

PARTICULARIZED MODELLING OF OPERATING LOADS OF ADVANCED STRAIGHT TEETH IN SPUR GEAR MESH.

Doležal Z., Šíroká V.*

Summary: *A new method and a computer program has been developed for particularized modelling and computing of operational load of straight spur HCR and LCR gears. The gear mesh stiffness and transmission errors are assumed to be non-linear functions of gear tooth kinematics imperfection under transmitted load that take into account relative unloaded tooth errors, load deflections and tooth profile modification. The performed analysis proved that the mesh load influences the contact ratio and internal excitation in gears very significantly and that is why these non-linear properties are taken into account. Consequently the computation of operating load must be performed by iteration procedure.*

1. Úvod

Problematicke modelování dynamických jevů v mechanických soustavách s ozubenými koly a silových poměrů v záběrech ozubení je věnována značná pozornost již více než padesát let. Přesto teoretické znalosti v této vědní oblasti stále značně zaostávají za potřebami náročnější technické praxe. A to především proto, že vlastnosti dosud používaných výpočtových modelů jsou stále příliš odlišné od vlastností reálných, zvláště pak vysokootáčkových převodových soustav či převodových soustav s moderním ozubením, jehož součinitel záběru profilu $\varepsilon_\alpha > 2$.

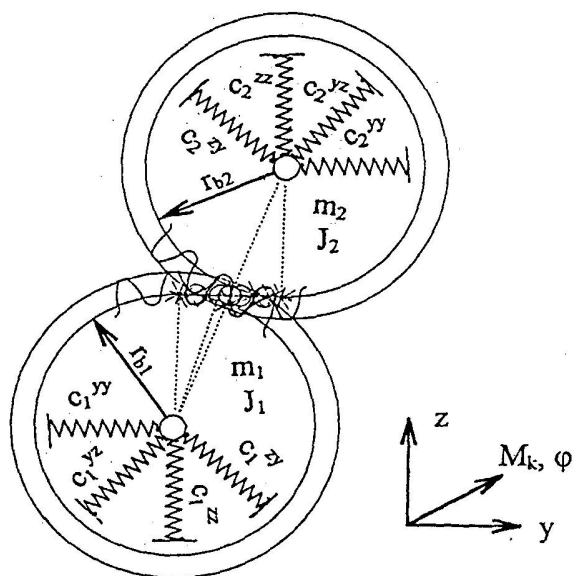
Nejsložitějším a stále nedostatečně zvládnutým problémem všech pevnostních a dynamických výpočtů, či výpočtových modelů, zůstává samotné ozubení. Ozubení s velmi složitou problematikou svého vnitřního buzení a tlumení generovaného přímo v záběrech spoluzabírajících párů zubů, způsobenou významným interaktivním vlivem výrobních úchylek, poddajných deformací provozně zatíženého ozubení a výškových modifikací spoluzabírajících boků zubů. Tyto složité vlivy jsou však dosud ve všech známých či publikovaných pracích, zaměřených na modelování dynamických jevů či silových poměrů v záběrech soukolí s přímými či šikmými zuby, zpravidla zanedbávány. Periodicky proměnná tuhost ozubení i periodicky proměnná nerovnoměrnost převodu, představující hlavní zdroje složitého vnitřního buzení, jsou pak zjednodušeny jen na prosté funkce času. Tímto zjednodušením se ovšem zanedbává vůbec nejsilnější ale i nejsložitější zdroj vnitřního buzení, způsobený poddajnými deformacemi provozně zatíženého ozubení.

Problematicku nového modelování dynamických jevů, vyvíjeného ve VZLÚ, a.s., zaměřeného na odstraňování uvedených zjednodušení, si alespoň naznačíme v tomto krátkém příspěvku.

* Ing Zdeněk Doležal, CSc., Ing. Věra Šíroká, VZLÚ,a.s., Beranových 130, 199 05 Praha 9
tel.: 225115116, fax: 225115143, e-mail: dolezal@vzlu.cz , siroka@vzlu.cz

2. Modelování dynamických jevů v záběru ozubení

Výchozí matematický model pro simulaci obecně nelineárních dynamických jevů, které se mohou vyskytovat v dynamické soustavě tvořené jedním párem ozubených kol s moderním čelním ozubením, uložených na neisotropně poddajných a tlumených podporách, představuje obecně soustavu šesti simultánních nelineárních diferenciálních rovnic druhého řádu s velmi složitě proměnnými parametry či spíše funkcemi.



Pro sestavení těchto šesti výchozích pohybových rovnic dynamické soustavy, naznačené (včetně kartézské souřadnicové soustavy) na obr. 2.1, lze použít Lagrangeových rovnic druhého druhu. Za předpokladu konstantní rychlosti záběru ozubení na záběrové přímce a po zavedení provozní nerovnoměrnosti převodu q (relativní výchylky ozubených kol) společně s redukovanou hmotností ozubených kol m_{red} , pro něž platí

$$q = y_1 + \varphi_1 r_{b1} - y_2 + \varphi_2 r_{b2} \quad (2.1)$$

$$m_{red} = J_1 J_2 / (J_1 r_{b2}^2 + J_2 r_{b1}^2), \quad (2.2)$$

Obr. 2.1 Modelovaná dynamická soustava

můžeme výchozí soustavu šesti pohybových rovnic zredukovat na soustavu pěti pohybových rovnic a tuto pak zapsat

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + k_1^{yy} \dot{y}_1 + k_1^{yz} \dot{z}_1 + k\dot{q} + c_1^{yy} y_1 + c_1^{yz} z_1 + bc(q - v) &= 0 \\ m_1 \ddot{z}_1 + k_1^{zy} \dot{y}_1 + k_1^{zz} \dot{z}_1 + c_1^{zy} y_1 + c_1^{zz} z_1 - F_T &= 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_2^{yy} \dot{y}_2 + k_2^{yz} \dot{z}_2 - k\dot{q} + c_2^{yy} y_2 + c_2^{yz} z_2 - bc(q - v) &= 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 + k_2^{zy} \dot{y}_2 + k_2^{zz} \dot{z}_2 + c_2^{zy} y_2 + c_2^{zz} z_2 - F_T &= 0 \\ (\ddot{q} - \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) m_{red} + k\dot{q} + bc(q - v) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde jsou:

- b ... šířka ozubení
- c ... periodicky proměnná celková měrná tuhost ozubení
- $c_{1,2}^{rs}$... tuhosti podpor ozubených kol 1 a 2, kde $r, s = y, z$
- F_T ... periodicky proměnná výslednice třecích sil v záběru ozubení
- $J_{1,2}$... hmotné momenty setrvačnosti ozubených kol 1 a 2
- k ... součinitel ekvivalentního viskózního tlumení v záběru ozubení
- $k_{1,2}^{rs}$... tlumení podpor ozubených kol 1 a 2, kde $r, s = y, z$
- $m_{1,2}$... hmotnosti ozubených kol 1 a 2
- $r_{b1,2}$... poloměry základních kružnic ozubených kol 1 a 2
- v ... periodicky proměnná nerovnoměrnost převodu pod kvazistatickým zatížením
- $y_{1,2}, z_{1,2}$ a $\varphi_{1,2}$... výchylky ozubených kol 1 a 2, patrné z obr. 2.1.

(2.4)

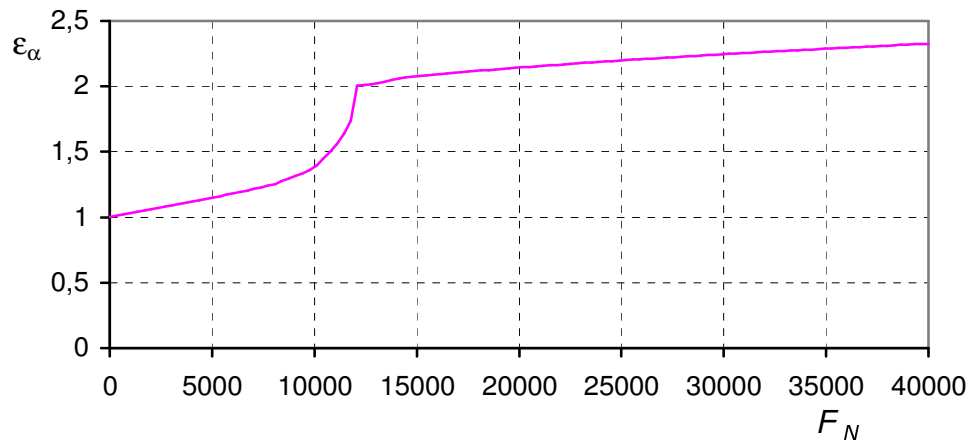
Je ovšem zřejmé, že přesnost provozní nerovnoměrnosti převodu q , získaná řešením soustavy pohybových rovnic (2.3), významně závisí především na přesnosti parametrů c a v , případně i F_T , představujících velmi složité zdroje vnitřního vysokofrekvenčního buzení generovaného v záběrech zubů. (Jelikož řešení výslednice třecích sil F_T je podrobně uvedeno v lit. [12] a bylo též prezentováno v loňském roce na dvou konferencích, F_T již dále nebudeme uvažovat).

Za zmínku jistě stojí, že téměř ve všech dosud publikovaných pracích, ať již zahraničních či tuzemských, parametry c a v jsou uvažovány pouze jako funkce času, tj. ve tvaru $c(t)$ a $v(t)$. Součinitel záběru profilu čelního ozubení ε_α je pak v těchto pracích uvažován konstantní, získaný jen prostým geometrickým výpočtem. Ovšem jak je patrné již z výsledků získaných a uvedených v lit. [10], při modelování dynamických jevů a silových poměrů v záběrech ozubených soukolí taková zjednodušení vedou k nesprávným výpočtovým výsledkům a pro praxi velmi nebezpečným závěrům. Z těchto důvodů byla pozornost autorů zaměřena na přesná řešení složitých parametrů c a v již v minulosti. Podrobněji viz lit. [10]. Cílem těchto prací bylo především odvození a naprogramování početního řešení vlivu zatížení čelního ozubení s přímými zuby na jeho poddajné deformace a zvětšování záběru i mimo záběrovou úsečku, včetně změn ve vnitřním vysokofrekvenčním buzení. A to nakonec i s respektováním vzájemných interakcí s periodickými výrobními úchyly a výškovými modifikacemi evolventních profilů spoluzabírajícího ozubení, které délku záběru ozubení naopak snižují. Toto respektování nelineárních vlastností reálného ozubení se musí samozřejmě významně projevit i ve výsledcích modelování dynamických jevů a silových poměrů v záběrech soukolí, vyvolaných vnitřními zdroji buzení.

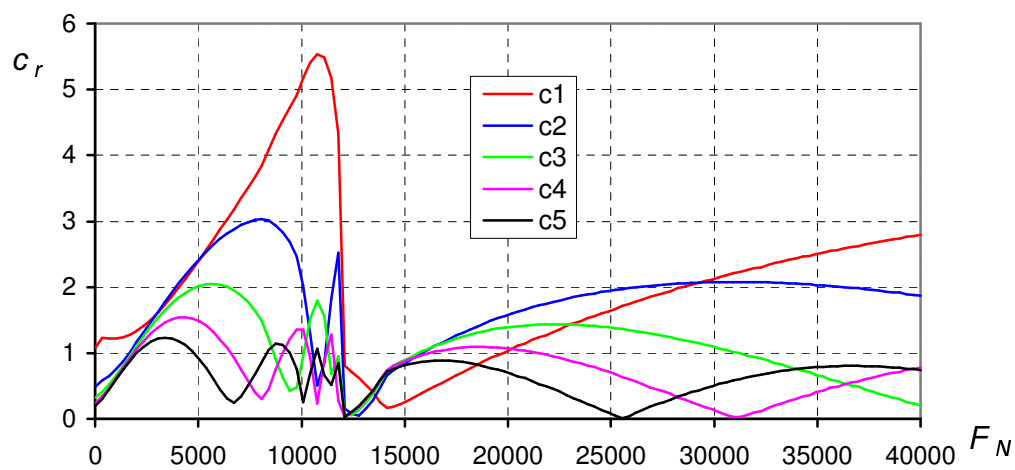
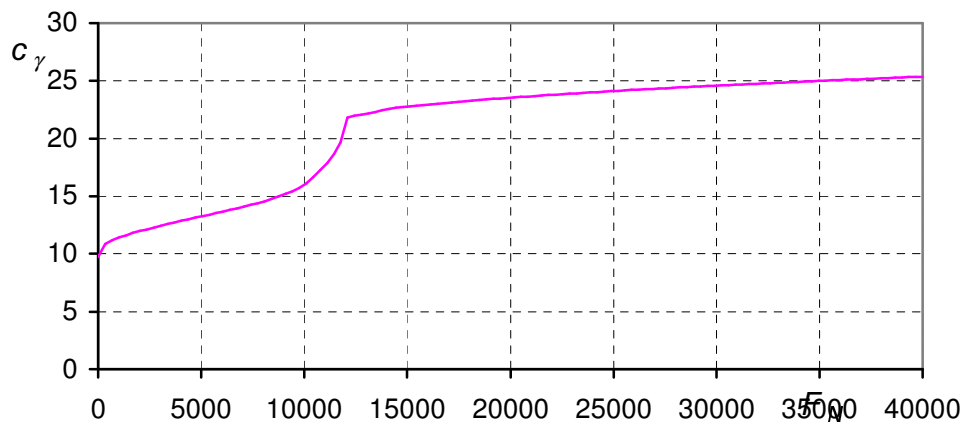
V prvním stadiu nového modelování, blíže popsáno v lit. [6], [7], [9] a [11], byly parametry c a v uvažovány jako složité funkce času t a jmenovité síly F_N zatěžující ozubení, tj. ve tvaru $c(t, F_N)$ a $v(t, F_N)$. A to již s proměnným součinitelem záběru profilu respektujícím vliv výrobních úchylek, výškové modifikace a poddajných deformací kvazistaticky zatíženého ozubení. S ohledem na praktické aplikace docílených výsledků pak byla zavedena transformace parametrů c a v z časové domény na funkce polohy záběru na záběrové přímce ve tvaru $c(x, F_N)$ a $v(x, F_N)$, kde x představuje vzdálenost polohy záběru od pólu záběru a výsledky výpočtů jsou doplňovány údajem otáček hnacího ozubeného kola. Ovšem již z rozboru výpočtových výsledků získaných v prvním stadiu nového modelování bylo s ohledem na značně složité vlastnosti jak součinitele záběru profilu ε_α , tak harmonických složek periodicky proměnné tuhosti ozubení c a periodicky proměnné nerovnoměrnosti převodu pod kvazistatickým zatížením v patrné, že dosud zavedené aproximace $c = c(t, F_N)$, $v = v(t, F_N)$ a $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha(F_N)$ nebudou při vyšších dynamických složkách provozního zatížení ozubení dostatečně přesné.

Proto v současném stadiu nového (zpřesněného) modelování jsou již parametry c a v uvažovány jako vysoce složité nelineární funkce polohy záběru x a provozní síly F_Z zatěžující ozubení, tj. ve tvaru $c(x, F_Z)$ a $v[x, c(x, F_Z), F_N]$, kde F_Z je vysoce složitou funkcí nejen $c(x, F_Z)$ a $v[x, c(x, F_Z), F_N]$, ale i provozních otáček a mnoha dalších konstrukčních parametrů. Jelikož provozní síla F_Z a tím i provozní tuhost ozubení $c(x, F_Z)$ či provozní nepřesnost ozubení pod provozním zatížením $v[x, c(x, F_Z), F_N]$ již nejsou předem známy jako v případě jmenovité síly F_N , současné výpočty je již nezbytné provádět dále naznačeným iteračním postupem, jehož nedílnou součástí musí být ovšem jak výpočty dynamických jevů naznačené v kap. 2, tak výpočty silových poměrů, naznačené v následující kap. 3.

$$\varepsilon_{\alpha} = 2,32 \text{ (geometrický)}$$



$$c = c_{\gamma} + \sum_{r=1}^5 c_r \sin(\omega t + \psi_r)$$



Obr. 2.2 Závislosti součinitele záběru profilu ε_{α} [1], střední měrné tuhosti ozubení c_{γ} [N/μm.mm] a prvních pěti amplitud harmonických složek měrné tuhosti ozubení c_r [N/μm.mm] na síle F_N [N] u ozubení HCRG M602 s výškovou modifikací a s výrobní úchylkou $\Delta = p_{b1} - p_{b2} = 15 \mu\text{m}$

3. Modelování silových poměrů v záběru ozubení

Matematický model pro simulaci silových poměrů v záběru čelního ozubení s přímými zuby jakéhokoli předlohového, planetového nebo diferenciálního převodu, odvozený z rovnováhy sil ve směru záběrové úsečky, lze symbolicky zapsat ve tvaru

$$F_Z = \sum_S F_S \lambda_S \quad (3.1)$$

případně
$$F_Z = b \sum_S \{c_S (q + f_S - \varepsilon_S - \delta_{SZ} - \delta_{SK})\} \lambda_S \quad (3.2)$$

kde vystupují:

F_Z ... celková síla zatěžující ozubení

F_S ... dílčí síla zatěžující s-tý pár spoluzabírajících zubů v záběru

c_S ... měrná tuhost s-tého páru spoluzabírajících zubů

b ... šířka ozubení

q ... relativní výchylka spoluzabírajících ozubených kol vztažena na záběrovou přímku

f_S ... relativní úchylka evolventních profilů s-tého páru spoluzabírajících zubů

ε_S ... relativní modifikace evolventních profilů s-tého páru spoluzabírajících zubů

δ_{SZ} ... vůle mezi profily s-tého páru spoluzabírajících zubů před záběrovou úsečkou

δ_{SK} ... vůle mezi profily s-tého páru spoluzabírajících zubů za záběrovou úsečkou

$\lambda_S = 1$ nebo 0 , v závislosti zda je nebo není s-tý pár zubů v záběru

při čemž $s = -1, 0, 1$ v případě LCRG (ozubení se součinitelem záběru profilu $\varepsilon_\varepsilon < 2$)

nebo $s = -2, -1, 0, 1, 2$ v případě HCRG (ozubení se součinitelem záběru profilu $\varepsilon_\varepsilon > 2$).

Ze zápisů (3.1) a (3.2) je patrné, že pro relativní výchylku q , společnou pro všechny současně spoluzabírající páry zubů, platí vztah

$$q = \frac{F_S}{bc_S} - f_S + \varepsilon_S + \delta_{SZ} + \delta_{SK} \quad (3.3)$$

případně
$$q = \frac{F_Z - b \sum_S \{c_S (f_S - \varepsilon_S - \delta_{SZ} - \delta_{SK})\} \lambda_S}{bc} \quad (3.4)$$

kde: $c = \sum_S c_S \lambda_S = E \sum_S p_S^{-1} \lambda_S$... je celková měrná tuhost spoluzabírajícího ozubení, (3.5)

E ... modul pružnosti materiálu a p_S ... bezrozměrná poddajnost s-tého páru zubů.

Ze vztahů (3.2) a (3.3) je rovněž patrné, že pro dílčí sílu F_S , zatěžující s-tý pár spoluzabírajících zubů v záběru, platí:

$$F_S = b \{c_S (q + f_S - \varepsilon_S - \delta_{SZ} - \delta_{SK})\} \lambda_S \quad (3.6)$$

případně
$$F_S = \left\{ \frac{c_S}{c} \left[F_Z - b \sum_J \{c_J (f_S - f_J - \varepsilon_S + \varepsilon_J - \delta_{SZ} + \delta_{JZ} - \delta_{SK} + \delta_{JK})\} \lambda_J \right] \right\} \lambda_S \quad (3.7)$$

kde $J = s-2, s-1, s, s+1, s+2$ pro HCRG, zatímco $J = s-1, s, s+1$ pro LCRG.

Ve speciálním případě, kdy celková síla zatěžující ozubení bude kvazistatická a místo původního značení F_Z , F_S a q ve výpočtových vztazích (3.3), (3.4), (3.6) a (3.7) použijeme značení F_N , F_{S0} a q , celkovou sílu v záběru ozubení F_Z , definovanou původně velmi složitým zápisem (3.2), můžeme vyjádřit formálně jednoduchým zápisem ve tvaru

$$F_Z = F_N + bc(q - v). \quad (3.8)$$

Ovšem přesný výpočet parametru v pro reálné ozubení, využívající upravený vztah (3.4), případně upravené vztahy (3.3) a (3.7), podobně jako přesný výpočet parametru c reálného ozubení, využívající symbolický vztah (3.5), vyžaduje náročné a složité procedury, postupně odvozené, ověřené a podrobně popsane v lit. [3], [4],[5] a [10]. Tyto výpočty, vycházející z výkresových a výrobních podkladů řešeného čelního ozubení s přímými zuby již respektují proměnnost jak součinitele záběru profilu ε_α , tak vnitřních zdrojů periodického buzení v a c . A to jak pro ozubení LCRG tak pro ozubení HCRG, včetně možností optimalizovat relativní výškové modifikace evolventních profilů spoluzabírajících boků zubů. Ovšem podle výše uvedených vztahů jen v závislosti na definovaném jmenovitém zatížení ozubení F_N .

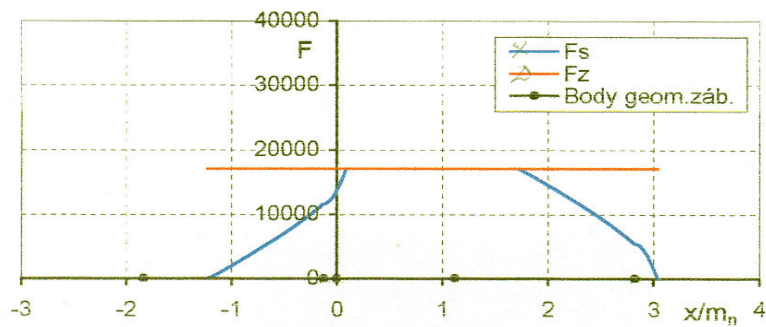
Aby bylo možno modelování dynamických jevů a silových poměrů v reálném ozubeném soukolí dále zpřesnit respektováním nelineárních vlastností c a v v závislosti na předem neznámém provozním zatížení F_Z , tj. ve tvaru $c(x, F_Z)$ a $v(x, c(x, F_Z), F_N)$, kde ovšem F_Z je složitou funkcí nejen $c(x, F_Z)$ a $v(x, c(x, F_Z), F_N)$ ale i provozních otáček, výpočty je nezbytné provádět vhodným iteračním postupem. Pro výpočty provozní nerovnoměrnosti převodu q a nepřesnosti ozubení pod jmenovitým zatížením v , dosud vyjádřené zápisem (3.4) a upraveným zápisem (3.4) pro kvazistatické zatížení, byly tyto zápisy s ohledem na obecně k-tý iterační výpočtový krok (kde $k = 0, 1, 2, \dots$) upraveny tak, že iterované parametry q , v , c , c_s a F_Z jsou zapsány např. s horním indexem (k), označujícím číselné pořadí provedeného iteračního výpočtu. Přitom výchozí (nultý iterační) výpočet je prováděn s využitím neupravených vztahů (3.4), (3.5) a (3.9), tj. s $c(x, F_N)$ a $v(x, F_N)$.

4. Ukázky ověřovacích výpočtů

Aby bylo možno ověřit jak nové výpočtové algoritmy tak programované postupy pro zpřesněné modelování dynamických jevů i provozního zatížení jak jednotlivých párů zubů tak celého čelního ozubení, byly provedeny první ověřovací výpočty reálného ozubení. Ukázky výsledků jednoho z prvních iteračních výpočtů, provedeného pro modifikované ozubení LCRG druhého převodového stupně reduktoru leteckého turbovrtulového motoru M 602 (blíže viz lit. [2]), vyrobeného s částečnou výškovou modifikací (blíže viz lit. [3]) a s výrobními úchylkami $\Delta = (p_{b1} - p_{b2}) = 10 \mu\text{m}$, jsou pro 12 000 ot/min pastorku uvedeny na obr.4.1 a 4.2. Na obr. 4.1 jsou uvedeny postupně odshora dolů výsledky výpočtů nulté iterace:

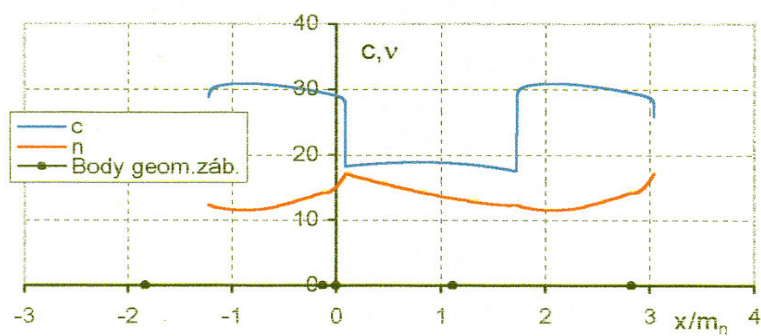
- a) výchozí kvazistatické zatížení ozubení F_Z a odpovídající zatížení jednoho páru zubů F_S
- b) pro výše uvedené zatížení odpovídající tuhost ozubení c a nerovnoměrnost převodu v
- c) řešením rovnic (2.3) vypočtená provozní nerovnoměrnost převodu q při 12 000 ot/min.
- d) vypočtené provozní zatížení ozubení F_Z a odpovídající zatížení zubů F_S při 12 000 ot/min.

Na obr. 4.2 jsou uvedeny postupně odshora dolů výsledky třetí iterace s výchozím zatížením F_Z a F_S , totožným s výsledky výpočtů třetí iterace. (Pro porovnání rozdílů mezi geometrickým a současným výpočtem jsou počátky a konce záběru určené geometrickým výpočtem označeny plnými kroužky. Z obr. 4.3 je patrna konvergence provedených výpočtů.



$$c = c_\gamma + \sum c_r \sin(r\omega t + \psi_r)$$

$$v = v_\gamma + \sum v_s \sin(s\omega t + \phi_s)$$



23.737

7.297 0.198

1.754 -0.986

2.046 0.454

1.309 -0.763

0.877 0.741

13.547

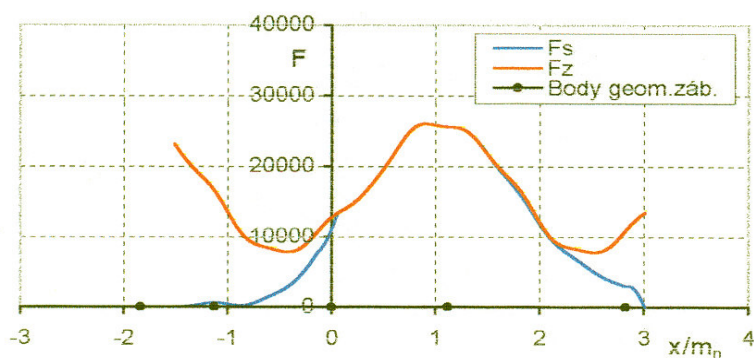
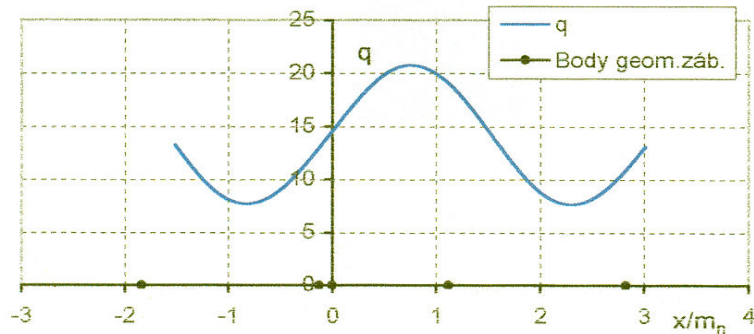
2.1 -1.862

0.653 1.905

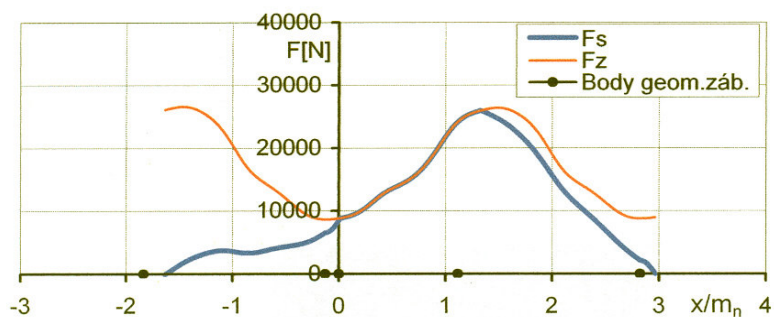
0.194 -1.13

0.228 2.076

0.147 -0.372

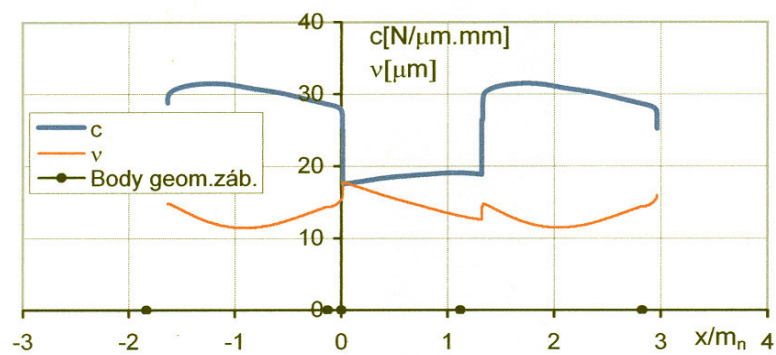


Obr.4.1 Výsledky výpočtů nulté iterace pro ozubení LCRG s modifikací, $F_N=17035$ N, $\Delta=10$ μ m, $n_1=12000$ ot/min

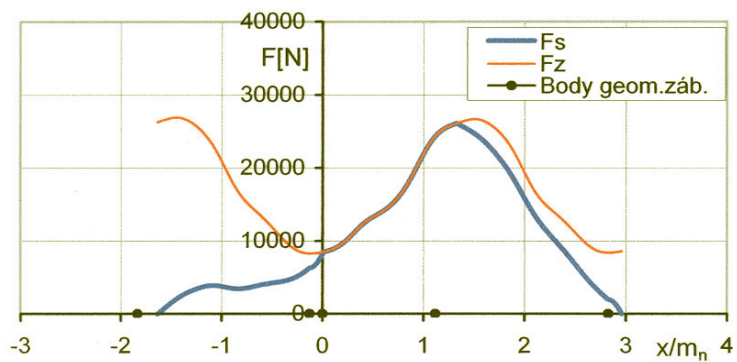
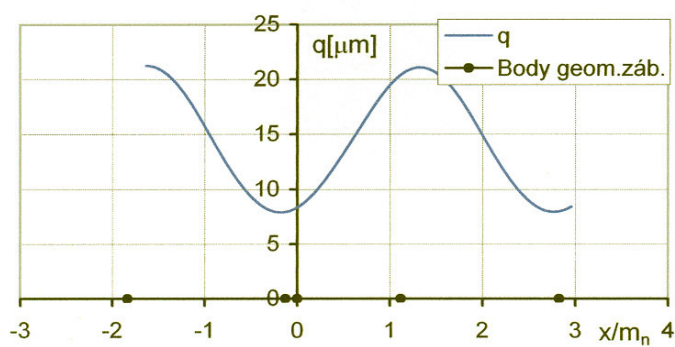


$$c = c_\gamma + \sum_r c_r \sin(r\omega t + \psi_r)$$

$$v = v_\gamma + \sum_s v_s \sin(s\omega t + \phi_s)$$

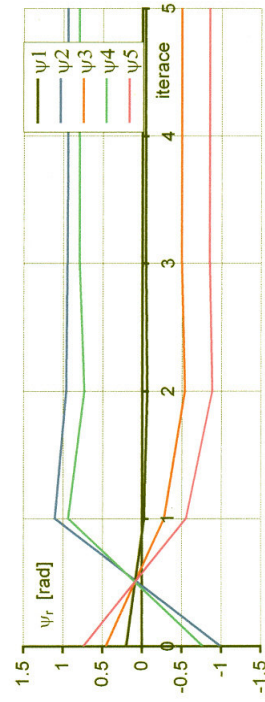
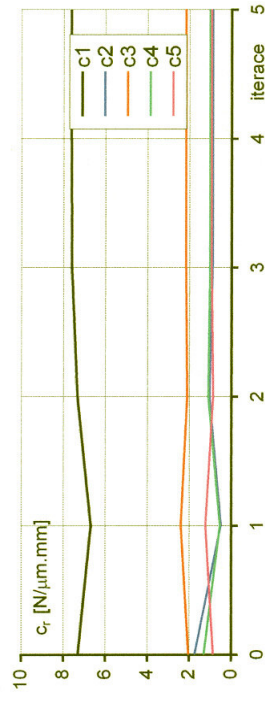
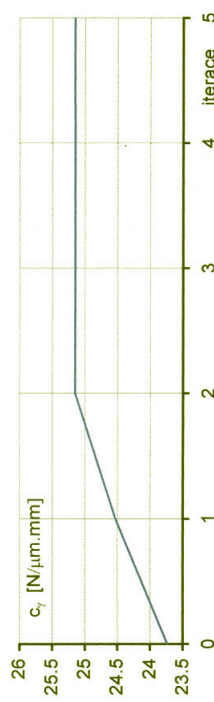


25,152	
7,6	-0,045
0,909	0,95
2,172	-0,497
1,023	0,794
0,954	-0,849
13,784	
2,081	-2,743
0,99	0,406
0,265	1,595
0,362	-0,397
0,271	1,016

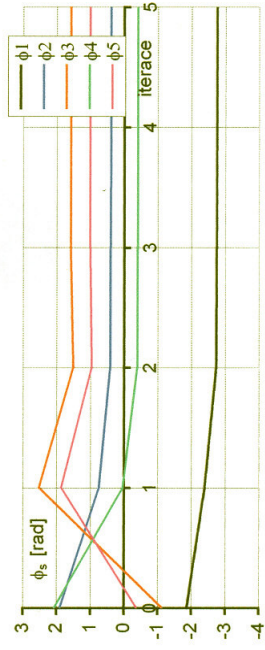
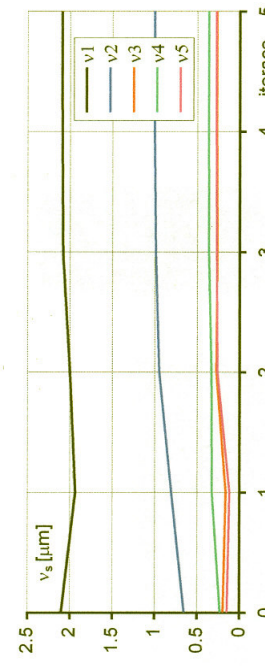
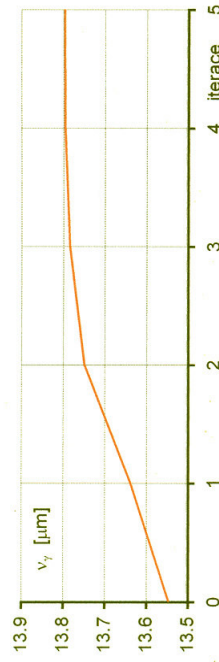


Obr.4.2 Výsledky výpočtů třetí iterace pro ozubení LCRG s modifikací, $F_N=17035$ N, $\Delta=10$ μ m, $n_1=12000$ ot/min

$$c = c_{\gamma} + \sum_r c_r \sin(r\omega t + \psi_r)$$



$$v = v_{\gamma} + \sum_s v_s \sin(s\omega t + \phi_s)$$



Obr.4.3 Závislosti koeficientů Fourierových řad aproximujících c a v na počtu iterací

5. Shrnutí a závěr

V příspěvku je uvedeno zpřesněné modelování dynamických jevů a silových poměrů, které se vyskytují v dynamických soustavách tvořených jedním párem ozubených kol s moderním čelním ozubením s přímými zuby, uložených na isotropně či neisotropně poddajných a tlumených podporách, což představuje výchozí stavební prvek jakéhokoliv předlohového, planetového nebo diferenciálního převodu.

U nově odvozeného zpřesněného modelu jsou zdroje vnitřního periodického buzení záběrovou tuhostí c a nerovnoměrností převodu v již uvažovány a počítány jako vysoce složité nelineární funkce polohy záběru x a provozní síly F_Z zatěžující ozubení, tj. ve tvaru $c(x, F_Z)$ a $v[x, c(x, F_Z), F_N]$, kde F_Z je vysoce složitou funkcí nejen $c(x, F_Z)$ a $v[x, c(x, F_Z), F_N]$ ale i provozních otáček hnacího kola. Jelikož provozní síla F_Z a tím i provozní tuhost ozubení $c(x, F_Z)$ či provozní nepřesnost ozubení pod provozním zatížením $v[x, c(x, F_Z), F_N]$ nejsou předem známy (jako v případě jmenovité síly F_N), výpočty je nezbytné provádět iteračním postupem.

6. Literatura

- [1] DOLEŽAL Z.: Řešení planetových vysokootáčkových převodů metodou komplexních dynamických poddajností. Zpráva VZLÚ V-1319/78
- [2] DOLEŽAL Z.: Výpočty ozubení nové varianty reduktoru M 602. Zpráva VZLÚ R-2652/91.
- [3] DOLEŽAL Z.: Vztahy pro výpočty a kreslení progresivních tvarů čelních zubů a ozubení. Zpráva VZLÚ R-2683/92
- [4] DOLEŽAL Z.: Záběrová poddajnost a tuhost moderního čelního ozubení. Zpráva VZLÚ R-2684/92.
- [5] DOLEŽAL Z.: Analýza buzení generovaného v záběru moderního čelního ozubení. Zpráva VZLÚ-TURBOMOTOR s.r.o. V-003/94
- [6] DOLEŽAL Z.: Modelování dynamických jevů v záběru moderního čelního ozubení. Zpráva VZLÚ-TURBOMOTOR s.r.o. V-018/95
- [7] DOLEŽAL Z.: Modelování silně nelineárních jevů v záběru čelního ozubení. Zpráva VZLÚ-TURBOMOTOR s.r.o. V-007/96
- [8] DOLEŽAL Z.: Vliv dynamického zatížení na únosnost přímých zubů moderního vysokootáčkového ozubení. Zpráva Walter a.s. V-007/97
- [9] DOLEŽAL Z.: Modelování kvazistatických a dynamických jevů v záběrech soukolí s moderním čelním ozubením. Zpráva Walter a.s. V-007/98
- [10] DOLEŽAL Z.: Vliv zatížení čelního ozubení s přímými zuby na zdroje jeho vnitřního vysokofrekvenčního buzení. Zpráva VZLÚ V-1704/2000
- [11] DOLEŽAL Z.: Modelování provozního zatížení přímých zubů moderního čelního vysokootáčkového ozubení. Zpráva VZLÚ V-1732/01
- [12] DOLEŽAL Z.: Modelování T-EHD mazání a tření v záběrech přímých zubů moderního čelního ozubení. Zpráva VZLÚ V-1759/02

Práce byla řešena s podporou projektu AV ČR: „Program podpory cíleného výzkumu a vývoje“, identifikační kód - IBS2076353, název dílčího projektu: „Metody modelování, analýzy a zákonitostí pohybu v dynamice slabě a silně nelineárních parametrických soustav s děleným tokem výkonu.“