National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2003
Svratka, Czech Republic, May 12 – 15, 2003
paper no. 297

SOME CONSEQUENCES OF DIFFERENT DEFINITION OF THE STRAIN TENSORS

R. Novotný*, **P. Brož****

Summary: *In practice, two variants of a symetric strain tensor of the second order occur. While for the first variant, complete angle alterations are present in the components off the main diagonal, in the second case, the variation comprises the half constituents in question, concurrently, in the main diagonal, both variants identically involve specific elongations. As a consequence of the preceding circumstance, theoretical and practical deductions are a subject matter of the treatise submitted*

1. Úvod

Při technických aplikacích fyzikálních vztahů (uvažujeme lineární a ideální elasticitu obecně anizotropního napjatého kontinua) se běžně setkáváme se dvěma pojetími tenzoru deformace. Prvé z nich, které je obvyklejší, počítá, pokud jde o mimodiagonální komponenty tohoto symetrického „tenzoru" druhého řádu, s úplnými vzájemnými zkosy stěn na elementárním hranolu, to je s plnými úhlovými změnami oproti původně pravoúhlému postavení těchto stěn před deformací. Druhé pojetí teoreticky správněji uvažuje poloviční hodnoty těchto zkosů, zatímco diagonální prvky obou deformačních tenzorů zůstávají identické. Při klasickém uvažování tenzoru napjatosti a formulování Hookeova zákona v E_3 se pak ovšem „nabízí" i dvojí pojetí materiálového tenzoru tuhosti, popř. poddajnosti (jsou rovněž symetrické, ale čtvrtého řádu), ale naskýtají se také například paralelní formy vyjádření týchž přetvárně energetických principů, vyvstávají duplicitní možnosti stanovení odpovídajících vztahů mezi invarianty tenzoru napjatosti a tenzoru deformace, atd. Tyto okolnosti přirozeně vyvolávají otázku o „oprávněnosti" variantního pojímání tenzorů deformace, popř. otázku, do které míry anizotropie materiálu lze oba fyzikální vztahy pokládat za identické anebo alespoň za snadno zaměnitelné, apod.

2. Předpoklady, definice kartézského tenzoru a některé jeho vlastnosti

Budeme uvažovat lineárně a ideálně elasticky deformabilní obecně anizotropní kontinuum pevné fáze za trojosé a spojitě rozložené napjatosti τ_{ij} . Předpokládáme splnění podmínek

* Ing. Radimír Novotný, DrSc., ČVUT v Praze, Fakulta stavební, katedra betonových konstrukcí a mostů, Thákurova 7, 166 29 Praha 6 ; tel.: 224 354 630 ; e-mail: radimir. novotny @ seznam. cz
** Doc. Ing. Petr. Brož, DrSc., dtto

rovnováhy na ohraničené vyšetřované oblasti kontinua a na ní též spojité vektorové pole posunutí $\vec{u}(\vec{x}) = u_i(x_j)$ včetně jeho prvních derivací. Dále předpokládáme „malé“ poměrné deformace $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\prec\prec 1)$, takže $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 \approx \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\cdot\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_s}\right) \approx 0$.

Budeme říkat, že je dán kartézský tenzor r – tého řádu v E_3 , *(r = 1, 2, 3, ... , n)* , n je přirozené číslo, je-li v každé kartézské souřadné soustavě dáno 3^r vzájemně **nezávislých skalárů** (tzv. komponent), které se při ortogonální transformaci z „nečárkované“ báze $\{0;\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3\}$ do „čárkované“ báze $\{0;\vec{e}'_1;\vec{e}'_2;\vec{e}'_3\}$ **transformují** podle zákona

$$T'_{p_1,p_2,\ldots,p_3} = a_{p_1 i_1}\cdot a_{p_2 i_2}\cdot\ldots\cdot a_{p_r i_r}\cdot T_{i_1,i_2,\ldots,i_r} \quad , \tag{1}$$

kde čísla $a_{p_k i_k}$, *(k = 1, 2 , ... , r)* , jsou směrové kosíny úhlů, které svírá jednotkový bázový vektor $\vec{e}'_i$ s jednotkovým bázovým vektorem $\vec{e}'_j$, přičemž v (1) je uplatněna Einsteinova sumační konvence. Z (1) lze inverzním postupem obdržet ekvivalentní transformační výraz

$$T_{p_1,p_2,\ldots,p_r} = a_{i_1 p_1}\cdot a_{i_2 p_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_r p_r}\cdot T'_{i_1,i_2,\ldots,i_r} \quad . \tag{1a}$$

Budiž řečeno, že alternováním obecně nesymetrického tenzoru T_{ij} nad oběma indexy i a j lze obdržet antisymetrický tenzor $T_{[ij]} = \frac{1}{2}\cdot\left(T_{ij} - T_{ji}\right)$ a symetrizováním T_{ij} nad oběma indexy i a j obdržíme symetrický tenzor $T_{(ij)} = \frac{1}{2}\cdot\left(T_{ij} + T_{ji}\right)$, a že (jen pro tenzor druhého řádu) platí

$$T_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ji]} \quad . \tag{2}$$

Připomeňme, že násobením tenzoru r – tého a s – tého řádu získáme tenzor *(r + s)* – tého řádu, zatímco ztotožnění dvojice indexů znamená snížení řádu tenzoru o dva (tzv. kontrakce).

3. Tenzor napětí a dvě variantní definice tenzoru deformace

Tenzor napjatosti τ_{ij} budeme pojímat klasicky ; jde o symetrický tenzor druhého řádu, což je důsledek věty o vzájemnosti tangenciálních napětí.

Pokud jde o tenzor deformace, budeme uvažovat jeho dvě možné varianty, totiž „tenzor“ **„malých a úplných“** deformací γ_{ij} a tenzor **„malých“** deformací ε_{ij} .

Je-li ∇ Hamiltonův operátor (symbolický diferenciální vektor) a $\vec{u}(\vec{x}) = u_i(x_j)$ je vektorové pole posunutí, je jejich diadický tenzorový součin obecně nesymetrickým tenzorem druhého řádu, neboli $\in_{ij} = \nabla\otimes\vec{u}(\vec{x}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Uplatněním (2) na $\in_{ij}$ ihned získáme

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \varepsilon_{ij}(\vec{x}) + \omega_{ij}(\vec{x}) \quad ,$$

kde prvý tenzor na pravé straně poslední rovnice je tenzor „malých“ deformací, který je zřejmě symetrický, zatímco antisymetrický tenzor ω_{ij} se nazývá tenzor tuhého pootočení (jímž se zde jinak nebudeme zabývat). Poznamenejme, že význam tenzoru ε_{ij} je ten, že jeho diagonální prvky mají vliv jen na změny objemu, zatímco změna tvaru zkosem je „skryta“ v mimodiagonálních složkách a že jej lze zobrazit do čtvercové symetrické matice typu (3*3). Nyní, jak bylo avizováno v úvodu, definujme „tenzor“ „malých a úplných“ deformací, a to

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad \text{pro} \quad i = j \quad \text{a} \quad \gamma_{ij} = 2 \cdot \varepsilon_{ij} \quad \text{pro} \quad i \neq j \quad . \tag{3}$$

Čtenář si zajisté povšiml ve spojitosti se symetrickou maticí γ_{ij} , že pro ni bylo použito termínu „tenzor“ (s uvozovkami). Skutečně, symbol γ_{ij} sice sám o sobě vyhovuje ve všech bodech definici tenzoru, nicméně jeho vytvoření není korektní vzhledem k zákonitosti (2), což bude mít jisté důsledky, jak bude ještě ukázáno. Použijme proto pro symbol γ_{ij} „opatrného“ označení kvazitenzor.

4. Hookeův zákon pro anizotropní prostředí ve dvou variantách

Po definování tenzoru napjatosti i obou variantních tenzorů deformace lze ve shodě se skutečností reflektovat tuto zákonitost „přibližně“ platnou v jistých „velmi“ malých deformačních mezích: každou komponentu tenzoru napětí lze vyjádřit jako lineární kombinaci obecně všech složek (jednoho nebo druhého variantního) tenzoru deformace, přičemž všechny součinitelé těchto lineárních kombinací naplňují tenzor tuhosti A_{ijkl} resp. A^*_{ijkl} . (Skutečně, z řečeného (totiž z pouhého názoru) plyne, že počet nezávislých komponent je 92 = 81 , což je ve shodě s jedním z bodů definice kartézského tenzoru čtvrté valence, sice 34 = 81 . Ze symetrie τ_{ij} a γ_{kl} resp. ε_{kl} však plyne také $A_{ijkl} = A_{jilk}$, a poněvadž důsledkem zákona zachování přetvárné energie je splnění platnosti $A_{ijkl} = A_{klij}$, redukuje se počet nezávislých elastických koeficientů na konečných 21 , což odpovídá tzv. multikonstantní teorii (Brdička, 2000, Haermon, 1965, Novotný, 1999)

Takto definovaný Hookeův zákon pro E3 , napíše-li se v tenzorovém tvaru (a ve dvou variantách), tedy zní

$$\tau_{ij} = A_{ijkl} \cdot \gamma_{kl} \quad \text{resp.} \quad \tau_{ij} = A^*_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad , \tag{4}$$

popř.

$$\gamma_{ij} = B_{ijkl} \cdot \tau_{kl} \quad \text{resp.} \quad \varepsilon_{ij} = B^*_{ijkl} \cdot \tau_{kl} \quad , \tag{4a}$$

přičemž tenzor tuhosti (nadále budeme pracovat jen s jeho první variantou, totiž s A_{ijkl}) můžeme zobrazit do „kvazimatice“

$$\left\| A_{ijkl} \right\| = \left\| \begin{matrix} A_{1111} & A_{1112} & A_{1113} & A_{1122} & A_{1123} & A_{1133} \\ A_{1211} & A_{1212} & A_{1213} & A_{1222} & A_{1223} & A_{1233} \\ A_{1311} & A_{1312} & A_{1313} & A_{1322} & A_{1323} & A_{1333} \\ A_{2211} & A_{2212} & A_{2213} & A_{2222} & A_{2223} & A_{2233} \\ A_{2311} & A_{2312} & A_{2313} & A_{2322} & A_{2323} & A_{2333} \\ A_{3311} & A_{3312} & A_{3313} & A_{3322} & A_{3323} & A_{3333} \end{matrix} \right\| \tag{5}$$

a tenzory poddajnosti B_{ijkl} resp. B^*_{ijkl} (jimiž se zde nebudeme blíže zabývat) mají obdobné vlastnosti a strukturování jako oba variantní tenzory tuhosti. Poznamenejme, že, přísně vzato, výraz (5) není korektním zobrazením tenzoru A_{ijkl} (proto použitý termín „kvazimatice“): jestliže kartézský tenzor nultého, resp. prvého, resp. druhého, resp. třetího řádu lze v E_3 zobrazit jediným skalárem, resp. vektorem, resp. čtvercovou maticí typu (3×3) , resp. kubickou (prostorovou) maticí typu $(3 \times 3 \times 3)$, pak tenzor valence „čtyři“ se zobrazuje do čtyřrozměrného tělesa čísel, a nikoliv do matice typu (9×9) (tím méně ovšem (6×6)), atd.

Posuzuje-li se elastické chování kontinua podle analogie pružného chování krystalů (zobrazených obecně v podobě dipyramid s prostorovým osním křížem), pak míra jejich geometrické souměrnosti, která je dána typem krystalové soustavy, určuje vlastně i míru jejich elastické symetrie, což má potažmo vliv na počet nezávislých pružných koeficientů v uvažovaném tenzoru tuhosti Aijkl materiálu spojitého prostředí. Protože nejsložitější krystalové soustavě (triklinické) odpovídá odvozených (právě) 21 koeficientů, jednodušším soustavám náleží přirozeně $m \prec 21$ nezávislých elastických součinitelů. Uveďme zde, že izotropnímu prostředí odpovídá m = 2 , a že se zvyšovanou mírou anizotropie v hierarchii krystalových soustav odpovídá kubické (krychelné) soustavě m = 3 , trigonální a hexagonální (šesterečné) soustavě m = 5 , tetragonální (čtverečné) soustavě m = 6 , romboedrické (klencové) soustavě m = 7 , ortorombické (kosočtverečné) soustavě m = 9 , monoklinické (jednoklonné) soustavě m = 13 a triklinické (trojklonné) soustavě m = 21 (Brdička, 2000, Haermon, 1965, Hejtman , 1969, Novotný, 1999)

Při rozboru podoby (4) ve skalárním rozepsání vzhledem ke strukturaci (5) se ukazuje býti vhodné rozložit „kvazimatici“ (5) na submatice $\left\| {}^{k}A_{ijkl} \right\|$ typu (3×3) , $k = I, II, III, IV$:

$$\left\| A_{ijkl} \right\| = \begin{matrix} \left\| {}^{I}A_{ijkl} \right\| & \left\| {}^{II}A_{ijkl} \right\| \\ \left\| {}^{III}A_{ijkl} \right\| & \left\| {}^{IV}A_{ijkl} \right\| \end{matrix} .$$

Zřejmě platí $\left\| {}^{II}A_{ijkl} \right\| = \left\| {}^{III}A_{ijkl} \right\|$. Kromě toho, až do **ortorombické** krystalové soustavy včetně jsou submatice $\left\| {}^{II}A_{ijkl} \right\|$ a $\left\| {}^{III}A_{ijkl} \right\|$ nulovými maticemi, submatice $\left\| {}^{IV}A_{ijkl} \right\|$ má diagonální tvar, který pro kosočtverečnou soustavu speciálně je

$$\left\| {}^{IV}A_{ijkl} \right\| = \left\| \begin{matrix} A_{2222} & 0 & 0 \\ 0 & A_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & A_{3333} \end{matrix} \right\|$$

a submatice $\left\| {}^{I}A_{ijkl} \right\| = \begin{Vmatrix} A_{1111} & A_{1112} & A_{1113} \\ A_{1211} & A_{1212} & A_{1213} \\ A_{1311} & A_{1312} & A_{1313} \end{Vmatrix}$ je ustálené strukturace (dokonce pro všechny typy krystalových soustav). Uplatníme-li pro tenzor tuhosti platný pro uvažovaný **kosočtverečný** krystal vztahy (4), lze obdržet po rozepsání fyzikální rovnice ve dvou skalárních variantách vztahy

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= A_{1111} \cdot \gamma_{11} + A_{1112} \cdot \gamma_{22} + A_{1113} \cdot \gamma_{33} \\ \tau_{22} &= A_{1211} \cdot \gamma_{11} + A_{1212} \cdot \gamma_{22} + A_{1213} \cdot \gamma_{33} \\ \tau_{33} &= A_{1311} \cdot \gamma_{11} + A_{1312} \cdot \gamma_{22} + A_{1313} \cdot \gamma_{33} \\ \tau_{12} &= A_{2222} \cdot \gamma_{12} \quad \text{resp.} \quad \tau_{12} = 2 \cdot A_{2222} \cdot \varepsilon_{12} \\ \tau_{23} &= A_{2323} \cdot \gamma_{23} \quad \text{resp.} \quad \tau_{23} = 2 \cdot A_{2323} \cdot \varepsilon_{23} \\ \tau_{31} &= A_{3333} \cdot \gamma_{31} \quad \text{resp.} \quad \tau_{31} = 2 \cdot A_{3333} \cdot \varepsilon_{31} \quad . \end{aligned}$$

Teprve složitější aelotropie vedou na nenulovost materiálových submatic $\left\| {}^{II}A_{ijkl} \right\|$ a $\left\| {}^{III}A_{ijkl} \right\|$, což má za následek, že za nejvyšších měr anizotropie (jednoklonný a trojklonný krystal) by bylo třeba fyzikální vztahy uvažovat zásadně buď jako $\tau_{ij} = A_{ijkl} \cdot \gamma_{kl}$, anebo jako $\tau_{ij} = A^{*}_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$, kdy zřejmě $A_{ijkl} \neq A^{*}_{ijkl}$. Poznamenejme, že strukturální komplikovanost materiálových tenzorů je více ovlivněna mírou neortogonality v osním kříži dipyramidy krystalu kontinua než růzností délek jejích (prostorových) os. Ačkoliv závěry vyplývající z analýzy strukturování materiálového tenzoru tuhosti pro anizotropie vyšších řádů jsou poměrně speciální a mají spíše teoretický charakter, zdůrazněme, že až do aelotropie odpovídající ortorombické krystalové soustavě včetně je zcela nepodstatné, jaká varianta deformačního tenzoru je uvažována, poněvadž $A_{ijkl} = A^{*}_{ijkl}$. Lze proto snadno a kdykoliv přecházet ve (4) z jednoho variantního vztahu do druhého (Novotný, 1999, Novotný, 2001).

Zastavme se ještě u **izotropních** prostředí. Uvažování (3) umožňuje zapsat tenzorovou rovnici (4) buď pomocí **dvou** „tenzorových“ vztahů jako

$$\tau_{ij} = \frac{E \cdot \mu}{(1+\mu) \cdot (1-2 \cdot \mu)} \cdot \delta_{ij} \cdot \gamma_{kk} + \frac{E}{(1+\mu)} \cdot \gamma_{ij} \quad \text{pro} \quad i = j \quad \text{a}$$

$$\tau_{ij} = \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)} \cdot \gamma_{ij} \quad \text{pro} \quad i \neq j \quad ,$$

anebo pomocí **jediné** (vpravdě) tenzorové rovnice

$$\tau_{ij} = \frac{E \cdot \mu}{(1+\mu) \cdot (1-2 \cdot \mu)} \cdot \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk} + \frac{E}{(1+\mu)} \cdot \varepsilon_{ij} \quad ,$$

takže

$$\left\| {}^{I}A_{ijkl} \right\| = \frac{E}{(1+\mu)\cdot(1-2\cdot\mu)} \cdot \left\| \begin{matrix} (1-\mu) & \mu & \mu \\ \mu & (1-\mu) & \mu \\ \mu & \mu & (1-\mu) \end{matrix} \right\|$$

a (ve shodě s označením submatice z kvazimaticového zobrazení tenzoru tuhosti výše)

$$\left\| {}^{IV}A_{ijkl} \right\| = \frac{E}{2\cdot(1+\mu)} \cdot \delta_{ij} \quad ,$$

kde δ_{ij} označuje Kroneckerův izotropní tenzor druhého řádu, či-li jednotkovou diagonální matici, E značí Youngův modul pružnosti a μ označuje Poissonovo číslo. Je vidět, že ta varianta tenzoru deformace, která počítá s polovičními zkosy je nejen teoreticky vhodnější, ale vede i na elegantnější (kratší) zápis fyzikálních vztahů (Novotný, 1999, Novotný, 1999).

5. Invarianty tenzoru napjatosti a variantních tenzorů deformace

Jestliže jsou vzhledem k bázi $\{0;\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3\}$ vztaženy tenzory τ_{ij} resp. γ_{ij} resp. ε_{ij} se všemi obecně nenulovými komponenty, pak existuje takové „natočení“ výchozí báze do nové, třeba $\{0;\vec{e}_1^{\,*};\vec{e}_2^{\,*};\vec{e}_3^{\,*}\}$, že vzhledem k ní se uvedené tenzory transformují do $\tau^*_{ij} = a_{ir}\cdot a_{js}\cdot\tau_{rs}$ resp. do γ^*_{ij} resp. do ε^*_{ij} tak, že je lze zobrazit jen do diagonálních matic, takže např. $\tau^*_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, ale $\tau^*_{ij} \neq 0$ pro $i = j$, atd. Symboly opatřené v pravém horním indexu „hvězdičkou“ (*) signalizují, že běží o hlavní napětí či o hlavní relativní roztažení. V (Brdička, 2000, Novotný, 2001,) je podrobně ukázáno, že (postupně) pro prvý, druhý a třetí invariant napjatosti platí

$$I_1 = \tau_{kk} = \tau^*_{kk} \quad \text{(uplatňuje se Einsteinovo sumační pravidlo ; } i,j,k = 1,2,3\text{)}$$

$$I_2 = det\left\|\begin{matrix}\tau_{11} & \tau_{12}\\ \tau_{21} & \tau_{22}\end{matrix}\right\| + det\left\|\begin{matrix}\tau_{22} & \tau_{23}\\ \tau_{32} & \tau_{33}\end{matrix}\right\| + det\left\|\begin{matrix}\tau_{11} & \tau_{13}\\ \tau_{31} & \tau_{33}\end{matrix}\right\| = \tau^*_{11}\cdot\tau^*_{22} + \tau^*_{22}\cdot\tau^*_{33} + \tau^*_{33}\cdot\tau^*_{11}$$

$$I_3 = det\left\|\begin{matrix}\tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23}\\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33}\end{matrix}\right\| = \tau^*_{11}\cdot\tau^*_{22}\cdot\tau^*_{33} \quad .$$

Podobně, pro invarianty deformace vzhledem k prvému variantnímu vyjádření γ_{ij} vyjde

$$J_1 = \gamma_{kk} = \gamma^*_{kk}$$

$$J_2 = det\left\|\begin{matrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{matrix}\right\| + det\left\|\begin{matrix}\gamma_{22} & \gamma_{23}\\ \gamma_{32} & \gamma_{33}\end{matrix}\right\| + det\left\|\begin{matrix}\gamma_{11} & \gamma_{13}\\ \gamma_{31} & \gamma_{33}\end{matrix}\right\| = \gamma^*_{11}\cdot\gamma^*_{22} + \gamma^*_{22}\cdot\gamma^*_{33} + \gamma^*_{33}\cdot\gamma^*_{11}$$

$$J_3 = det\begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{Vmatrix} = \gamma_{11}^* \cdot \gamma_{22}^* \cdot \gamma_{33}^*$$

a pro invarianty deformace vzhledem k druhému variantnímu vyjádření ε_{ij} vychází

$$\bar{J}_1 = J_1$$

$$\bar{J}_2 = det\begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{12} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{21} & \varepsilon_{22} \end{Vmatrix} + det\begin{Vmatrix} \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{Vmatrix} + det\begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{31} & \varepsilon_{33} \end{Vmatrix}$$

$$\bar{J}_3 = det\begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{12} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{31} & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{Vmatrix} \quad .$$

Srovnáním a analýzou posledních šesti vzorců po komplikovanějších úpravách vycházejí vztahy typu $\bar{J}_i = \bar{J}_i(J_i)$, totiž : $\bar{J}_1 = J_1$

$$\bar{J}_2 = J_2 + \frac{3}{4}\cdot\left(\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2\right) = J_2 + 3\cdot\left(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2\right) \text{ a}$$

$$\begin{aligned}\bar{J}_3 &= J_3 + \frac{3}{4}\cdot\left(\gamma_{12}^2\cdot\gamma_{33} + \gamma_{23}^2\cdot\gamma_{11} + \gamma_{31}^2\cdot\gamma_{22}\right) - \frac{7}{4}\cdot\gamma_{12}\cdot\gamma_{23}\cdot\gamma_{31} = \\ &= J_3 + 3\cdot\left(\varepsilon_{12}^2\cdot\varepsilon_{33} + \varepsilon_{23}^2\cdot\varepsilon_{11} + \varepsilon_{31}^2\cdot\varepsilon_{22}\right) - 14\cdot\varepsilon_{12}\cdot\varepsilon_{23}\cdot\varepsilon_{31} \quad .\end{aligned}$$

Objekty γ_{ij} a ε_{ij} (z nichž prvý je důsledně vzato (jen) symetrickou maticí typu (3×3) a druhý je zároveň symetrickým tenzorem druhého řádu) nejsou (z definice) identické. Totožné se stávají jen tehdy, když jsou vztažené k bázi $\{0;\vec{e}_1^*;\vec{e}_2^*;\vec{e}_3^*\}$. Tehdy platí $\gamma_{ij}^* = \varepsilon_{ij}^*$ a také $\bar{J}_i = J_i$.

6. Vyjádření přetvárné energie pomocí invariantů napjatosti a obou forem invariantů deformace pro izotropní prostředí.

Na základě závěrů čtvrté a páté kapitoly lze po jistých úpravách mimo jiné dospět také k vyjádření hustoty komplementární potenciální energie deformace vnitřních sil ve tvaru $\overline{W}(\tau_{ij}) = \overline{W}(I_1;I_2)$ a k vyjádření hustoty potenciální energie deformace vnitřních sil jako $W(\gamma_{ij}) = W(J_1;J_2)$ resp. variantně jako $W(\gamma_{ij}) = W(\bar{J}_1;\bar{J}_2)$. Vychází (Novotný,2001)

$$\overline{W}(\tau_{ij}) = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot I_1^2(\tau_{ij}) - \frac{(1+\mu)}{E} \cdot I_2(\tau_{ij}) \quad ,$$

$$W(\gamma_{ij}) = \frac{E \cdot (1-\mu)}{2 \cdot (1+\mu) \cdot (1-2 \cdot \mu)} \cdot J_1^2(\gamma_{ij}) - \frac{E}{(1+\mu)} \cdot J_2(\gamma_{ij}) - \frac{3 \cdot E}{4 \cdot (1+\mu)} \cdot \left(\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2\right) \quad ,$$

resp. (a elegantněji)

$$W(\gamma_{ij}) = \frac{E \cdot (1-\mu)}{2 \cdot (1+\mu) \cdot (1-2 \cdot \mu)} \cdot \bar{J}_1^2(\gamma_{ij}) - \frac{E}{(1+\mu)} \cdot \bar{J}_2(\gamma_{ij}) \quad .$$

(Připomeňme ve stručnosti, že je-li (superpozicí) celková přetvárná práce na elementárním hranolu o objemu $\Delta V = \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3$ dána vztahem $\Delta A = \frac{1}{2} \cdot \tau_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot \Delta V$, je hustota potenciální energie deformace vnitřních sil definována jako $W = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta V} = \frac{1}{2} \cdot \tau_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}$, přičemž kvůli snadnému uplatnění Einsteinova sumačního pravidla bylo použito tenzoru deformace ve variantě ε_{ij} . Je vidět, že funkce W je skalární a kladná a v důsledku předpokládané fyzikální linearity také platí $\overline{W} = W$. Např. v (Novotný, 1999, Novotný, 1999) je ukázáno, že platí rovněž $\tau_{ij} = \frac{\partial W(\gamma_{ij})}{\partial \gamma_{ij}}$ a duálně $\gamma_{ij} = \frac{\partial \overline{W}(\tau_{ij})}{\partial \tau_{ij}}$).

7. Vztahy mezi invarianty napjatosti a deformace v izotropních elastických prostředích

Pro úplnost je vhodné dovodit všechny vztahy mezi všemi zde uvažovanými invarianty, nebo-li stanovit vzorce typu $I_k = I_k(J_i)$ a variantně $I_k = I_k(\bar{J}_i)$ a dále $J_i = J_i(I_k)$ s variantou $\bar{J}_i = \bar{J}_i(I_k)$. Po četných a pracných úpravách vychází

$$I_1 = \frac{E}{(1-2 \cdot \mu)} \cdot J_1 \quad ,$$

$$I_2 = \frac{E^2}{(1+\mu)^2} \cdot \left[\frac{\mu \cdot (2-\mu)}{(1-2 \cdot \mu)^2} \cdot J_1^2 + \frac{7}{4} \cdot J_2 + \frac{3}{4} \cdot \left(\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2\right) \right]$$

a

$$I_3 = \frac{E^3}{(1+\mu)^3} \cdot \left[\frac{\mu^2 \cdot (1-\mu)}{(1-2 \cdot \mu)^3} \cdot J_1^3 + \frac{\mu}{(1-2 \cdot \mu)} \cdot J_1 \cdot J_2 + J_3 \right] +$$

$$+ \frac{E^3}{(1+\mu)^3} \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{\mu}{(1-2 \cdot \mu)} \cdot J_1 \cdot \left(\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2\right) \right] +$$

$$+ \frac{E^3}{(1+\mu)^3} \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\gamma_{12}^2 \cdot \gamma_{33} + \gamma_{23}^2 \cdot \gamma_{11} + \gamma_{31}^2 \cdot \gamma_{22}\right) - \frac{7}{4} \cdot \gamma_{12} \cdot \gamma_{23} \cdot \gamma_{31} \right] \quad .$$

Elegantnější je pak obdobné vyjádření, totiž

$$I_1 = \frac{E}{(1-2\cdot\mu)}\cdot\bar{J}_1 \quad ,$$

$$I_2 = \frac{E^2}{(1+\mu)^2}\cdot\left[\frac{\mu\cdot(2-\mu)}{(1-2\cdot\mu)^2}\cdot\bar{J}_1^2 + \bar{J}_2\right]$$

a

$$I_3 = \frac{E^3}{(1+\mu)^3}\cdot\left[\frac{\mu^2\cdot(1-\mu)}{(1-2\cdot\mu)^3}\cdot\bar{J}_1^3 + \frac{\mu}{(1-2\cdot\mu)}\cdot\bar{J}_1\cdot\bar{J}_2 + \bar{J}_3\right] \quad .$$

Zbývá vyjádřit

$$J_1 = \frac{(1-2\cdot\mu)}{E}\cdot I_1 \quad ,$$

$$J_2 = \frac{(1+\mu)^2}{E^2}\cdot\left[I_2 - \frac{\mu\cdot(2-\mu)}{(1+\mu)^2}\cdot I_1^2 - 3\cdot\left(\tau_{12}^2+\tau_{23}^2+\tau_{31}^2\right)\right]$$

a

$$J_3 = \frac{(1+\mu)^3}{E^3}\cdot\left[\frac{\mu^2}{(1+\mu)^3}\cdot I_1^3 - \frac{\mu}{(1+\mu)}\cdot I_1\cdot I_2 + I_3\right] + \frac{14\cdot(1+\mu)^3}{E^3}\cdot\tau_{12}\cdot\tau_{23}\cdot\tau_{31} +$$

$$+ \frac{3\cdot(1+\mu)^2}{E^3}\cdot\left(\tau_{12}^2\cdot\tau_{33}+\tau_{23}^2\cdot\tau_{11}+\tau_{31}^2\cdot\tau_{22}\right) +$$

$$+ \frac{3\cdot\mu\cdot(1+\mu)^2}{E^3}\cdot\left(\tau_{12}^2\cdot\tau_{11}+\tau_{12}^2\cdot\tau_{22}+\tau_{23}^2\cdot\tau_{22}+\tau_{23}^2\cdot\tau_{33}+\tau_{31}^2\cdot\tau_{11}+\tau_{31}^2\cdot\tau_{33}\right)$$

a opět v elegantnější variantě

$$\bar{J}_1 = \frac{(1-2\cdot\mu)}{E}\cdot I_1 \quad ,$$

$$\bar{J}_2 = \frac{(1+\mu)^2}{E^2}\cdot\left[I_2 - \frac{\mu\cdot(2-\mu)}{(1+\mu)^2}\cdot I_1^2\right]$$

a konečně

$$\bar{J}_3 = \frac{(1+\mu)^3}{E^3}\cdot\left[\frac{\mu^2}{(1+\mu)^3}\cdot I_1^3 - \frac{\mu}{(1+\mu)}\cdot I_1\cdot I_2 + I_3\right] \quad .$$

8. Závěr

Příspěvek ukázal, že z praktického hlediska není významné, pracuje-li se až do aelotropie ortorombické míry (včetně) s „tenzorem“ „malých a úplných“ deformací či s variantním (a skutečným) tenzorem „malých“ deformací. Až do uvedeného stupně aelotropie také netřeba rozlišovat rozdílné varianty materiálových tenzorů, poněvadž neexistují. (Ostatně, tak vysoký stupeň anizotropie je i z teoretického hlediska obtížně schůdný, nehledě k tomu, jak technicky (patrně experimentálně) a s jakou mírou spolehlivosti stanovit všech devět elastických součinitelů). Nicméně, zdá se, že prvá varianta „tenzoru“ deformace nalézá širšího uplatnění v technické praxi (je názornější), zatímco jeho druhá varianta je teoreticky správnější.

Článek předložil i některé důsledky rozdílného definování tenzorů deformace na definici určitých pojmů (zejména přetvárně energetických pro případ izotropie a invariantů deformace) v mechanice kontinua pevné fáze, které se tak staly rovněž variantními a ukazuje všechny odvoditelné vztahy mezi nimi. Poznamenejme, že „netenzorový“ charakter některých z těchto vztahů se zrcadlí i ve značné složitosti jejich zápisu.

LITERATURA :

[1] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B. : Mechanika kontinua. Praha, Academia, 2000

[2] Haermon, R. F. S. : Úvod do teorie pružnosti anizotropních látek. Praha, SNTL (TKI), 1965

[3] Hejtman, B. : Petrografie. Praha, SNTL (a ALFA n. p. Bratislava), 1969

[4] Novotný, R. : K definici a vlastnostem tenzorů tuhosti a poddajnosti v obecně anizotropních prostředích vzhledem k energii deformace vnitřních sil. Stavební obzor, 8, 1999, č. 5 , s. 140 – 146 .

[5] Novotný, R. : Kruhové válcové skořepinové konstrukce za některých speciálních okolností. Doktorská disertační práce, Praha, Stavební fakulta ČVUT, 2001

[6] Novotný, R. : Poznámka k odvození matice tuhosti v izotropním prostředí z tenzoru tuhosti obecně anizotropního kontinua. Stavební obzor, 8, 1999, č. 8 , s. 252 – 256 .