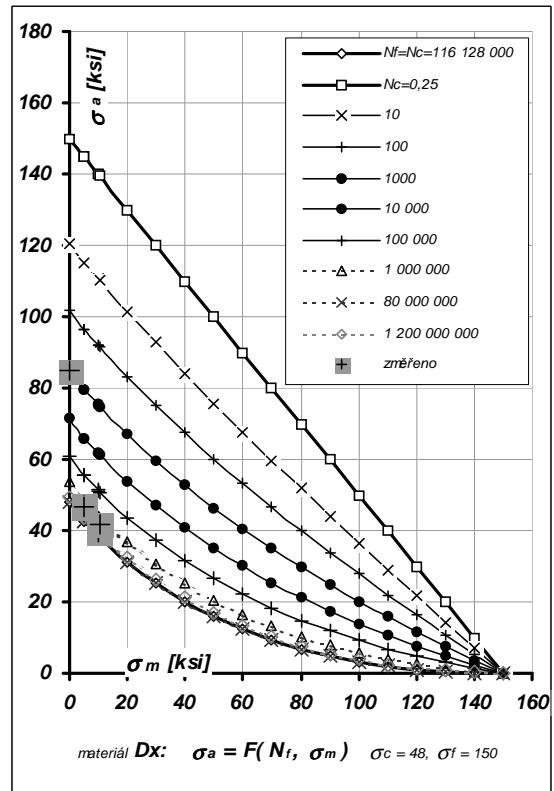
Obr.4 - Vliv středního napětí – materiál Ax



Obr.5 – Vliv středního napětí – materiál Bx



Obr.6 Vliv středního napětí – materiál Cx



Obr.7 – Vliv středního napětí – materiál Dx

4. Závěr

Obvyklé aproximační rovnice (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11) nedávají vždy dostatečně přesné odhadu mezních hodnot. Proto byly navrženy nové vztahy (12, 13, 14, 15), které byly testovány v podmínkách jednoosé napjatosti s tahovým předpětím. Očekává se, že tyto approximace umožní do budoucna zpřesnit multiaxialní kritérium únavové pevnosti.

5. Poděkování

Děkujeme GAČR za podporu projektu 101/04/0475.

6. Literatura

- Forrest, P.G. (1968): *Fatigue of metals*, Pergamon press Oxford – London – New York – Paris, ruský překlad: Ustalost' mětallov, Mašinostrojenije, Moskva, 1968
- Fugger, T. Jr.(1985): *Service Load Histories Analyzed by the Local Strain Approach*, Report No. 120, College of Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, May 1985
- Fuxa, J. (2002): Basquin's and another approximations fit for fatigue, In: *40th International Conference Experimental stress analysis, 3-6/VI/2002, Prague, Czech Republic*, pp.:59-62, ISBN 80-01-02547-0
- Fuxa, J. (1999): Short Survey of Fatigue Strength Theories Fit for Quasi-isotropic Material Loaded Under General Multiaxial State of Stress, In: *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava, č. 1, rok 1999, ročník XLV, řada strojní, článek č. 1254*, s. 75-80
- Landgraf, R. W. (1968): *Cyclic Deformation and Fatigue Behavior of Hardened Steels*, Report No. 320, Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Nov. 1968
- Moore, H.F., Jasper, T.M. (1923): An Investigation of the Fatigue of Metals, *Univ. Ill. Eng. Exp. Stn. Bull.*, 136, 1923
- Socie, D.F., Dowling, N.E., Kurath, P. (1984): Fatigue Life Estimation of Notched Members, In: *Fracture Mechanics: Fifteen Symposium, ASTM STP 883, R.J. Sanford (ed.), American Society for Testing and Materials, Philadelphia*, 1984, pp. 284-299