

VIBRATION OF BRIDGES UNDER HIGH SPEED TRAINS

L. Frýba *

Summary : *The simple theoretical model explains the dynamic behaviour of railway bridges subjected to high speed trains. The integral transformations of the governing partial differential equation present the deflections, stresses and vertical accelerations of the beam model of a bridge in a closed compact form. The numerical solution gives a survey of the effect of various parameters, like speed of trains, span of bridges, damping etc. Moreover, the stress records were classified using the rain flow counting method and presented the stress spectra which enable the fatigue calculations and life estimations.*

1. Úvod

Moderní technologie v západní Evropě a ve východní Asii zavedly pro dopravu osob vysokorychlostní vlaky, které se pohybují v dnešní době rychlostí kolem 300 km/h. Vysokou rychlostí se dnes označuje rychlost nad 200 km/h, přičemž nové vysokorychlostní tratě se budují na rychlost 350 km/h a mosty se konstruuují s 20 % spolehlivostí, tj. na 420 km/h. Výpočty se proto provádějí až do 500 km/h, protože tato rychlost byla již zkušebně překročena.

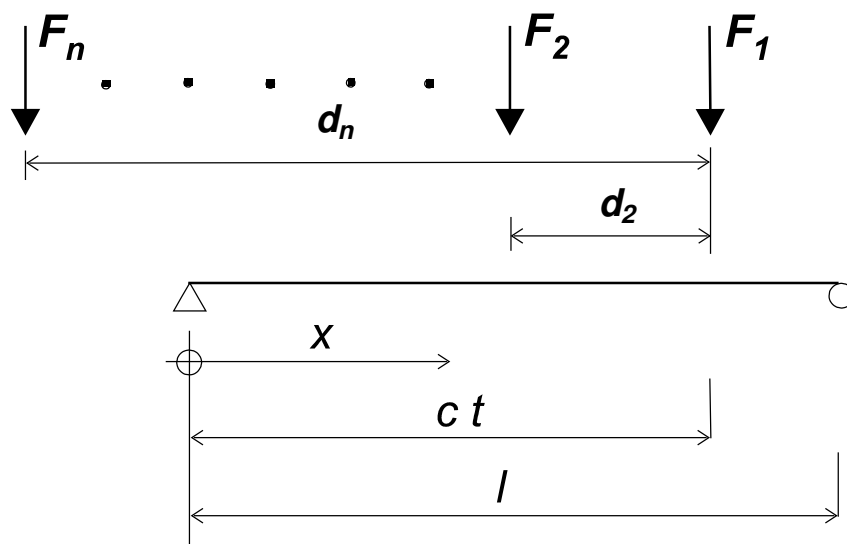
Nová dopravní technologie přinesla samozřejmě i nové technické problémy. Jedním z nich je i dynamické namáhání železničních mostů. Udržovací služby francouzských a německých drah upozorovaly destabilizaci šterkového lože na mostech malých a středních rozpětí na vysokorychlostních tratích. Daly tomu i nový technický název "bílý šterk" vzniklý omíláním šterkových zrn při intenzivním kmitání. Tento jev má vážné následky na destabilizaci kolejového lože, možnost vykolejení, zhoršení jízdních vlastností vlaků a pohodlí cestujících a konečně i na zvýšení udržovacích nákladů.

Proto se tímto problémem zabýval i Evropský výzkumný ústav železniční (ERRI, 1999), v jehož rámci se postupně vypracovala i tato studie. Jejím účelem je sestavit a řešit jednoduchý teoretický model, který by vysvětloval základní otázky tohoto problému.

*Prof. Ing. Ladislav Frýba, DrSc. : Ústav teoretické a aplikované mechaniky AV ČR; Prosecká 76; CZ - 190 00 Praha 9; tel.: ++ 420 283881646; fax : ++ 420 283881646; e-mail : fryba@itam.cas.cz

2. Jednoduchý teoretický model

V tomto oboru se ustálilo (Frýba, 1992), že nejjednodušším teoretickým modelem mostu je Bernoulliho-Eulerův nosník o rozpětí l , který je zatížen řadou nápravových sil F_n , $n = 1, 2, 3, \dots, N$, které se pohybují konstantní rychlostí c zleva doprava, kde N je počet nápravových sil ve vlaku, viz obr. 1.



Obr. 1. Pohyb řady sil F_n po nosníku o rozpětí l .

Parciální diferenciální rovnice popisuje dynamické chování nosníku

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + 2\mu\omega_d \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n(t) \delta(x - x_n) F_n, \quad (1)$$

kde je označeno : $v(x, t)$ – svislý průhyb nosníku v místě x a čase t , E – modul pružnosti, I – konstantní moment setrvačnosti příčného řezu nosníku, μ – konstantní hmotnost nosníku na jednotku délky, ω_d – kruhová frekvence útlumu, $\vartheta = \omega_d/f_1$ – logaritmický dekrement útlumu, f_1 – první vlastní frekvence nezatíženého nosníku,

$$\varepsilon_n(t) = h(t - t_n) - h(t - T_n), \quad (2)$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ 1 & \text{pro } t \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

– Heavisidova jednotková funkce, $t_n = d_n/c$ – okamžik, kdy n -tá síla vjede na nosník, $T_n = (l + d_n)/c$ – okamžik, kdy n -tá síla opustí nosník, $\delta(x)$ – Diracova delta funkce, $x = ct - d_n$, d_n – vzdálenost n -té síly od první, $d_1 = 0$.

K řešení rovnice (1) se použily metody integrálních transformací. Fourierova transformace v délkové souřadnici je

$$V(j, t) = \int_0^l v(x, t) v_j(x) dx,$$

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu}{V_j} V(j, t) v_j(x) \quad (4)$$

a Laplaceova-Carsonove transformace v časové souřadnici

$$V^*(j, p) = p \int_0^{\infty} V(j, t) \exp^{-pt} dt,$$

$$V(j, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{p} V^*(j, p) \exp^{tp} dp. \quad (5)$$

Tyto operace použité na rovnici (1) dávají transformované řešení pro nulové počáteční podmínky a pro okrajové podmínky prostého nosníku ve tvaru (Frýba, 1989) :

$$V^*(j, p) = \sum_{n=1}^N \frac{j\omega F_n}{\mu} \exp^{-pd_n/c} F(p) [1 - (-1)^j \exp^{-pl/c}], \quad (6)$$

kde je označena funkce

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + j^2\omega^2)[(p + \omega_d)^2 + \omega_j'^2]} \quad (7)$$

a její inverzní obraz (Frýba, 1989)

$$f(t) = \frac{1}{\omega_j' D} \left[\frac{\omega_j'}{j\omega} \sin(j\omega t + \lambda_1) + \exp^{-\omega_d t} \sin(\omega_j' t + \lambda_2) \right]. \quad (8)$$

Ve výše uvedených rovnicích se označilo

$$v_j(x) = \sin \frac{j\pi x}{l}, \quad V_j = \int_0^l \mu v_j^2(x) dx = \mu l / 2, \quad (9)$$

$$\lambda_1 = \arctan \frac{-2j\omega\omega_d}{\omega_j^2 - j^2\omega^2}, \quad \lambda_2 = \arctan \frac{2\omega_d\omega_j'}{\omega_d^2 - \omega_j'^2 + j^2\omega^2}$$

a dále se užívá pro vlastní a vynucené frekvence nosníku

$$\omega_j^2 = \frac{j^4 \pi^4 EI}{l^4 \mu}, \quad f_j = \frac{\omega_j}{2\pi}, \quad \omega_j'^2 = \omega_j^2 - \omega_d^2, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

$$\omega = \frac{\pi c}{l}, \quad (11)$$

svislý statický průhyb středu rozpětí nosníku pod břemenem F umístěným v $x = l/2$

$$v_0 = \frac{2F}{\mu l \omega_1^2} = \frac{2Fl^3}{\pi^4 EI} \approx \frac{Fl^3}{48EI}, \quad (12)$$

$$D^2 = (\omega_j^2 - j^2\omega^2)^2 + 4j^2\omega^2\omega_d^2. \quad (13)$$

Inverzní transformace (Frýba, 1989) rovnice (6) pak dá hledané řešení v tomto tvaru

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N v_0 \frac{F_n}{F} j \omega \omega_1^2 \left[f(t - t_n) h(t - t_n) - (-1)^j f(t - T_n) h(t - T_n) \right] \sin \frac{j\pi x}{l}. \quad (14)$$

Z rovnice (14) se vypočte i ohybový moment a svislé zrychlení

$$\begin{aligned} M(x, t) &= -EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N M_0 \frac{F_n}{F} j^3 \omega \omega_1^2 \left[f(t - t_n) h(t - t_n) - (-1)^j f(t - T_n) h(t - T_n) \right] \sin \frac{j\pi x}{l}, \end{aligned} \quad (15)$$

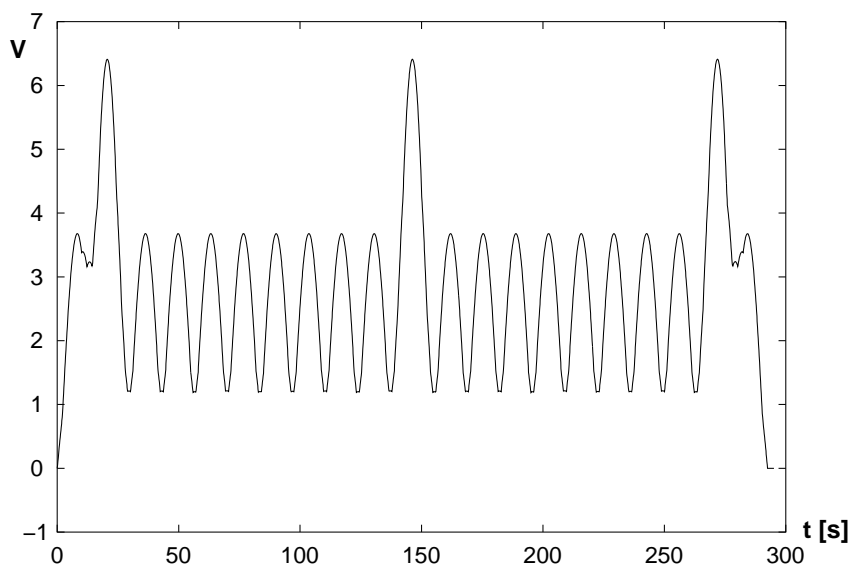
$$\begin{aligned} a(x, t) &= \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N v_0 \frac{F_n}{F} j \omega \omega_1^2 \left[\ddot{f}(t - t_n) h(t - t_n) - (-1)^j \ddot{f}(t - T_n) h(t - T_n) \right] \sin \frac{j\pi x}{l}, \end{aligned} \quad (16)$$

kde

$$M_0 = \frac{2Fl}{\pi^2} \approx \frac{Fl}{4}, \quad (17)$$

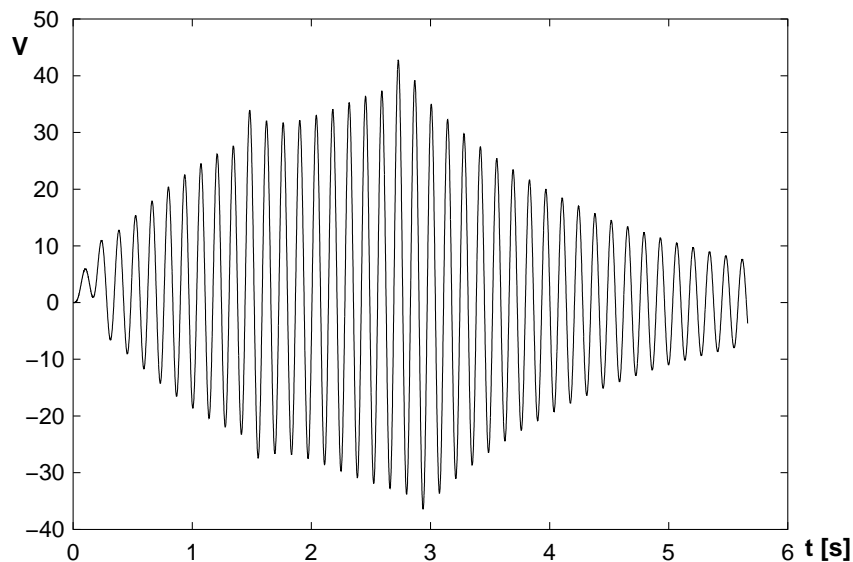
$$\ddot{f}(t) = -\frac{\omega_j'^2 - \omega_d^2}{\omega_j' D} \left[\frac{j\omega\omega_j'}{\omega_j'^2 - \omega_d^2} \sin(j\omega t + \lambda_1) + \exp^{-\omega_d t} \sin(\omega_j' t + \lambda_3) \right], \quad (18)$$

$$\lambda_3 = \lambda_1 + \arctan \frac{2\omega_d \omega_j'}{\omega_j'^2 - \omega_d^2}. \quad (19)$$



Obr. 2. Časový průběh průhybu středu rozpětí ocelového mostu rozpětí $l = 20$ m, vlak Eurostar, kvazistatická rychlost $c = 5$ km/h, $V = v(l/2, t)/v_0$.

Vhodným využitím Heavisidovy funkce platí rovnice (14), (15) a (16) pro vynucené i vlastní kmitání jak v době, kdy soustava sil je na nosník, tak i v době, kdy opustí nosník. Příklad je znázorněn na obr. 2 pro kvazistatickou rychlost 5 km/h a na obr. 3 pro rezonanční rychlost 500 km/h.



Obr. 3. Časový průběh průhybu středu rozpětí ocelového mostu rozpětí $l = 20$ m, vlak Eurostar, rezonanční rychlost $c = 500$ km/h, $V = v(l/2, t)/v_0$.

3. Kritické rychlosti

Rozbor rovnice (14) ukazuje na dvě příčiny intenzivního kmitání nosníku (Frýba, Náprstek, 1998) :

1. Jestliže síly F_n jsou rozmístěny ve stejných vzdálenostech d , pak opakované jejich účinky způsobí rezonanční kmitání. To nastane po delším působení, když čas potřebný pro přejetí vzdálenosti d rychlostí c je roven k -násobku periody vlastního kmitání nosníku $1/f_j$. Tato podmínka vede ke kritické rychlosti

$$c_{cr} = \frac{df_j}{k}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots, 1/2, 1/3, 1/4, \dots \quad (20)$$

Rychlost (20) je současnými vysokorychlostními vlaky dosahována, ale rezonanční kmitání je rušeno nestejnými vzdálenostmi $d_n \neq d$. V praxi je to tedy spíše ojedinělý jev, který se objevuje při $j = k = 1$, ale přesto byl mnohokrát pozorován.

2. Rozbor rovnic (14) a (13) ukazuje, že nosník může ztratit svou stabilitu, jestliže jmenovatel D (13) v rovnici (14) se blíží nule. To může nastat při malém tlumení, v limitě při $\omega_d \rightarrow 0$ a $\omega_j^2 = j^2\omega^2$. Tato podmínka dá kritickou rychlost, viz (10) a (11) :

$$c_{cr} = \frac{2lf_j}{j}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

Druhý případ je analogický stabilitním problémům. Naštěstí dnešní vysokorychlostní vlaky ještě nedosahují rychlostí (21).

4. Numerické výpočty

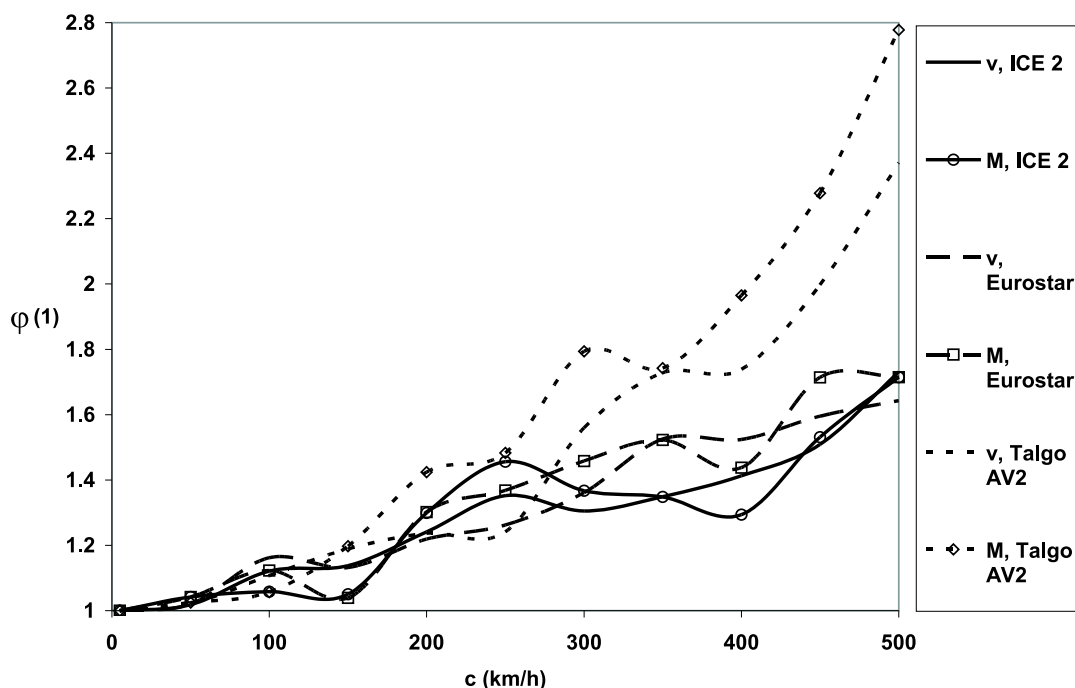
Rovnice (14), (15) a (16) byly naprogramovány a počítány v každém okamžiku $\Delta t = \min [0,001; 1/(20f_5)]$ svislého průhybu $v(l/2, t)/v_0$, ohybového momentu $M(l/2, t)/M_0$ a svislého zrychlení $a(l/2, t)/g$ ve středu rozpětí $x = l/2$, kde $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ je gravitační konstanta. Výpočet končí, když poslední N -tá síla opustí nosník a nosník absolvuje dalších 20 kmitů volného kmitání, $T_N + 20/f_1$. Počítalo se s 5 tvary vlastního kmitání (pro $x = l/2 \rightarrow j = 1, 3, 5$).

Parametrická studie uvažovala betonové a ocelové mosty o rozpětí $l = 5, 10, 15, 20, 30$ a 50 m s odpovídajícími vlastními frekvencemi f_j , logaritmickými dekrementy útlumu ϑ a vlastní tíhou $G = \mu gl$. Počítaly se účinky vysokorychlostních vlaků ICE, Eurostar/TGV a Talgo, které jsou v provozu v Německu, Francii/Anglii a ve Španělsku. Pro každý vlak se na všech mostních konstrukcích uvažovala rychlost $c = 5$ až 500 km/h. Celkový počet výpočtů byl 396 případů.

Vliv rychlosti je ukázán na obr. 4, kde dynamický součinitel

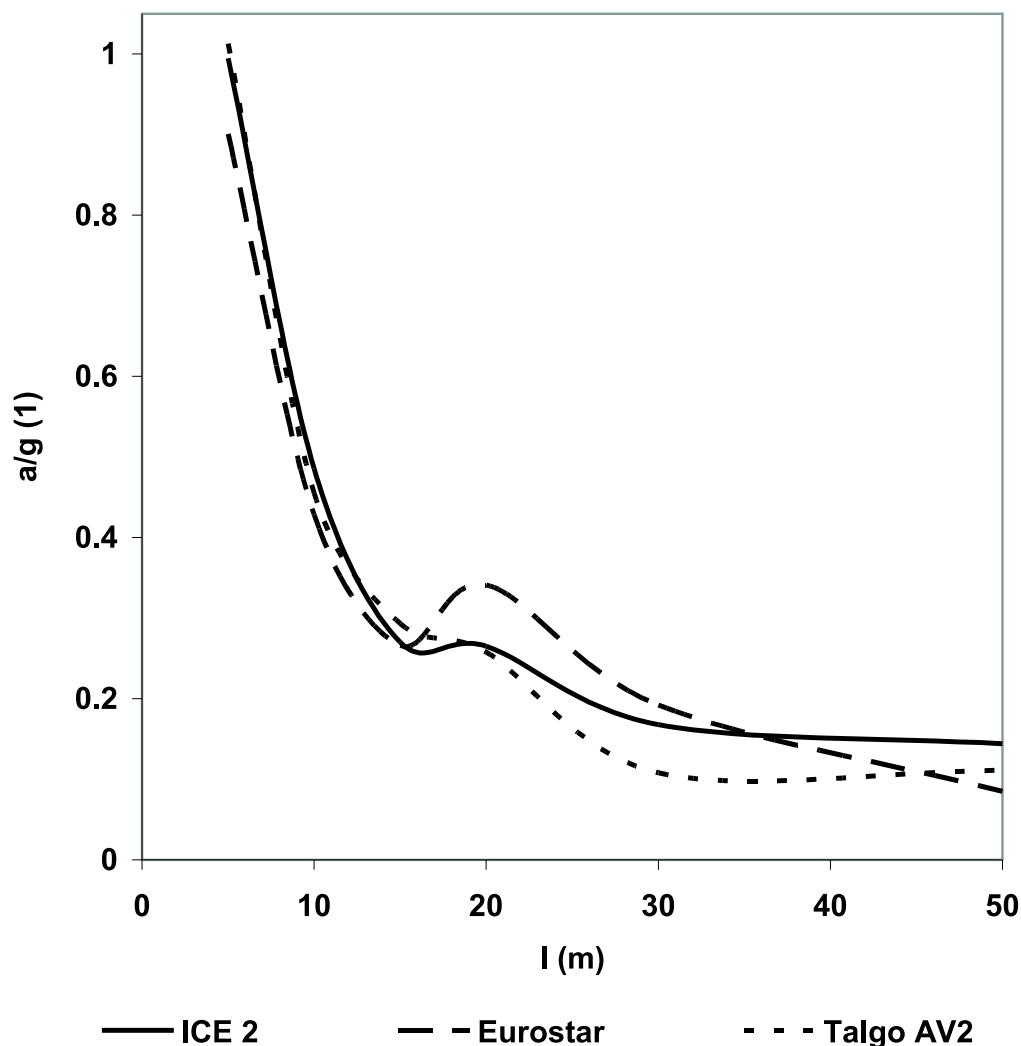
$$\varphi = \frac{\max v(l/2, t) \text{ při rychlosti } c}{\max v(l/2, t) \text{ při rychlosti } 5 \text{ km/h}} \quad (22)$$

je vyneseno pro průhyb v a ohybový moment M pro tři uvažované typy vysokorychlostních vlaků.



Obr. 4. Dynamický součinitel φ jako funkce rychlosti c pro průhyb v a ohybový moment M pod různými vlaky. Ocelový most o rozpětí $l = 5$ m.

Svislé zrychlení a/g v závislosti na rozpětí l betonových mostů je sledováno na obr. 5 opět pro všechny typy vlaků při rychlosti $c = 350$ km/h.



Obr. 5. Svislé zrychlení a/g betonových mostů různých rozpětí l pod vysokorychlostními vlaky při rychlosti $c = 350$ km/h.

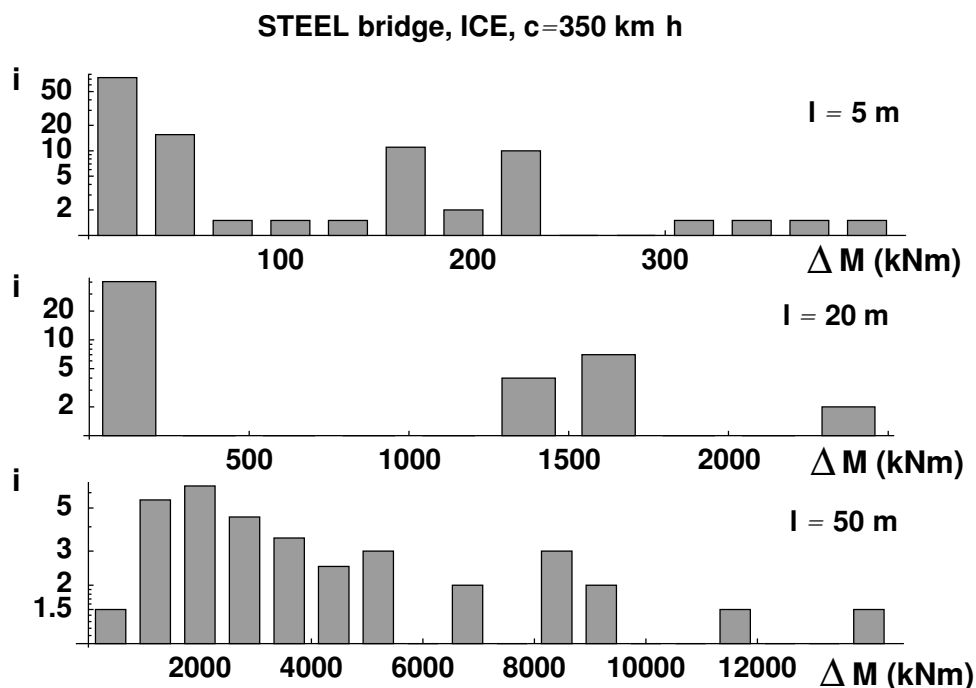
Časový průběh ohybových momentů byl použit pro třídění jejich rozkmitů metodou stékající vody (rain flow), protože jejich přepočítání na napětí je snadný (při znalosti příčného řezu). Metoda dává počet cyklů napětí i v každé třídě ohybových momentů ΔM , což je důležité pro únavové výpočty. Je založena na podmínkách

$$A(i-1) \leq A(i+1) < A(i) \leq A(i+2) \quad \text{nebo} \quad (23)$$

$$A(i-1) \geq A(i+1) > A(i) \geq A(i+2), \quad (24)$$

kde $A(i)$ označuje i -tý lokální vrchol. Postup je detailně popsán v knize (Frýba, 1992).

Ukázkou spekter napětí (ohybových momentů ΔM) je obr. 6 pro ocelové mosty rozpětí $l = 5, 20$ a 50 m pod vlakem ICE při rychlosti $c = 350$ km/h.



Obr. 6. Spektra napětí ocelových mostů rozpětí $l = 5, 20$ a 50 m pod vlakem ICE při rychlosti $c = 350$ km/h.

5. Závěry

Vysokorychlostní vlaky podstatně ovlivňují dynamické chování mostů, které se mohou za určitých podmínek dostat i do rezonančního kmitání. Je to způsobeno dlouhým sledem nápravových sil, jejichž skupiny jsou ve stejných vzdálenostech.

Dynamické přírůstky průhybu, napětí i svislého zrychlení mostů zhruba stoupají se vzrůstající rychlostí. Tato závislost má i lokální vrcholy, jejichž poloha a velikost závisí na komplexním dynamickém spolupůsobení mostu s vlakem. V této práci se v prvním přiblížení uvažovalo působení vlaku jako účinek řady nápravových sil a nelze tím vysvětlit všechny detaily problému.

Nicméně i předložený jednoduchý teoretický model potvrdil možnost rezonančního kmitání. To se objevuje při rychlostech nad 200 km/h, ale často je rušeno nepravidelnostmi v rozmístění náprav, krátkým trváním přejezdu vlaku i tlumením.

Dynamické odezvy ocelových mostů jsou větší než betonových, což se vysvětluje větší hmotností a útlumem betonových konstrukcí ve srovnání s ocelovými. Relativní dynamické přírůstky u napětí jsou o málo větší než u průhybu mostů.

Svislá zrychlení mostů krátkých rozpětí jsou značná a snadno mohou překročit dovolené údaje ($3,5$ m/s² pro šterk a 5 m/s² pro mosty bez kolejového lože). Zrychlení se zmenšuje se vzrůstajícím rozpětím mostů.

Protože svislá zrychlení mostů mohou překročit mezní hodnoty, stanou se asi novým mezním stavem při návrhu mostů na vysokorychlostních tratích. Svislá zrychlení se zmenšují se vzrůstajícím útlumem a hmotností mostů. Jsou menší u betonových než u ocelových konstrukcí.

Spektra napětí se mění se vzrůstající rychlostí vlaků : jsou chudá při malých rychlostech, ale vysoké rychlosti významně zvětšují rozkmitanost napětí, zatímco jejich počet se

příliš nemění. Je to patrné zvláště při rezonančním kmitání, kde třídící metody zachycují i negativní vrcholy při volném kmitání v době, kdy vlak opustil mostní konstrukci.

6. Poděkování

Předložená práce vznikla za podpory projektu KONTAKT ME 503 a výzkumného záměru AV 0Z 2071913. Dík patří RNDr. C. Fischerovi, PhD., za provedení obsáhlých výpočtů.

7. Literatura

- ERRI D 214 (1999) *Rail bridges for speeds higher than 200 km/h*. Research report of the European Rail Research Institute, Utrecht.
- Frýba, L. (1989) : *Kmitání těles a konstrukcí způsobené pohybujícím se zatížením*. 2. vydání, Academia, Praha.
- Frýba, L. (1992) : *Dynamika železničních mostů*. 1. vydání, Academia, Praha.
- Frýba, L. & Náprstek, J. (1998): Appearance of resonance vibration on railway bridges. In : *Advances in Civil and Structural Engineering Computing Practice* (B.H.V. Topping, ed.) Civil-Comp Press, Edinburgh, str. 377-382.
- Frýba, L. (2002): Intensive vibration of bridges due to high speed trains. In : *Computers in Railways VIII*. (J. Allan, R.J. Hill, C.A. Brebbia, G. Sciutto, S. Sone, J. Ampton, eds) WIT Press, Southampton, Boston, str. 595-604.
- Frýba, L. & Fischer, C. & Pospíšil, S. (2002) Dynamic effects of high speed trains on bridges. In : *Structural Dynamics - EURODYN 2002* (G. Grundmann, G.I. Schuëller, eds) Balkema, Lisse, Vol. 2, str. 1071-1076.
- Frýba, L. & Fischer, C. (2002) Dynamic increments in bridges subjected to high speed trains. In : *Proceedings of the 4-th International Conference TESE 2002*. Rajecké Teplice, str. 17-22.
- Frýba, L. (2003) Vertical accelerations of bridges - a new limit state. In : *Computational Methods and Experimental Measurements XI* (C.A. Brebbia, G.M. Carlomagno, eds) WIT Press, Southampton, Boston, str. 299-308.
- Frýba, L. & Fischer, C. (2003) Number of stress cycles in bridges due to high speed trains. In : *Structures for High Speed Railway Transportation*, IABSE Reports, Vol. 87, Zürich, str. 68-69, CD ROM.
- Frýba, L. & Fischer, C. & Yau, J.-D. (2003) Stress ranges in bridges under high speed trains. In : *Proceedings of the 9-th International Conference on Civil and Structural Engineering Computing* (B.H.V. Topping, ed.) Civil-Comp Press, Stirling, str. 185-186, CD ROM.