

COMPARISON OF STABILITY CRITERIA OF V-NOTCHED BODY UNDER COMBINED MODE OF LOADING

J. Klusák*, Z. Knésl*

Summary: *The stability criteria of V-notched bodies under combination of loading modes I and II are suggested and compared in the article. Methodology of stability criterion suggestion is based on analogy between behaviour of body with a crack and with a V-notch. Analytical approach to suggestion of stability criteria and methods of numerical estimation of magnitudes controlling stability of the concentrators are shown in the article. Corresponding evaluations are obtained from finite element method system ANSYS. Suggested criteria are mutually compared.*

1. Úvod

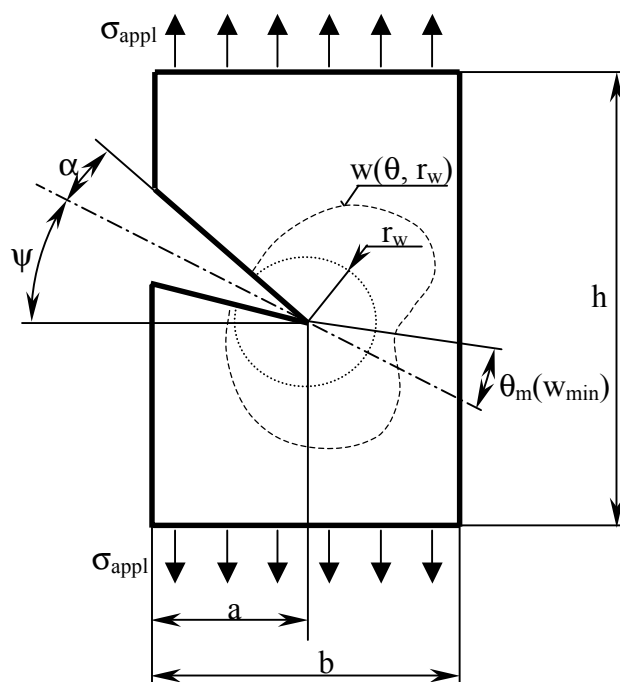
Článek pojednává o formulaci a aplikaci kriterií stability na problematiku návrhu tělesa s V-vrubem podrobeným smíšenému módu zatěžování. Přitom se omezíme na kombinaci módu normálového I a smykového II. Řešení dané problematiky se omezuje na oblast platnosti lineární elastické lomové mechaniky a na problematiku malých plastických deformací.

V-vrub je singulární koncentrátor napětí, přičemž exponenty singularity napětí p_I a p_{II} odpovídají zatěžovacím módům závisí na úhlu α otevření V-vrubu (obr. 1). Rozložení napětí kolem vrcholu V-vrubu lze pomocí dvou singulárních členů zapsat v následujícím tvaru:

$$\sigma_{ij}^M = \frac{H_M}{\sqrt{2\pi}r^{p_M}} f_{ij}^M(\theta, \alpha) \quad (1)$$

kde $M = I$ nebo II představuje normálový, resp. smykový mód zatěžování, indexy i a j reprezentují r a θ - polární souřadnice, H_I a H_{II} jsou zobecněné faktory intenzity napětí (FIN) pro odpovídající módy zatěžování (určené z numerického řešení) a f_{ij}^I a f_{ij}^{II} jsou funkce známé z analytického řešení (Williams, 1952).

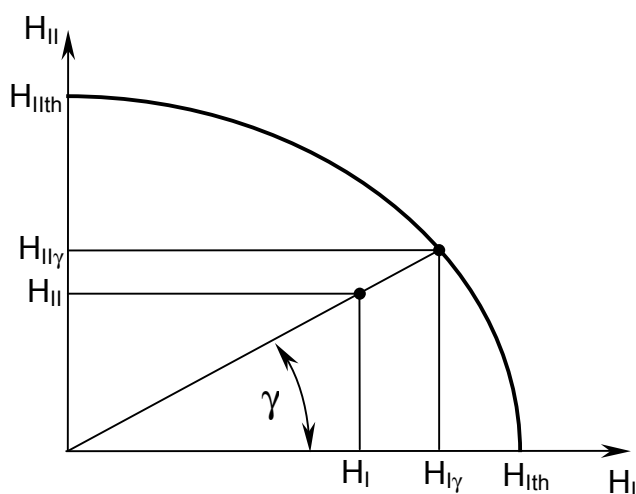
* Ing. Jan Klusák, Ph.D., Prof. RNDr. Zdeněk Knésl, CSc.: Ústav fyziky materiálů AV ČR; Žižkova 22; 616 62 Brno; tel.: +420.532 290 348, fax: +420.541 218 657; e-mail: klusak@ipm.cz



obr. 1 V-vrub s úhlem otevření α . Úhel ψ představuje odchylku od normálového módu. Závislost hustoty deformační energie w na polární souřadnici θ a vzdálenosti r_w a počáteční orientace trhliny ve směru θ_m minima w_{min} .

2. Teoretický přístup k řešení úloh s kombinovaným módem zatěžování

Podobně jako v práci (Broek, 1974), kde byla studována trhlina při kombinovaném zatížení, tak i v případě V-vrubu je cílem našich úvah sestavit graf H_{II} vs. H_I s křivkou rozdělující oblast grafu na část v níž se bude trhlina z V-vrubu šířit (nad křivkou) a na oblast, kde spočítané hodnoty H_I a H_{II} budou zaručovat stabilitu V-vrubu (pod křivkou), jak je patrné z obr. 2.



obr. 2 Kombinované namáhání V-vrubu

Křivka stability je tvořena body o souřadnicích $[H_{I\gamma}; H_{II\gamma}]$, které je třeba pro každý exponent singularity vypočítat. Postup výpočtu založený na znalosti rozložení hustoty deformační energie a smykového napětí je uveden v kapitole 3 a 4. Hodnoty H_{Ith} na horizontální ose získáme některým ze způsobů uvedených v kapitolách 3 nebo 4, vztahy (2) resp. (7). Poznamenejme také, že předpokládáme, že při změně velikosti (nikoli směru) aplikovaného napětí budou body o souřadnicích $[H_I; H_{II}]$ ležet na přímce skloněné pod úhlem γ . Vzhledem k tomu, že směr šíření trhliny z V-vrubu při kombinovaném namáhání nezávisí na velikosti zatížení, ale pouze na jeho směru a zároveň poměr H_{II}/H_I u kořene V-vrubu je závislý pouze na směru aplikovaného zatížení, je platnost tohoto předpokladu opodstatněná (Knésl, 1993).

3. SED kritérium stability

Při návrhu kritéria stability pomocí hustoty deformační energie (SED) vycházíme z podobnosti chování trhlín a V-vrubů. Předpokládáme, že hodnota SED w v případě iniciace trhliny z V-vrubu je stejná jako hodnota w při šíření trhliny. Přitom trhlina se bude šířit ve směru θ_m minima SED. Potom můžeme prahovou hodnotu zobecněného FIN H_{Ith} určit následujícím způsobem:

$$H_{Ith} = K_{Ith} r^{p_I - \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{4k_n + 1}{k_n U_I(\theta = 0) + V_I(\theta = 0)}} \quad (2)$$

kde K_{Ith} je materiálová charakteristika (prahová hodnota FIN), $k_n = (1-\nu)/(1+\nu)$ pro rovinnou napjatost a $k_n = (1-2\nu)$ pro rovinnou deformaci; ν je Poissonovo číslo. Hodnota r je polární souřadnice a je volena např. ve velikosti plastické zóny. U_I a V_I jsou funkce závislé na úhlu otevření V-vrubu a na polární souřadnici θ . Detailní odvození je možno najít např. v Klusák (2002).

S pomocí hodnoty H_{Ith} pak lze určit i souřadnice $H_{I\gamma}$, $H_{II\gamma}$ bodů křivky rozdělující graf na obr. 2 na oblast bezpečnou a nebezpečnou. Přesněji: tuto křivku určíme závislostí hodnot $H_{I\gamma}$ na úhlu γ , přičemž platí:

$$H_{II\gamma} = \tan(\gamma) H_{I\gamma} \quad (3)$$

Potom pro $H_{I\gamma}$ platí:

$$H_{I\gamma} = H_{Ith} \left(\frac{A_{11}^*(\theta_m = 0)}{A_{11}(\theta_m) + 2 \tan(\gamma) A_{12}(\theta_m) + \tan^2(\gamma) A_{22}(\theta_m)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

kde A_{11} , A_{12} , A_{22} jsou funkce závislé na úhlu otevření V-vrubu a na polární souřadnici θ (A_{11}^* platí pro mód I, tedy $A_{11}^* = A_{11}(\theta_m = 0)$). θ_m je počáteční úhel šíření trhliny z V-vrubu.

Potom kritérium stability můžeme zapsat ve tvaru následující podmínky:

$$\sqrt{H_I^2 + H_{II}^2} < \sqrt{H_{I\gamma}^2 + H_{II\gamma}^2} \quad (5)$$

pro stejné poměry $\tan(\gamma) = \frac{H_{II}}{H_I} = \frac{H_{II\gamma}}{H_{I\gamma}}$, tedy:

$$\sqrt{H_I^2 + H_{II}^2} < H_{I\gamma} \sqrt{1 + \tan^2(\gamma)} \quad (6)$$

kde hodnoty H_I a H_{II} získáme z numerického řešení konkrétního tělesa s V-vrubem pro danou geometrii a okrajové podmínky (viz . kapitola 6).

4. MTS kritérium stability

Analogicky k předchozímu lze odvodit i kritérium stability pro kombinovaný mód zatěžování i s využitím hodnoty maximálního smykového napětí (MTS). Předpokládáme opět, že hodnota MTS v případě iniciace trhliny z V-vrubu je stejná jako při šíření trhliny. Přitom trhlina se bude šířit ve směru θ_m maxima tangenciálního napětí. Potom můžeme prahovou hodnotu zobecněného FIN H_{Ith} pro mód I určit následujícím způsobem:

$$H_{Ith} = K_{Ith} r^{p_I - \frac{1}{2}} \frac{f_{\theta\theta}^I(\theta_m = 0, \alpha = 0)}{f_{\theta\theta}^I(\theta_m = 0, \alpha)} \quad (7)$$

kde $f_{\theta\theta}^I$ je funkce f_{ij}^M ze vztahu (1) pro $i = j = \theta$ a $M = I$.

Odtud opět můžeme určit hodnotu $H_{I\gamma}$ v závislosti na úhlu γ , přičemž stále platí vztah (3):

$$H_{I\gamma} = H_{Ith} \frac{r^{p_{II} - p_I} f_{\theta\theta}^I(\theta_m = 0, \alpha)}{r^{p_{II} - p_I} f_{\theta\theta}^I(\theta_m, \alpha) + \tan \gamma f_{\theta\theta}^{II}(\theta_m, \alpha)} \quad (8)$$

Potom kritérium stability má opět tvar:

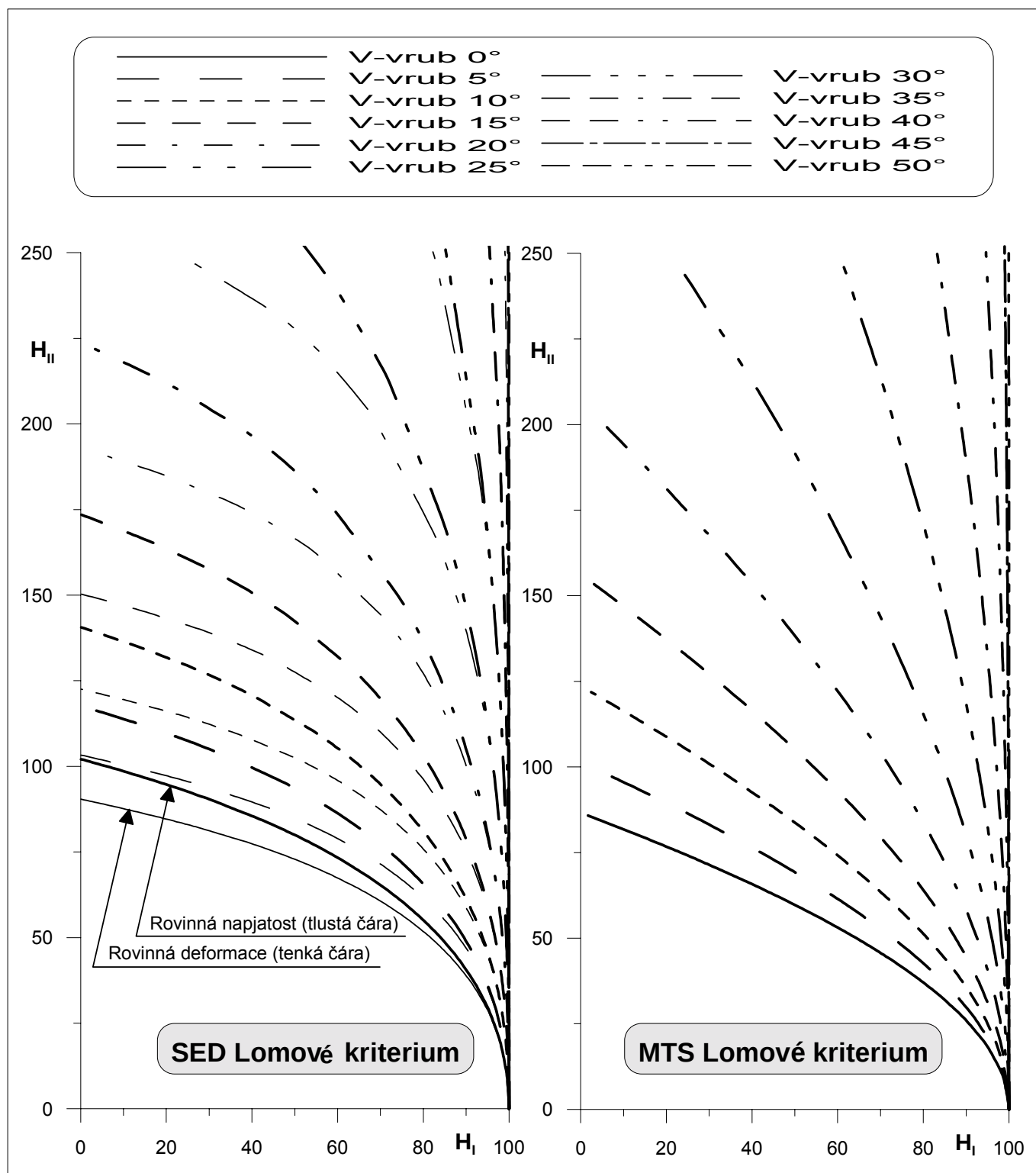
$$\sqrt{H_I^2 + H_{II}^2} < H_{I\gamma} \sqrt{1 + \tan^2(\gamma)} \quad (9)$$

kde hodnoty H_I a H_{II} získáme z numerického řešení konkrétního tělesa s V-vrubem pro danou geometrii a okrajové podmínky a hodnotu $H_{I\gamma}$ v tomto případě ze vztahu (8).

5. Srovnání SED a MTS přístupu k výpočtu prahových hodnot

Srovnání lomových kritérií V-vrubů namáhaných kombinovaným módem je znázorněno na obr. 3. Je zde zobrazeno jednak kritérium minimální hodnoty hustoty deformační energie (SED kritérium) z kapitoly 3 i kritérium maximálního tangenciálního napětí (MTS) – kapitola 4. Hodnoty bodů o souřadnicích $[H_{I\gamma}, H_{II\gamma}]$ jsou vypočítány pro $H_{Ith} = 100 \text{ MPa.m}^{p_I}$, pro hodnotu polární souřadnice $r_w = 0,001 \text{ m}$, hodnotu $\nu = 1/3$ a případ rovinné napjatosti a rovinné deformace.

K šíření trhliny z V-vrubu nedojde, jestliže bod o souřadnicích $[H_I, H_{II}]$ (tyto hodnoty jsou vypočítány pro danou geometrii a zatížení numericky) bude ležet pod křivkou odpovídající danému úhlu otevření V-vrubu. Ze srovnání je také vidět, že MTS kritérium je poněkud konzervativnější (na straně bezpečnosti), než SED kritérium. Na rozdíl od MTS kriteria, SED kritérium vyžaduje zadání hodnoty polární souřadnice r_w , pro kterou se bude SED počítat. Této skutečnosti se dá využít pro zohlednění např. způsobu zatěžování, kdy v případě cyklického zatěžování mohu za r_w zvolit velikost plastické zóny, v případě křehkého porušení zohledňuji velikost zrna materiálu atd. Zároveň je nutné rozhodnout se v případě SED kriteria pro případ buď rovinné napjatosti, nebo rovinné deformace. U kriteria MTS toto není nutné.



obr. 3 Srovnání lomových kritérií minimální hustoty deformační energie a maximálního tangenciálního napětí ($H_{Ith} = 100 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}$, $r = 0,001 \text{ m}$, $\nu = 1/3$)

6. Numerický příklad výpočtu hodnot H_I a H_{II} využitím SED přístupu

Jak již bylo několikrát zmíněno, nutnou součástí aplikace kritérií stability je numerický výpočet FIN konkrétní vrubované součásti s konkrétní geometrií a okrajovými podmínkami. Pro všechny výpočty byl použit konečno-prvkový (MKP) systém ANSYS.

Pro výpočet zobecněných FIN V-vrubů v běžných MKP systémech neexistuje přímo použitelná procedura. Z toho důvodu je nutné použít například přímé metody srovnání numericky vypočtených hodnot určité veličiny s jejím analytickým vyjádřením (Klusak, Knésl, 2002). Z tohoto srovnání je pak možno určit hodnotu zobecněných FIN H_I a H_{II} . Pro tento článek bylo pro odhad hodnot zobecněných FIN použito znalosti rozložení hustoty deformační energie před vrcholem V-vrubu.

Pro každý případ výpočtu byla nejprve přibližně určena mez kluzu pro stanovení poloměru r_w , v němž bude určována hodnota SED w (velikost poloměru r_w je vhodné volit s ohledem na způsob porušování konstrukce). Zároveň byl stanoven směr počátečního šíření trhliny z V-vrubu ve směru minimální hodnoty SED. Směr šíření závisí jednoznačně na poměru zobecněných FIN H_{II}/H_I (Knésl, 1993), proto bylo možné ze směru šíření určit právě poměr $\tan(\gamma) = H_{II}/H_I$. Poté z původního vyjádření SED pomocí singulárních členů:

$$w = (A_1 H_I^2 + 2A_{12} H_I H_{II} + A_{22} H_{II}^2) / r_w \quad (10)$$

po dosazení za $H_{II} = \tan(\gamma)H_I$, dostáváme pro H_I :

$$H_I = \sqrt{\frac{w r_w}{A_1 + A_{12} \tan \gamma + A_{22} \tan^2 \gamma}} \quad (11)$$

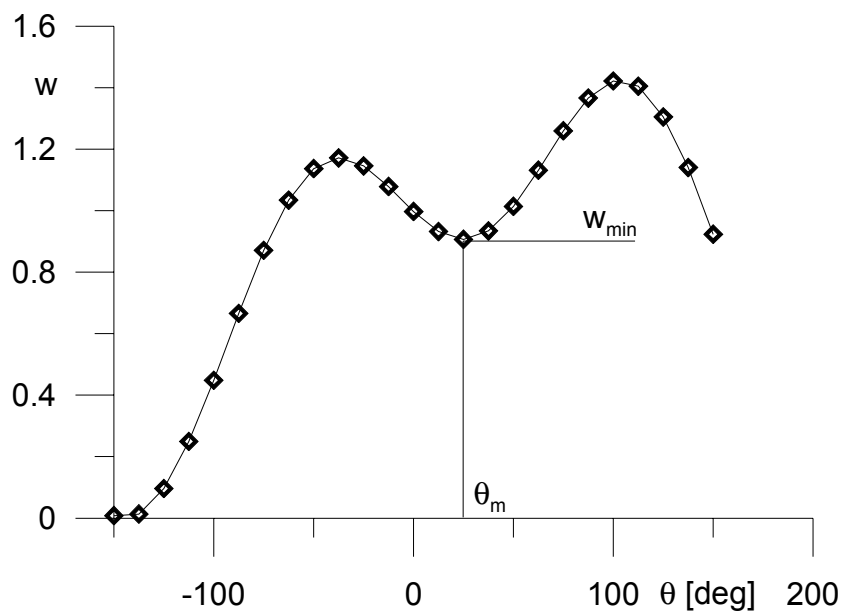
Geometrická konfigurace použitého výpočtového modelu je zřejmá z obr. 1. Šířka tělesa $b = 50$ mm, hloubka V-vrubu $a = 10$ mm, délka tělesa $h = 250$ mm, úhel otevření V-vrubu α byl volen v rozmezí 10 až 40° , odchylka zatížení od normálového módu I byla prováděna změnou úhlu vychýlení V-vrubu $\psi \in \langle 1^\circ; 70^\circ \rangle$, zatížení aplikováno napětím 200 MPa, výpočty provedeny pro případ rovinné napjatosti a mez kluzu σ_0 byla volena 600 MPa.

Následující grafy ukazují závislost hustoty deformační energie w na polární souřadnici θ (obr. 4). Předpokládaný počáteční úhel šíření trhliny θ_m se nachází v lokálním minimu SED $w_{\min}$. Úhel θ_m vyjadřuje odchylku směru šíření trhliny od směru osy V-vrubu, tedy od směru šíření trhliny v případě normálového módu zatěžování. Výsledky pro obr. 4 platí pro úhel otevření V-vrubu $\alpha = 30^\circ$ a odchylku od normálového módu $\psi = 30^\circ$.

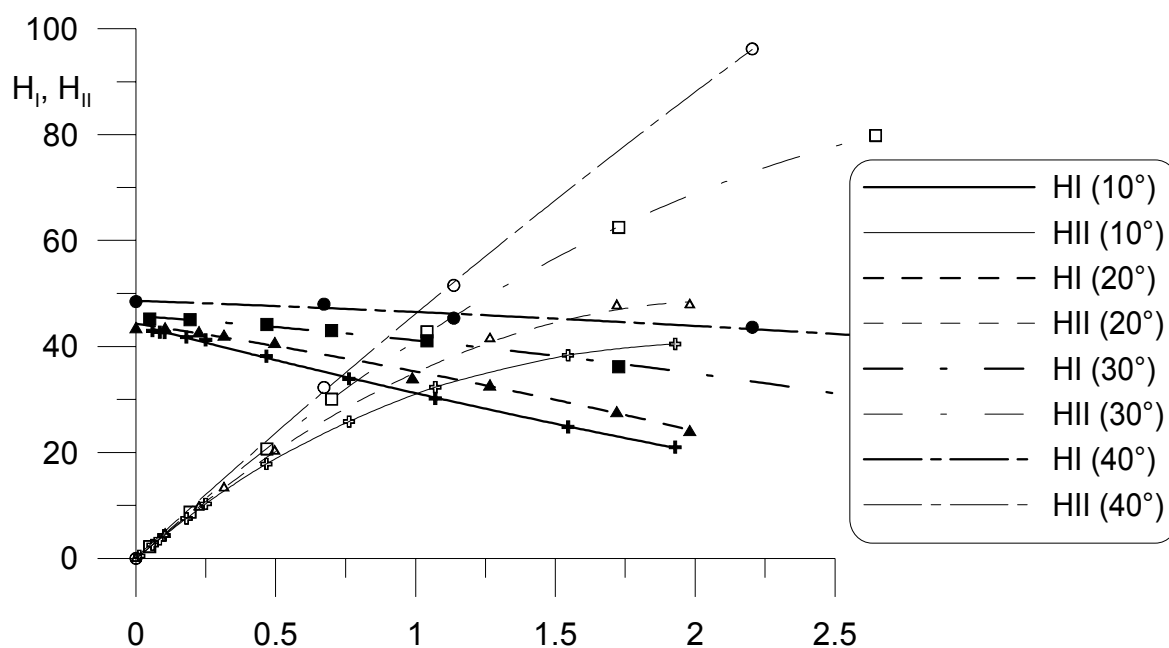
Na obr. 5 jsou vyneseny průběhy numericky vypočtených hodnot zobecněných FIN H_I a H_{II} pro V-vruby zatížené kombinovaným módem namáhání. Průběhy byly vypočítány pro úhly otevření V-vrubu α v rozmezí 10 až 40° . Smykové zatěžování bylo realizováno vychýlením osy V-vrubu o úhel ψ od kolmice vedené k ose zatěžování.

Očekávanou skutečností bylo, že se zvětšujícím se úhlem otevření α měla odchylka ψ narůstající vliv na změnu poměru H_{II}/H_I . Respektive v případě V-vrubů s menšími úhly otevření (do 20°) bylo nutné větších výchylek úhlu ψ (cca 70°) k dosažení poměru alespoň $H_{II}/H_I = 2$. Na základě tohoto by se mohlo zdát, že V-vruby s větším úhlem otevření jsou výrazně citlivější na odchylku ψ , a nelze ji tedy (na rozdíl od stejného případu trhliny) zanedbat ani pro menší vyosení ψ . Na druhou stranu je však nutné všimnout si na obr. 3, že pro úhly otevření $\alpha > 30^\circ$ již je mnohem náročnější dosáhnout smykovým zatěžováním prahových hodnot H_{Ith} . Pro seriózní posouzení spolehlivosti takových V-vrubů by bylo nutné vypočítat kritické hodnoty aplikovaného napětí.

Další věcí je, že pro dosažení vyšších hodnot poměrů H_{II}/H_I pro úhly $\alpha < 30^\circ$ je již nutné použít jiného výpočtového modelu, kde se bude např. měnit směr zatížení, nikoli pouze orientace V-vrubu.



obr. 4 Závislost hustoty deformační energie w na polárním úhlu θ (úhel otevření V-vrubu $\alpha = 30^\circ$, odchylka $\psi = 30^\circ$)



obr. 5 Hodnoty zobecněných FIN H_I a H_{II} pro úhly otevření V-vrubu 10, 20, 30 a 40°

7. Závěr

V článku byla prezentována metodika návrhu kritérií stability pro tělesa s V-vrubem při kombinovaném zatížení módy I a II, čímž byly zobecněny vztahy pro trhlinu známé z klasické lineární elastické lomové mechaniky. Návrh kritérií stability byl proveden s využitím znalosti rozložení hustoty deformační energie, nebo tangenciálního napětí před vrcholem V-vrubu. Navržená kritéria stability byla vzájemně porovnána. Byl také navržen a prakticky ověřen způsob výpočtu hodnot zobecněných faktorů intenzity napětí H_I a H_{II} s využitím standardního konečno-prvkového systému ANSYS. Výsledky práce přispívají jednak ke zobecnění postupů lineární elastické lomové mechaniky, stejně jako k širšímu využití standardních numerických MKP systémů.

8. Poděkování

Projekt byl realizován za finanční podpory ze státních prostředků prostřednictvím Grantové agentury České republiky, projekt č. 106/03/P054.

9. Literatura

- Broek, D. (1974) *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Noordhoff International Publishing
- Klusák, J. (2002) Kriterium minimální hustoty deformační energie v případě namáhání tělesa s V-vrubem, *Problémy lomové mechaniky II*, ISBN 80-214-2129-0, pp. 42 – 53.
- Klusák, J., Knésl, Z. (2002) Evaluation of the threshold values for the propagation of a fatigue crack starting at a V-notch. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Science*, 9: 459-468.
- Knésl, Z. (1993) The application of the strain energy density concept to the determination of a crack propagation direction initiated at a sharp notch tip, *Acta Technica*, CSAV 38, 221 – 234.
- Williams, M. L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extensions, *Journal of Applied Mechanics*, 74, 523 – 528.