National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2003
Svratka, Czech Republic, May 12 – 15, 2003
paper no. 238

COMPARISON OF FRACTURE BEHAVIOUR OF A CRACK AND GENERAL SINGULAR STRESS CONCENTRATORS

J. Klusák[1], S. Seitl[1], P. Hutař[1], L. Náhlík[1], Z. Knésl[1]

Summary: *Under the assumptions of linear elastic fracture mechanics the behaviour of cracks and general singular stress concentrators is studied and compared. The stress distribution in the vicinity of singular stress concentrators is analysed and a general fracture mechanics procedure based on stress method is suggested which makes it possible to formulate fracture behaviour of such concentrators. Examples illustrating the suggested approach are added. The results generally contribute to a better understanding of the failure and increase reliability of life estimations of structures.*

1. Úvod

Existence koncentrátorů napětí v konstrukcích může výrazně ovlivnit jejich provozní možnosti (Norman, 1993). Bezpečnost a životnost složitých technologických zařízení mohou být závislé na poruchách, které jsou způsobeny vysokou úrovní napětí existujícího v okolí napěťových koncentrátorů. V mnoha případech vede existence koncentrátorů napětí ke vniku trhlin a růst těchto trhlin pak může vést k porušení celé konstrukce. Iniciační stadium trhliny je pak minoritní a provozní životnost je přednostně určena následným chováním těchto defektů (trhlin).

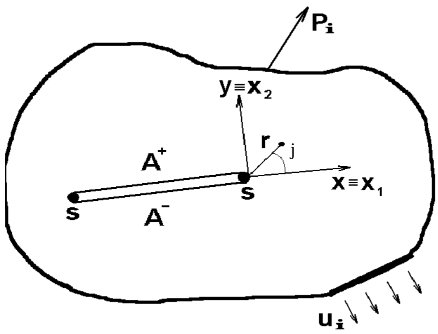
[1]Ing. Jan Klusák, PhD., Ústav fyziky materiálů, Akademie věd České republiky, Žižkova 22, 616 62 Brno, e-mail: klusak@ipm.cz tel. (+420) 532 290 348

Ing. Stanislav Seitl, Ing. Pavel Hutař, Ústav fyziky materiálů, Akademie věd České republiky, Žižkova 22, 616 62 Brno, e-mail: seitl@ipm.cz hutar@ipm.cz , tel. (+420) 532 290 351

Ing. Luboš Náhlík, PhD., Equipe Mécanique et Matériaux, Ecole Centrale de Lille, Cité scientifique, BP 48, 59651 Villeneuve d'Ascq Cedex, nahlik@ipm.cz

Prof. RNDr. Zdeněk Knésl CSc. Ústav fyziky materiálů, Akademie věd České republiky, Žižkova 22, 616 62 Brno, knesl@ipm.cz, tel. (+420) 532 290 358

V lomové mechanice je trhlina definována jako porušení soudržnosti v tělese podél plochy A (lomová plocha), ohraničené křivkou s, která je buď uzavřená nebo končí na povrchu tělesa a nazývá se čelo trhliny. Trhlina je tedy tvořena povrchy A^+a A^- , které nemohou vzájemně přenášet tahová a smyková napětí, ale mohou být v obecném případě zatížena. Lomová mechanika se zabývá chováním trhliny v případě, kdy lze okolní prostředí chápat jako spojité. Důsledkem existence trhliny v tělese je nárůst napětí a to zejména v okolí čela trhliny. Základním problémem lomové mechaniky je pak formulace kriteria stability, které umožňuje rozhodnout zda a jak se trhlina bude či nebude za daných podmínek šířit.



obr. 1 Znázornění trhliny v tělese, použité označení.

V dalších úvahách se omezíme na předpoklady lineární elastické lomové mechaniky (LELM), např. (Anderson, 1995) a uvedeme některé základní poznatky nezbytné pro následný popis obecných singulárních koncentrátorů napětí.

Analytické řešení umožňující výpočet napětí v tělese s trhlinou v obecném případě neexistuje. Pro stanovení vlivu trhliny na rozdělení napětí v tělese se vychází z dvourozměrného modelu (2D), přičemž hledáme napětí v rovině kolmé na křivku s v bodě, který nazýváme vrchol (kořen) trhliny. Řešení se hledá ve tvaru nekonečné mocninné řady (Williams, 1952). Pro napětí pak platí

$$s \approx \sum_i r^{p_i} f_i(j)\,, \tag{1}$$

kde (r, φ) jsou polární souřadnice s počátkem ve vrcholu trhliny a $f_i(\varphi)$ jsou známé funkce. Protože pro chování trhliny je rozhodující rozdělení napětí v blízkosti jejího vrcholu (tj. pro $r \to 0$) omezíme se pouze na singulární členy v rozvoji pro napětí, tj. na členy kde $0 < p < 1$. Parametr p se nazývá exponent singularity napětí.

V případě trhliny je výsledkem takového limitního analytického řešení vyjádření pro rozložení napětí v okolí vrcholu trhliny ve tvaru

$$s_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2p\,r}} f_{ij}^{\;I}(j) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2p\,r}} f_{ij}^{\;II}(j) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2p\,r}} f_{ij}^{\;III}(j) \tag{2}$$

Kde K_I, K_{II}, K_{III} jsou hodnoty faktoru intenzity napětí odpovídající normálovému, smykovému a antirovinnému namáhání. Pro další úvahy se omezíme na technicky nejvýznamnější normálové namáhání, tj. budeme předpokládat, že rozdělení napětí v okolí vrcholu trhliny je s dostatečnou přesností popsáno výrazem

$$s_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2p\,r}} f_{ij}^{\;I}(j) \tag{3}$$

Základním výsledkem limitního analytického řešení pro trhlinu je tedy skutečnost, že rozložení napětí v okolí jejího vrcholu je singulární vzhledem ke vzdálenosti r a exponent singularity je roven ½. Lze tedy trhlinu chápat jako singulární koncentrátor napětí se singularitou napětí typu $1/\sqrt{r}$. Hodnota exponentu singularity ½ vyplývá z řešení okrajového problému odpovídajícímu trhlině a je důsledkem splnění okrajových podmínek formulovaných na lomových plochách A^- a A^+ , viz (Williams, 1952, Bogy, 1971) pro podrobnosti.

Dalším lomově-mechanickým parametrem používaným v LELM je hnací síla trhliny G, která je vztažena k velikosti energie nutné k jednotkovému zvětšení lomové plochy, tj.

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} \qquad (4)$$

Obě veličiny spolu souvisí vztahem

$$G_I = -\lim_{da \to 0} \int_0^{da} s_{yy} u_y dr = \frac{K_I^2}{E^*}, \qquad (5)$$

kde kde u_y je posunutí ve směru osy y, E^* = E pro rovinnou napjatost a $E^* = \frac{E}{1-n^2}$ pro rovinnou deformaci.

Základní kriterium křehkého porušení je pak v rámci LELM vyjádřeno ve tvaru nerovností

$$K_I < K_{IC}, \quad \text{resp.} \quad G_I < G_{IC}. \qquad (6)$$

Hodnoty K_{IC} (lomová houževnatost) a G_{IC} jsou chápány jako materiálové konstanty. Nerovnost (6) umožňuje splnění základního cíle LELM, tj. pro dané zatížení určení kritické délky trhliny, příp. pro danou délku trhliny výpočet odpovídajícího kritického namáhání.

V tomto příspěvku se zaměříme na studium obecných singulárních koncentrátorů napětí, tj. koncentrátorů napětí, které jsou charakterizovány singulární závislostí napětí na vzdálenosti r od vrcholu, kde závislost je typu

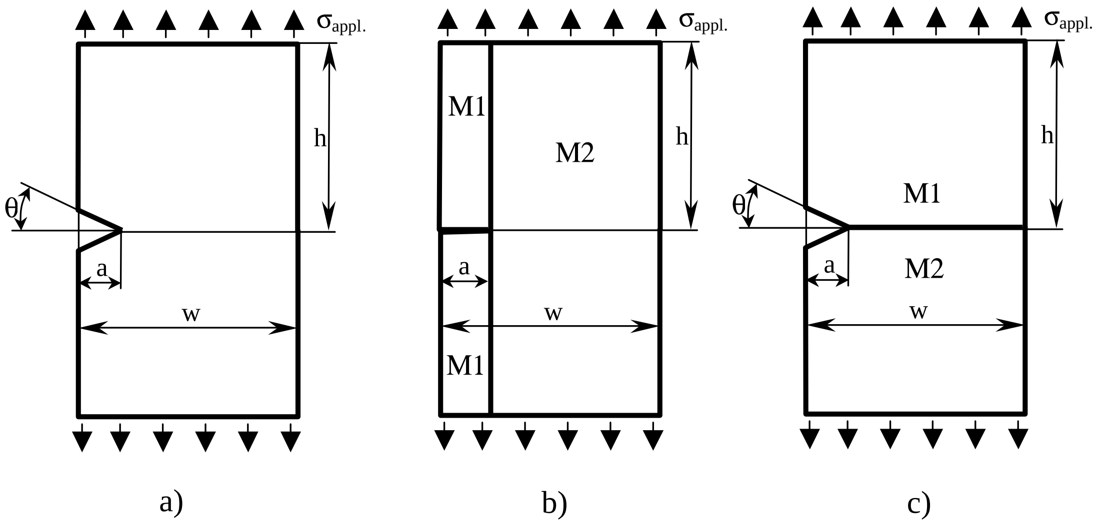
$$s \approx 1/r^p , \qquad (7)$$

kde hodnota exponentu singularity je $p \neq ½$ je v intervalu $0 < p < 1$.

Cílem našeho příspěvku je modifikovat známý lomově mechanický pohled na chování trhlin (popsaný v rámci LELM) na odpovídající popis obecných singulárních koncentrátorů napětí a pokusit se o jejich kvantitativní srovnání. Výsledkem je pak obecný přístup hodnocení singulárních koncentrátorů napětí (kde trhlina je pouze specielním případem) umožňující jejich srovnání z hlediska jejich vlivu na možné porušení konstrukce.

2. Obecný singulární koncentrátor napětí

Singulární rozdělení napětí v okolí vrcholu trhliny je důsledkem geometrické nespojitosti definující trhlinu. Obecně lze konstatovat, že vznik singulárních koncentrátorů napětí je vyvolán existencí buď geometrické nebo materiálové nespojitosti, případně nespojitosti zatížení. Typickou ukázkou geometrické nespojitosti je V-vrub (obr. 2a). V případě tohoto koncentrátoru napětí se exponent singularity p mění v intervalu $0 < p \leq 1/2$ v závislosti na úhlu otevření vrubu θ. Ve specielním případě, pro nulový úhel otevření, V-vrub přechází v trhlinu, kde p = ½. Jiným případem obecných singulárních koncentrátorů napětí jsou konfigurace vyvolané nespojitostmi materiálovými. Jedná se zejména o případ trhliny s vrcholem na rozhraní dvou materiálů (obr. 2b), bi-materiálový vrub (obr. 2c), jehož specielním případem je průsečík volného povrchu s rozhraním dvou materiálů apod. Posledním případem, kdy vzniká singularita napětí v důsledku nespojitosti zatížení se v tomto článku nezabýváme. Obecným rysem těchto koncentrátorů napětí je fakt, že exponent singularity (který závisí v nehomogenním případě na materiálových parametrech obou složek) má hodnotu p z intervalu 0 < p < 1. Obecně lze tvrdit, že „nebezpečnost“ koncentrátoru napětí za jinak stejných podmínek, je tím větší, čím větší je hodnota exponentu singularity p.



obr. 2 Obecný singulární koncentrátor napětí. a) V-vrub, b) trhlina s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní, c) bi-materiálový vrub

Podrobnou studii obecných singulárních koncentrátorů napětí lze najít např. v (Klusák, 2002) – studie V-vrubu, (Náhlík, 2002) – studie rozhraní dvou materiálů, (Knésl, Šrámek et al., 1991) – numerická analýza bi-materiálového vrubu.

2.1. Rozdělení napětí

Limitní analytické řešení rozdělení napětí v tělese s obecným singulárním koncentrátorem napětí lze pro jednotlivé koncentrátory najít v literatuře. Obecně je lze napsat ve tvaru:

$$s_{ij} = \frac{H_I}{\sqrt{2p}} r^{-p} F_{ij}(j\,, a\,, b\,, ...) \qquad (8)$$

kde F_{ij} jsou známé funkce závislé na polární souřadnici φ a na parametrech charakterizujících obecný singulární koncentrátor napětí. Těmito parametry mohou být např. kompozitní parametry α, β (v případě trhliny na bi-materiálovém rozhraní), úhel otevření v případě V-vrubu, atd. Hodnoty exponentu singularity napětí p jsou získány řešením charakteristické rovnice, která plyne z okrajových podmínek. Jeho hodnoty jsou pak brány jako řešení z intervalu 0 < p < 1. Poznamenejme, že p může být obecně komplexní číslo s reálnou částí z intervalu (0 ; 1).

Podstatnou skutečností uvedeného řešení je, že p ≠ ½, což má vliv na následující: V případě trhliny je rozměr faktoru intenzity napětí MPa $m^{1/2}$. V případě obecného singulárního koncentrátoru napětí závisí rozměry zobecněného faktoru intenzity napětí na parametrech koncentrátoru (úhel otevření, kompozitní parametry…). Pro mód I je rozměr typu $MPa.m^{p_I}$. Tato skutečnost znepříjemňuje případně znemožňuje přímé aplikace kriterií stability lineární elastické lomové mechaniky na V-vruby.

Dalším specifikem obecného koncentrátoru je hnací síla trhliny, kdy tato veličina definovaná vztahem (5) vede pro $p \neq ½$ ke dvěma hodnotám:

$G \rightarrow 0$ pro $p < ½$ a

$G \rightarrow \infty$ pro $p > ½$,

což by z fyzikálního hlediska znamenalo (podle kriteria stability $G < G_{IC}$), že pro $p < ½$ bude takový koncentrátor vždy stabilní, zatímco v případě koncentrátoru napětí s exponentem singularity $p > ½$ se z něho bude trhlina šířit vždy. To ovšem neodpovídá realitě.

Důvodem pro dvě izolované hodnoty hnací síly ($G \rightarrow 0$ a $G \rightarrow \infty$) v případě obecného koncentrátoru napětí je skutečnost, že v případě šíření trhliny zůstává typ defektu (geometrie) stejný a mění se pouze délka trhliny (v anglické literatuře se označuje pojmem self-similar cracking), zatímco v případě obecného koncentrátoru napětí mění defekt při překročení kriteria stability svůj typ (např. V-vrub se šíří jako trhlina – non-self-similar cracking), viz obr. 3 a také (Sih, Ho, 1991). Poznamenejme, že také v případě trhliny se tato šíří se stále stejným exponentem singularity napětí, zatímco v případě porušení tělesa s obecným koncentrátorem se exponent singularity napětí mění skokem. Vzhledem k těmto okolnostem nelze všeobecně použít postupy LELM pro obecné koncentrátory napětí.

p = konst. při šíření trhliny p ≠ konst. při porušení V-vrubu

obr. 3. Koncentrátor napětí zachovávající (p = konst.) a nezachovávající (p ≠ konst.) při porušení kriteria stability svůj typ.

Na druhou stranu, jestliže mechanismus porušování je pro oba případy stejný, lze formulovat jednotný teoretický model popisující chování trhlin a chování vrubů (Taylor, 1999), (Atzori, 1999), (Knésl, 1991).

2.2. Formulace kriterií stability obecného singulárního koncentrátoru napětí

Z předchozích odstavců plyne, že přímé zobecnění kriterií LELM trhlin na obecné koncentrátory není možné. Jednak rozměry zobecněných faktorů intenzity napětí závisí na exponentu singularity napětí a jsou odlišné od rozměru lomové houževnatosti K_{IC} a jednak nelze zobecnit pojem hnací síly trhliny na V-vruby.

Postup, který lze použít pro formulaci kriterií stability vychází ze srovnání lomově-mechanických veličin L, které mají jasně definovaný fyzikální význam (např. velikost plastické zóny, otevření trhliny, hustota deformační energie, střední hodnota napětí apod.) a jsou jednoznačně určené hodnotou faktoru intenzity napětí K (v případě trhliny) na jedné straně a velikostí zobecněného faktoru intenzity napětí H (v případě V-vrubu) na straně druhé. Kritická hodnota této veličiny, L_C, v případě trhliny odpovídá stavu $K = K_C$. Vzhledem k předpokladu o stejném mechanizmu porušení můžeme očekávat, že kritické hodnoty veličiny L_C budou stejné v obou případech (trhlina, obecný koncentrátor), tj.

$$L_C(\ldots K_C , r, \theta, E, \nu, \ldots.) = L_C(\ldots H_C , r, \theta, E, \nu, \alpha,\ldots) \qquad (9)$$

a tato podmínka nám umožní definovat kritickou hodnotu zobecněného faktoru intenzity napětí H_C, kterou můžeme nazývat zobecněnou lomovou houževnatostí.

Kriterium stability obecného singulárního koncentrátoru napětí (10) má pak tvar analogický podmínce (6)

$$H(\sigma_{appl}, \alpha) < H_C (K_C) \qquad (10)$$

a umožňuje stanovit kritickou hodnotu aplikovaného napětí pro konkrétní těleso s obecným koncentrátorem. Podstatná skutečnost tohoto postupu je, že zobecněná (vrubová) lomová houževnatost H_C je pro dané podmínky určena velikostí lomové houževnatosti určené pro trhlinu. Aplikace těchto kriterií tedy nevyžaduje nová měření kritických veličin a umožňuje využít rozsáhlých již existujících výsledků. Na druhé straně tato kriteria obsahují další volitelný parametr, jehož hodnotu je nutno stanovit na základě podrobnější analýzy mechanizmu porušení. Tato nevýhoda je na druhou stranu kompenzována možností zahrnout do kriteria parametry popisující mikrostrukturu materiálu případně jiné veličiny odpovídající mechanismu porušení.

3. Příklad

V klasické LELM je bezpečnosti konstrukcí často posuzována pomocí kriterií stability vyjádřených pomocí FIN K, tedy podmínkou (6). To nás při studiu obecných singulárních koncentrátorů napětí vede k „nejjednoduššímu“ zobecnění kriterií, tedy k použití zobecněných FIN H, jak bylo ukázáno vztahem (10). Při návrhu kriterií stability se tedy většinou zaměřujeme na odvození vztahů pro určení kritických (resp. prahových) hodnot zobecněných FIN. Výpočet kritické (resp. prahové) hodnoty faktoru intenzity napětí však nemá vhodnou vypovídající schopnost, což je způsobeno právě poněkud nezvyklou jednotkou $MPa.m^p$. V technické praxi je proto často požadován výpočet kritického napětí pro iniciaci trhliny pro dané těleso s koncentrátorem napětí. Pro životnost součásti má pak tato hodnota následující význam: trhlina se nebude šířit z vrcholu V-vrubu, jestliže velikost aplikovaného napětí

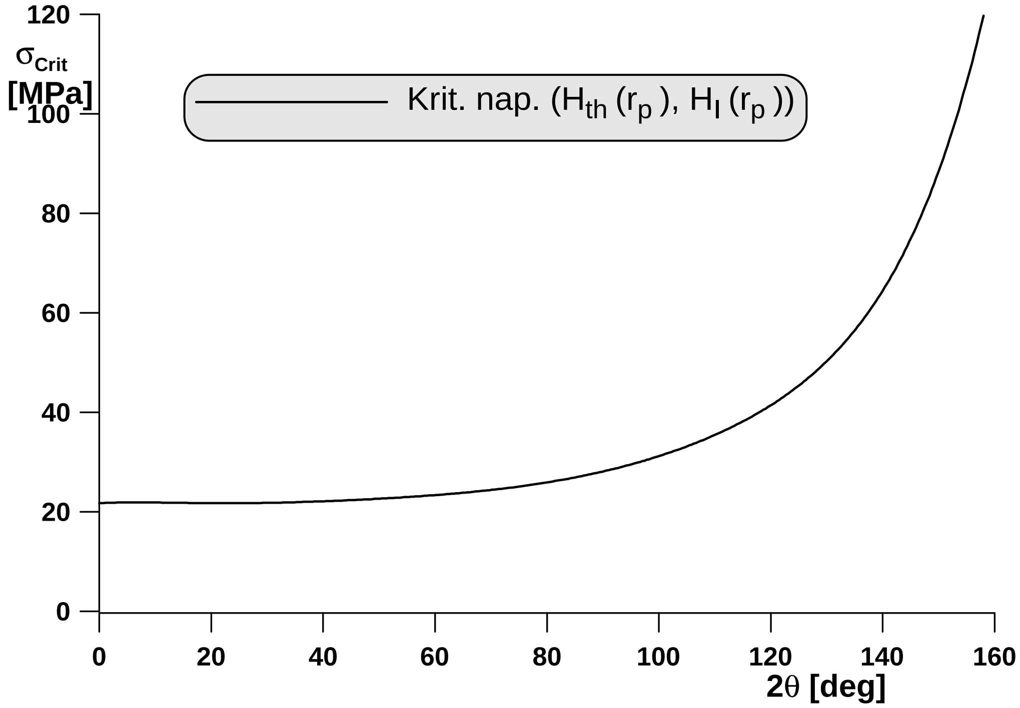
$$\sigma_{appl} < \sigma_{crit}. \qquad (11)$$

Pro výpočet kritického napětí je nutné nejprve určit kritickou nebo prahovou hodnotu zobecněného FIN H na základě postupu uvedeného v kapitole 2.2. Např. kritické napětí nutné pro iniciaci únavové trhliny z vrcholu V-vrubu je pak dáno vztahem

$$s_{crit} = s_{appl} \frac{H_{Ith}}{H_I(s_{appl})} \qquad (12)$$

kde hodnoty $H_I(\sigma_{appl})$ jsou faktory intenzity napětí určené numericky pro zadanou geometrii a zatížení aplikovaným napětím σ_{appl} a H_{th} je zobecněná hodnota prahového faktoru intenzity napětí K_{th}.

Jako příklad uveďme závislost kritického napětí σ_{crit} na úhlu otevření V-vrubu v případě, že k výpočtu prahové hodnoty zobecněného faktoru intenzity napětí použijeme rozměr plastické zóny ve směru předpokládaného šíření trhliny r_p. Podobně pro výpočet hodnoty H_I užijeme rozměr r_p. Výpočty byly provedeny pro hodnotu K_{th} = 5 $MPa.m^{1/2}$ a případ rovinné napjatosti, rozměry vrubovaného vzorku byly (podle obr. 2a) a = 10 mm, w = 50 mm, h = 125 mm, viz. obr.4.



obr. 4 Závislost kritického napětí na úhlu otevření V-vrubu

Z obr. 4 je patrné, že s rostoucím úhlem otevření V-vrubu roste i kritické napětí. To znamená, že pro V-vrub s větším úhlem otevření je nutné vyšší aplikované napětí k iniciaci trhliny z vrcholu V-vrubu. Dále je zřejmé, že pro malé úhly otevření ($2\theta < 70°$) je kritické napětí téměř konstantní a je rovno hodnotě platné pro trhlinu ($\theta = 0$). Tato skutečnost nás opravňuje (s určitým stupněm zjednodušení) použít k posouzení ostrých vrubů s menším úhlem otevření teorie platné pro trhlinu, tedy klasickou LELM. Vzhledem k tomu, že exponent singularity napětí pro V-vrub je vždy menší než ½ (což hodnota odpovídající vrubu s nulovým otevřením tj. trhlině), lze ve všech případech odhadu kritického napětí nahradit vrub trhlinou s délkou odpovídající hloubce vrubu. Odhady kritického napětí pak budou vždy na bezpečné straně. Pro větší hodnoty otevření V-vrubu, tj. $2\theta > 70°$, budou však tyto odhady zbytečně konzervativní. V případě ostrých vrubů představuje tedy trhlina nejnebezpečnější koncentrátor napětí s nejmenší hodnotou kritického napětí.

4. Závěr

V příspěvku je uveden postup umožňující hodnocení obecných singulárních koncentrátorů napětí z hlediska lineární elastické lomové mechaniky. Pro singulární koncentrátory napětí je formulováno kriterium stability, které umožňuje výpočet kritického napětí nutného pro iniciaci trhliny. Postup je založen na srovnání odpovídajících veličin v případě trhliny a obecného singulárního koncentrátoru napětí za předpokladu, že se v obou případech jedná o stejný mechanizmus porušení. Výhodou navržené metodiky hodnocení koncentrátorů je skutečnost, že při výpočtu odpovídajících kritických napětí je postačující znalost lomové houževnatosti (případně prahové hodnoty v případě iniciace únavové trhliny) známé pro trhlinu.

Koncentrátory napětí lze klasifikovat podle hodnoty odpovídajícího exponentu singularity napětí p, viz vztah (7). V případě, kdy je hodnota $p < ½$, lze jako nejnebezpečnější případ uvažovat trhlinu ekvivalentní délky, viz příklad uvedený v kapitole 3. Pro singulární koncentrátory s exponentem singularity větším než ½ tento předpoklad neplatí. Např. pro trhlinu s vrcholem na bi-materiálovém rozhraní, obr. 2b, může být hodnota p v závislosti na materiálových vlastnostech složek M1 a M2 v intervalu $½ < p < 1$ a odpovídající kritické napětí nutné pro šíření trhliny do materiálu M2 bude značně nižší než pro případ trhliny stejné geometrie šířící se pouze v homogenním materiálu M2. Obecně jsou singulární koncentrátory s exponentem singularity větším než ½ nebezpečnější než klasické trhliny ($p = ½$) a odhady kritického napětí, které neberou v úvahu tuto skutečnost jsou nespolehlivé a nebezpečné.

5. Poděkování

Projekt byl realizován za finanční podpory ze státních prostředků prostřednictvím Grantové agentury České republiky, projekt č. 106/03/P054 a projekt č.101/03/0331.

6. Literatura

Anderson, T., L. (1995) *Fracture Mechanics - Fundamentals and Applications Second Edition*, CRC Press, Boca Raton

Atzori, B., Lazzarin, P., Tovo, (1999) R. Stress field parameters to predict the fatigue strength of notched components, *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 34: (6) pp 437 – 453.

Bogy, D. B. (1971) On the Plane Elastostatic Problem of a Loaded Crack Terminating at a Material Interface, *Journal of Applied Mechanics*, pp. 911-918

Klusák J. (2002) *Lineární elastická lomová mechanika V-vrubu*, Disertační práce VUT v Brně.

Knésl, Z. (1991) A criterion of V-notch stability, *International Journal of Fracture*, Volume 48, pp. 79-83

Knésl, Z., Šrámek A., Kaďourek, J. & Kroupa, F. (1991) Stress Concentration at the Edges of Coatings on Tensile Specimens, *Acta Technica ČSAV*, No. 5, pp. 574-593

Náhlík, L. (2002) *Šíření únavových trhlin v okolí rozhraní dvou elastických materiálů*, Disertační práce VUT v Brně.

Norman, E. D. (1993) *Mechanical behavior materials*, Prentice-Hall International, Inc

Sih, G. C., Ho, J. W., (1991), Sharp notch fracture strength characterized by critical energy density. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 16: (3) 179 – 214.

Taylor, D. (1999) Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model, *International Journal of Fatigue*, 21, pp 413 – 420.

Williams, M. L. (1952) Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corner of Plates in Extension. *Journal of Applied Mechanics*, Volume 74, pp. 526-528.