National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2003
Svratka, Czech Republic, May 12 – 15, 2003

paper no.
314

PENALTY FORMULATION OF THE METHOD OF FREE HEXAGONS

P. Procházka*, **M. Kugblenu***

Summary: *The method of free hexagons belongs to discrete element methods. There are plenty of advantages in comparison with other numerical approaches: the hexagons can cover the whole domain describing the trial structure so that standard mechanical properties can be introduced in the computation. Geomechanical or other material properties, such as materials along contacts, fracture mechanic properties and others can be involved in the model. Von Mises-Huber-Hencky hypothesis is applied inside the hexagons.*

1. Úvod

Problémy mechaniky, které vedou na porušení, trhlinatost, lokalizaci napětí a na podobné problémy (které se vyskytují hlavně v geomechanice), se v současné době stále více používají diskrétní metody obecně spočívající v náhradě kontinua diskontinuem. Mezi známé diskrétní metody patří UDEC, PFC, statický PFC. UDEC je velmi sofistikovaná metoda, která však je vhodná prakticky výhradně na úlohy s ortogonálně anizotropním prostředím. PFC nahrazuje kontinuum kuličkami ve 3D nebo disky ve 2D. Vychází se z dynamické rovnováhy, kdežto v případě statického PFC je výchozí statická rovnováha. Problém u posledních dvou jmenovaných metod spočívá v určení materiálových konstant, kterými jsou vždy péra, spojující buď dva sousední prvky, nebo prvek a stěnu. Je velmi problémové určit vlastnosti per pomocí vlastností kontinua, které lze získat z laboratorních zkoušek. V našem případě se budeme zabývat volnými šestiúhelníky, které jsou spojeny množinou per. Vnitřky šestiúhelníků podléhají nelineárním změnám, a to hypotéze Mises-Huber-Hencky. Podél hranic mezi prvky je uvažována zobecněná Mohr-Coulombova hypotéza s vyloučením tahů, které jsou větší než některé dané číslo (dovolený tah).

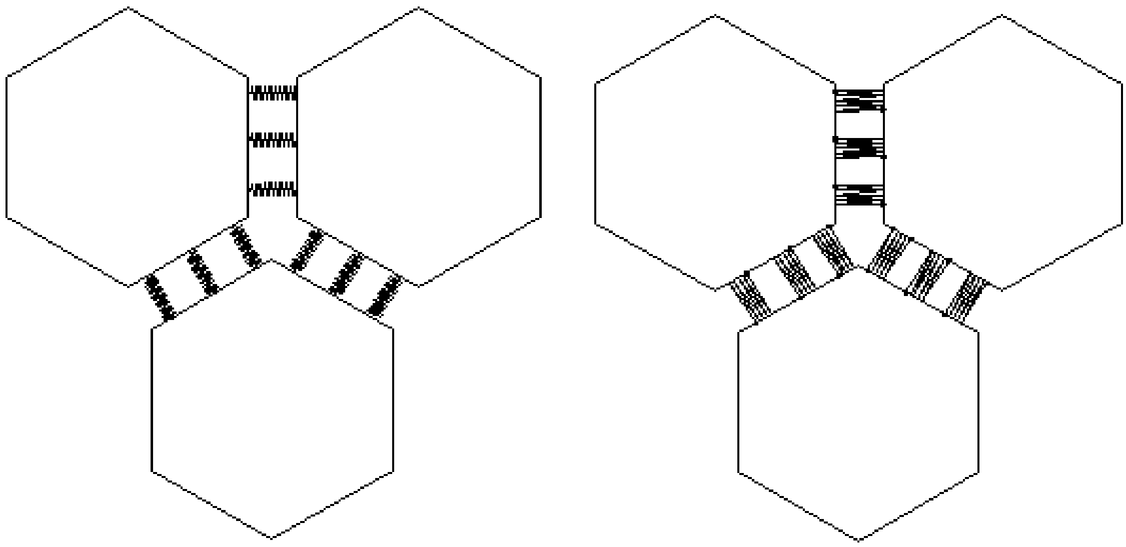
2. Základní úvahy

Nejprve se soustředíme na formulaci problému. Definiční oblast Ω pokryjeme disjunktními šestiúhelníkovými prvky, které jsou a priori spojeny pérovou vazbou. Jedná se zde o představu, která je pouze formální a umožňuje nám fyzikální náhled do problému. Rozlišujeme dva typy pér, a to ve směrech normály ke hranici šestiúhelníku a v tangenciálním směru. Jestliže přistoupíme k předpokladu o lineární závislosti mezi silami a rozdíly v

*Prof. Ing. RNDr. Petr Procházka, DrSc., Ing. Michael Kugblenu, ČVUT v Praze, Fakulta stavební, katedra stavební mechaniky, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, tel.: 224354480, e-mail: petrp@fsv.cvut.cz

posunutích na společné hranici mezi dvěma sousedními prvky, pérové konstanty budou koeficientem úměrnosti. Ve variační formulaci budou hrát roli penalt ve Fischerově kontaktní úloze.

Hexagonální částice jsou studovány při různých kontaktních podmínkách. V našem případě jsou zahrnuty následující podmínky: Zobecněná Mohr-Coulombova hypotéza s vyloučením nepřípustných tahů podél kontaktu mezi částicemi. Výše uvedená hypotéza je realizována pomocí rozdílu normálových a tečných posuvů a povrchových sil na hranách sousedních prvků. Obě tyto veličiny jsou vázány lineárním vztahem s koeficientem úměrnosti, kterým jsou pérové konstanty. Smysl zavedení pér je patrný z obrázku 1, kde nejprve je ukázán systém pér v normálovém směru a poté ve směru tečném.



Obr. 1 Systém pér vázající sousední prvky.

3. Výpočtový model

Uvažujme nyní jediný šestiúhelník (popsaný definiční oblastí Ω s hranicí Γ). Vazby na sousední prvky jsou ukázány na obr. 1. V každém šestiúhelníku se materiál chová plasticky. Pro popis chování jednotlivých prvků použijeme metodu okrajových prvků. Jelikož vyjádření plastických deformací v této metodě vede na příliš vysoké singularity okrajových integrálů, použijeme náhradní postup přes tzv. Eshelbyho síly. Touto cestou lze rozdělit pružné lineární vlastnosti a plastické vlastnosti, které jsou popsány Eshelbyho silami na povrchu prvků. Základní rovnice řešící lineární problém má tvar (Brož & Procházka, 1995):

$$\sum_{l=1}^{2} c_{kl}(\xi)u_l(\xi) = \sum_{s=1}^{6}(\sum_{i=1}^{2}(\int_{\Gamma_s} p_i(x)u_{ik}^*(x,\xi)dx -$$

$$- \int_{\Gamma_s} u_i(x)p_{ik}^*(x,\xi)dx) + \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega} b_i(x)u_{ik}^*(x,\xi)dx), k = 1, 2, \qquad (1)$$

kde b_i jsou složky objemových sil, Γ_s jsou hrany (úsečky) okrajových prvků, ξ je bod pozorovatele, x je integrační bod, u_i jsou složky vektoru posuvů, které jsou definovány i uvnitř oblasti prvku, p_i jsou složky povrchových sil, c_{kl} je matice, jejíž hodnoty jsou určeny podle polohy bodu pozorovatele. Hodnoty s hvězdičkou jsou daná jádra integrálních rovnic. Například platí (Brož & Procházka, 1995):

$$u^*_{ik} = A(M\delta_{ik}(\log r - \frac{\bar{x}_i \bar{x}_k}{r^2}),\, p^*_{ik} = -2A\frac{\mu}{r^2}(k(n_k \bar{x}_i - n_i \bar{x}_k) - (k\delta_{ik} + \frac{2\bar{x}_i \bar{x}_k}{r^2})\bar{x}_j n_j),$$

kde

$$A = -(\lambda+\mu)/4\pi\mu(\lambda+2\mu),\ M = (\lambda+3\mu)/(\lambda+\mu),\ k = \mu/(\lambda+\mu),\ \bar{x}_i = x_i - \xi_i,$$

$r^2 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2$, a λ a μ jsou Lamého materiálové konstanty.

Předpokládejme rovnoměrné zatížení okrajových veličin (posuvy $u_i(x)$ a povrchové síly $p_i(x), i = 1,2$), a objemové síly b_i jsou rovnoměrné na definiční oblasti Ω. Umístíme-li postupně body pozorovatele ξ do bodů x_s, které jsou středy okrajových úseček hexagonálních prvků obdržíme zjednodušenou verzi (1):

$$\frac{1}{2}u^s_k = \sum_{s=1}^{6}(\sum_{i=1}^{2}(p^s_i \int_{\Gamma_s} u^*_{ik}(x,\xi_s)dx -$$

$$- u^s_i \int_{\Gamma_s} p^*_{ik}(x,\xi)dx) + \sum_{i=1}^{2} b^s_i \int_{\Omega} u^*_{ik}(x,\xi)dx), k = 1, 2, \qquad (2)$$

kde u^s_i a p^s_i jsou hodnoty odpovídajících veličin umístěných v ξ_s, s = 1,...,6, tj., $u^s_i = u_i(\xi_s)$ a $p^s_i = p_i(\xi_s)$. Navíc, vektor vlivu objemových sil na okrajových úsečkách jsou označeny $b_s = (\gamma_1, \gamma_2)$, s = 1,...6, a

$$\gamma^s_k = \sum_{i=1}^{2} b^s_i \int_{\Omega} u^*_{ik}(x,\xi_s)d\Gamma(x), \qquad k = 1,2.$$

Integrály mohou být počítány explicite nebo numerickou integrací.

Zaveďme vektory α_s, β_s, s = 1,...,6, a taky u a p takto:

$$\alpha_s = \begin{pmatrix} u^s_1 \\ u^s_2 \end{pmatrix}, \quad \beta_s = \begin{pmatrix} p^s_1 \\ p^s_2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix}, \ \mathrm{p} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{pmatrix}, \ \mathrm{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_k^s = \sum_{i=1}^{2}(-u_i^s \int_{\Gamma_s} p_{ik}^*(x,\xi_s)dx), \qquad \beta_k^s = \sum_{i=1}^{2}(p_i^s \int_{\Gamma_s} u_{ik}^*(x,\xi_s)dx),$$

S užitím této notace vztahy na prvcích (2) mohou být zapsány takto:

$$\mathrm{Au=Bp+b} \tag{3}$$

kde A a B jsou (12 * 12) matice, jejichž složky jsou singulární integrály přes hraniční úsečky. Matice A je obecně singulární a matice B je regulární. Tento fakt umožňuje přepsat rovnice (3) do tvaru:

$$\mathrm{K\ u = p + V,\ \ K = B^{-1}\ A,\ V = B^{-1}\ b} \tag{4}$$

kde matice tuhosti K je jiná, než ta co se vyskytuje v aplikacích metody konečných prvků., V je vektor objemových sil jejichž vliv je koncentrován na hranici šestiúhelníků (přesněji do bodu ξ). Tímto způsobem je problém v diskrétní formě podobný MKP.

Podél sousedících hraničních úseček platí (p_i^μ jsou Eshelbyho síly):

$$p_i^+ + p_i^- = (p_i^\mu)^+ + (p_i^\mu)^-, \tag{5}$$

kde horní index plus znamená zprava a minus zleva (nejvíc dva prvky mohou být v kontaktu).

Použitím vztahu z (4) a (5), obdržíme dvakrát více neznámých rovnice, protože žádná vazba mezi prvkami ještě není zavedena. Rovnice (5) musí být doplněna vazbou typu:

$$k_i(u_i^- - u_i^+) = p_i\,. \tag{6}$$

Tyto posledně zmíněné podmínky jsou podmínky typu penaltových formulací, jelikož jestliže k_i jsou dostatečně velká, rozdělení posuvů je spojité, posuvy zleva a zprava jsou stejné. Tyto podmínky mohou být lokálně porušeny z důvodů kontaktních podmínek, které budou diskutovány dále v tomto textu.

Diskretizace z předchozího textu vede na nelineární soustavy algebraických rovnic, které jsou řešeny over-relaxation iterační procedurou

Pro posuvy v oblasti prvku v každém elementu Ω platí:

$$u_k(\xi_s) = \sum_{s=1}^{6}(\sum_{i=1}^{2}(p_i^s \int_{\Gamma_s} u_{ik}^*(x,\xi_s)dx -$$

$$- u_i^s \int_{\Gamma_s} p_{ik}^*(x,\xi)dx) + \sum_{i=1}^{2} b_i^s \int_{\Omega} u_{ik}^*(x,\xi)dx), k = 1, 2, \tag{7}$$

kde okrajové posuvy a povrchové síly jsou známy z předchozích výpočtů. Užitím kinematických rovnic a Hookeova zákona dostaneme vnitřní napětí z (7). Nyní již nehrozí nebezpečí singularit, neboť body x a ξ_s se nikdy nesejdou (bod x leží v oblasti Ω zatímco ξ_s leží na hranici Γ pro všechna přípustná s).

4. Formulace kontaktního problému

Připomeňme, že posuvy jsou popsány vektorovou funkcí u = (u_1,u_2) proměnných x = (x_1,x_2). Pole povrchových sil na hranicích částic je označeno buď p = (p_1,p_2), nebo po projekci do směrů normály a tečny p = (p_n,p_t). Podobný výsledek lze odvodit pro posuvy u = (u_n,u_t). Uvažujeme teorii malých deformací.. Geometrické podmínky lze vyjádřit pro dva sousední prvky podél jejich společných hranic takto:

$$[u]_n^k = u_n^{k,c} - u_n^{k,a} \leq 0 \text{ na } \Gamma_C^k \,, \tag{8}$$

kde Γ_C^k, k = 1,...,n jsou hranice mezi sousedními prvky, $u_n^{k,\alpha}$ je normálový posuv běžného prvku $\alpha = c$ a $\alpha = a$ patří k sousednímu prvku, v obou případech na běžné společné hranici, Γ_C^k, k prochází čísla všech společných stran prvků, n je celkový počet společných hran hexagonů.

Nechť k_n^k je pérová konstanta v normálovém směru a k_n^k je pérová konstanta v tečném směru na hranici mezi částicemi se společnou hranicí Γ_C^k. Pak v pružné oblasti platí $p_n^k = k_n^k [u]_n^k$ a $p_t^k = k_t^k [u]_t^k$. Označme

$$K = (u \in V, (p_n^+)^k \geq p_n^k = k_n^k [u]_n^k, \quad \text{jestliže } (p_n^+)^k \leq p_n^k \quad \text{potom} \quad p_n^k = 0$$
$$k_t^k \,|\, [u]_t^k \leq c^k \quad \text{na} \quad \Gamma_C^k, \ \ k = 1,\ldots,n \ ), \qquad [u]_t^k = u_t^{k,c} - u_t^{k,a} \,.$$

kde $u_t^{k,\alpha}$ je tečný posuv na straně k, $(p_n^+)^k$ popisuje dovolené napětí v tahu, c^k je smykové dovolené napětí, V je množina posuvů, které splňují kinematické podmínky na hranici a podmínku (8). Jestliže $p_n^k = 0$ pak množina K je kužel dovolených posuvů splňujících geomertické podmínky na hranici a kontaktní podmínky. Toto vše je platné pro křehké materiály. Jestliže materiál je pružně-plastický, pak kužel K se změní takto:

$$K = (u \in V, (p_n^+)^k \geq p_n^k = k_n^k [u]_n^k, \quad \text{jestliže } (p_n^+)^k \leq p_n^k \quad \text{pak} \quad p_n^k = 0$$
$$k_t^k \,|\, [u]_t^k \,| \leq c^k \chi(p_n^k) - p_n^k \tan\phi \quad \text{na} \quad \Gamma_C^k, \ \ k = 1,\ldots,n \ ), \qquad [u]_t^k = u_t^{k,c} - u_t^{k,a} \,.$$

kde ϕ je úhel vnitřního tření, p_n^k je normálová povrchová síla na hraně k, χ je zobecněná Heavisideova funkce, která je rovna jedné pro negativní argumenty a nule pro ostatní případy.

Z výše definovaných prostorů lze vyvodit, že $p_n^k, [u]_n^k$, a $p_t^k, [u]_t^k$ se chovají lineárně až do určitých mezí, které jsou dány povahou materiálu.

Celková energie J systému je:

$$J(u) = \frac{1}{2}\, a(u,u) - \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_C} (k_n^k ([u]_n^k)^2) d\Gamma - \int_{\Omega} b^T u d\Omega$$

$$a(u,u) = \int_{\Omega_0} \varepsilon^T C \varepsilon d\Omega_0, \varepsilon = (\frac{\partial u_n}{\partial x_n}, \frac{\partial u_t}{\partial x_t}, \frac{1}{2}(\frac{\partial u_t}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_t})). \tag{9}$$

kde ε je tensor deformace, C je matice tuhosti částice, T označuje transpozici, Ω_0 je součet podoblastí oblasti Ω, tj. šestiúhelníků, b je vektor objemových sil.

Poznamenejme, že pérová tuhost k_n^k hraje roli penalty. Připoměňme, že problém může být formulován též pomocí Lagrangeových multiplikátorů, a vede pak na smíšenou formulaci. Poslední případ je vhodný pro malý počet hraničních proměnných.

5. Pružně-plastické chování materiálu částic

Nyní stručně popíšeme pružně-plastické chování materiálu částic, které je použito v tomto příspěvku. Hranice mezi pružným a plastickým stavem je v prostoru napětí vymezena plochou plasticity, popsanou skalární funkcí – podmínkou plasticity

$$f(\sigma, k) = 0$$

Složky vektoru $k = \{k_1, k_2, ...\}^T$ jsou jisté materiálové konstanty.

Jednou z nejužitečnějších je Drucker-Prager podmínka s materiálovou konstantou $k_1 = k$

$$f(\sigma, k) = \sqrt{J_2} + \Psi(\sigma_v) - k = 0, \tag{10}$$

v níž při použiti sumačního pravidla

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1}{3} \tag{11}$$

je střední napětí, které je úměrné prvnímu invariantu tenzoru napětí σ_{ij}, a

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{2}\left[s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2\left(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2\right)\right] \tag{12}$$

je druhý invariant deviátoru tenzoru napětí $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_v \delta_{ij}$, kde δ_{ij} je izotropní tenzor (Kroneckerovo delta). Konečně Ψ je empirická, monotónně rostouci funkce (často se klade $\Psi = \alpha I_1$) a k, α jsou kladné materiálové konstanty. Rovnicí () je v prostoru hlavních napětí popsána rotační plocha, jejíž osou je hydrostatická osa $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. V našem případě použijeme Mise-Huber-Hencky podmínky (M-H-H) jako speciální speciálního tvaru Druckera-Pragera.

$$f(\sigma, k) = \sqrt{J_2} - k = 0 \tag{13}$$

Zaveďme ekvivalentní napětí

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + 6\left(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2\right) \right]^{1/2} \end{aligned} \tag{14}$$

Pokud materiál vykazuje zpevnění, plocha popsaná rovnicí() se zvětšuje v závislosti na historii zatížení, což vystihují parametry zpevnění $k = k(t)$.

Diferenciace funkce *f* dojdeme k podmínce konsistence

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k_k} dk_k \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T d\sigma + \left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)^T dk = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

kde

$$\frac{\partial f}{d\sigma} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \right\}^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial k} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial k_1}, \frac{\partial f}{\partial k_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial k_k} \right\}^T$$

Z tvaru rovnice $\left(\partial f / \partial k \right)^T dk < 0$ je vidět, že materiálové konstanty lze zvolit znaménkově tak, aby při zatěžování (). Na základě podmínky konsistence lze pak definovat kritérium zatežování.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T d\sigma = d\sigma^T \frac{\partial f}{\partial \sigma} \begin{cases} > 0 & \text{plasticke zatezovani} \\ = 0 & \text{neutralni zatezovani} \\ < 0 & \text{pruzne odtezovani} \end{cases}$$

Pro materiál, který lze definovat ve smyslu Druckerova postulátu pro $d\sigma^T d\varepsilon_p > 0$ jako stabilní, lze napsat v souladu s kritériem zatěžování úměru $d\sigma^T d\varepsilon_p = d\lambda d\sigma^T \partial f / \partial\sigma, d\lambda > 0$. Jejím zřejmým důsledkem je zákon plastického přetváření přidružený k podmínce plasticity (asociovaný)

$$d\varepsilon_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial\sigma} \tag{16}$$

Rovnice (16) je nazývána podmínkou normality, neboť ukazuje, že vektor přírůstku plastické deformace je kolmý k ploše $f = 0$. Podmínka plastcity má tak význam plastického potenciálu.

Parametr $d\lambda$ vyloučíme pomocí podmínky konzistence (15), kterou k tomuto účelu zapíšeme v Melanově tvaru

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)^T d\sigma - Hd\lambda = 0 \tag{17}$$

kde

$$H = \left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)^T \frac{dk}{d\lambda} \qquad \left(\text{pro } \left(\frac{\partial f}{d\sigma}\right)^T d\sigma \geq 0\right)$$

je modul plastického zpevnění.

Dále platí:

$$d\sigma = D_e\left(d\varepsilon - d\varepsilon_p\right) = D_e\left(d\varepsilon - d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right), \tag{18}$$

kde D_e je matice tuhosti pružného materiálu.

Po dosazení výrazu pro $d\sigma$ z (18) do (17) obdržíme rovnici pro $d\lambda$ a opětovným dosazením do (18) najdeme konečné vyádření konstitutivního vztahu

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon \tag{19}$$

kde

$$D_{ep} = D_e - \frac{D_e\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)^T D_e}{\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)^T D_e\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right) + H}$$

je matice tuhosti pružnoplastického materiálu(asociovaný zákon plastického přetváření).

$$H=\frac{dk}{d\lambda},\quad \beta=\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma_v}$$

(β je parametr materiálové dilatance a vnitřního tření) vychazí

$$D_{ep}=D_e-\frac{\left(\frac{G}{\tau}s+K\beta m\right)\left(\frac{G}{\tau}s+K\beta m\right)^T}{G+K\beta\beta+H}$$

Ve vzorci značí $\overline{\tau}=\sqrt{J_2}$ intenzitu napětí, G je modul pružnosti ve smyku a

$$K=\frac{E}{3(1-2\nu)}$$

je modul objemové pružnosti. Zavedené vektory mají následující význam

$$s=\left\{s_x,s_y,s_z,\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz}\right\}^T,\qquad m=\left\{1,1,1,0,0,0\right\}^T$$

V případě podmínky M-H-H položíme $\beta=0$ a H = 0.

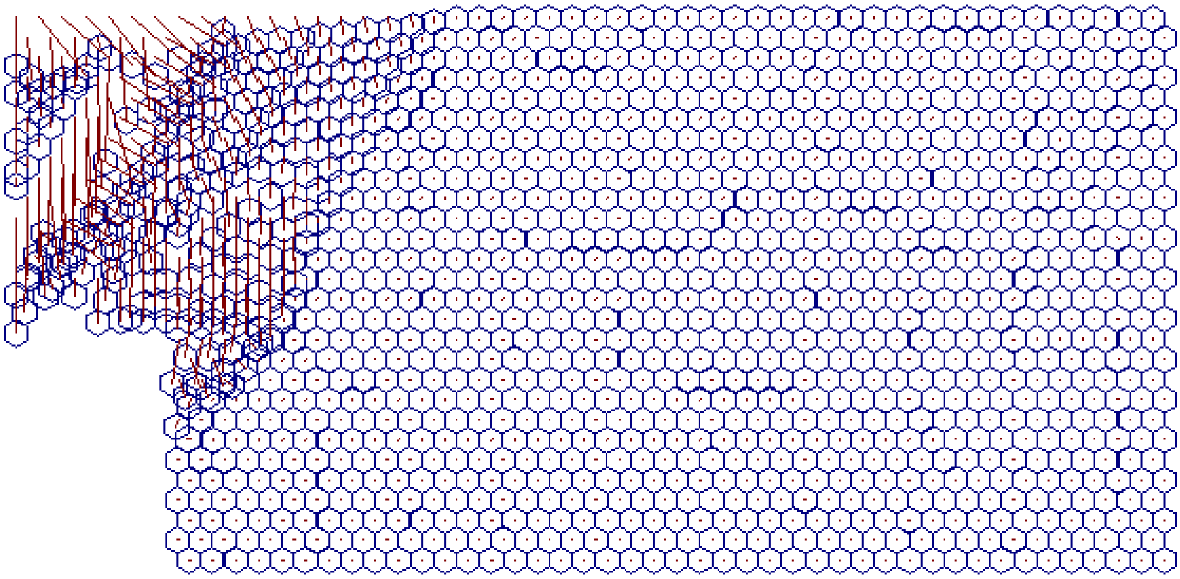
Zpevnění materiálu je zpravidla vyjádřeno funkcí jediného parametru $k=k(\kappa)$, kde $d\kappa=\sigma^T d\varepsilon_p=\sigma_{eq}d\varepsilon_{eqp}$. Ekvivalentní plastická deformace

$$\varepsilon_{eqp}=\sum d\varepsilon_{eqp}=$$
$$=\sum\sqrt{\frac{2}{3}}\left[d\varepsilon_{xp}^2+d\varepsilon_{yp}^2+d\varepsilon_{zp}^2+\frac{1}{2}\left(d\gamma_{yzp}^2+d\gamma_{zxp}^2+d\gamma_{xyp}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

se při jednoosém namáhání rovná plastické deformaci v uvažovaném směru. Položíme-li například $\varepsilon_{yp}=\varepsilon_{zp}=-(1/2)\varepsilon_{xp}$, vyjde $\varepsilon_{eqp}=\varepsilon_{xp}$ (uvažujeme součinitel příčné kontrakce při plném zplastizování).

Zbývá poznamenat, že

$$ss^T=\begin{bmatrix} s_x^2 & s_xs_y & s_xs_z & s_x\tau_{yz} & s_x\tau_{zx} & s_x\tau_{xy}\\ & s_y^2 & s_ys_x & s_y\tau_{yz} & s_y\tau_{zx} & s_y\tau_{xy}\\ & & s_z^2 & s_z\tau_{yz} & s_z\tau_{zx} & s_z\tau_{xy}\\ & & & \tau_{yz}^2 & \tau_{yz}\tau_{zx} & \tau_{yz}\tau_{xy}\\ & \text{symm.} & & & \tau_{zx}^2 & \tau_{zx}\tau_{xy}\\ & & & & & \tau_{xy}^2 \end{bmatrix}$$



Obr. 2 Porušení stability čelby pro E = 1GPa, Poissonovo číslo 0,25, G = 400 Mpa

Závěr

V předložené práci je řešena stabilita podzemních děl pomocí jedné diskrétní numerické metody – metody volných šestiúhelníků. Tato metoda byla použita v pracech (Procházka & Kugblenu, 2002) a (Procházka), kde se řešila stabilita hornických děl, speciálně problémy otřesů, tj. následků náhlého výronu částic uhlí z těžby. V našem případě se uvažuje nelineární chování šestiúhelníkových prvků, a to Mises-Huber-Henckyova hypotéza. Metoda opět projevuje své kladné vlastnosti, a to rychlou konvergenci, i když z obrázku 2 je zřejmé, že v okolí okajových uložení je potřebí více iterací.

Tento příspěvek byl připraven s finanční pomocí GAČR, projekt číslo 103/03/0483.

Literatura

Brož, P., Procházka, P. (1995) *Řešení nelineárních úloh metodou okrajových prvků.* GRADA Publications, Praha

Procházka, P., Kugblenu, M. Application of certain discrete element methods to problem of rock bumps. V tisku v *Acta Polytechnica* 4, 2002

Procházka, P., Kugblenu, M. Certain discrete element methods in problems of fracture mechanics. V tisku v *Acta Polytechnica* 4, 2002

Procházka P. Application of discrete hexagonal element method to fracture mechanics problems. V tisku v *Journal of Engineering Fracture Mechanics*