National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2003
Svratka, Czech Republic, May 12 – 15, 2003

paper no. **226**

A CONTRIBUTION TO THE SENSITIVITY ANALYSIS AND SPECTRAL TUNING OF THE ROTATING SYSTEMS

V. Zeman*, **Z. Hlaváč***

Summary: *This paper describes a sensitivity analysis and spectral tuning method of selected design parameters of the large rotating systems. The method is based on the system decomposition into subsystems – rotor and stator – joined by discrete couplings – bearings and a transmission belt. The reduced conservative mathematical model of rotating systems including the effects of gyroscopic forces is assembled by means of the lower mode of the mutually uncoupled undamped subsystems with respect to the coupling properties. The method is applied for the sensitivity analysis and spectral tuning of the centrifugal fan.*

1. Úvod

Při navrhování rotorových soustav je nejdůležitější zajistit provoz v dostatečné vzdálenosti od kritických otáček. Ty jsou ovlivněny zejména ohybovou tuhostí rotorů, jejich gyroskopickými účinky, vazbami se statorem a modálními veličinami statoru. Jestliže např. z Campbellova diagramu (Krämer, 1993) zjistíme blízkost provozních otáček rotoru ke kritickým, je nutné dodatečné spektrální přeladění změnou vybraných ladicích parametrů $\mathbf{p} = \lfloor p_j \rfloor$. Spektrální ladění nerotujících konstrukcí vychází z konzervativního modelu

$$\mathbf{M}(\mathbf{p})\ \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{p})\ \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}\ . \tag{1}$$

U rozsáhlých rotorových soustav při respektování shora uvedených vlivů je nutné vycházet z kondenzovaného konzervativního modelu systému při provozní úhlové rychlosti ω.

2. Kondenzovaný konzervativní model rotorové soustavy

Východiskem pro citlivostní analýzu a následné spektrální ladění je konzervativní model rotorové soustavy dekomponovaný na subsystémy *R* (rotor) a *S* (stator) a kondenzovaný např. z $n \sim 10^5$ na $m \sim 10^2$ stupňů volnosti. Můžeme jej zapsat v parametrickém tvaru

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + \omega\ \mathbf{G}\ \dot{\mathbf{x}}(t) + \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{V}^T \mathbf{K}_C \mathbf{V}\right) \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}\ , \tag{2}$$

kde matice jsou závislé na parametrech rotoru $\mathbf{p}_R$, statoru $\mathbf{p}_S$ a vazeb $\mathbf{p}_C$. Jeho souřadnice $\mathbf{x}(t) = \lfloor \mathbf{x}_R^T(t),\ \mathbf{x}_S^T(t) \rfloor^T$, tzv. hlavní modální souřadnice o počtu m_R resp. m_S rozpojených

* Prof. Ing. Vladimír Zeman, DrSc., Doc. RNDr. Zdeněk Hlaváč, CSc.: Katedra mechaniky; Západočeská univerzita v Plzni; Univerzitní 8; 306 14 Plzeň; tel.: +420.377 632 300; fax: +420. 377 632 302; e-mail: zemanv@kme.zcu.cz, hlavac@kme.zcu.cz

subsystémů, jsou se zobecněnými souřadnicemi subsystémů $\mathbf{q}_R(t)$, $\mathbf{q}_S(t)$ dimenze n_R resp. n_S vázány modálními transformacemi (Zeman, 1994)

$$\mathbf{q}_s(t) = {}^m\mathbf{V}_s(\mathbf{p}_s)\,\mathbf{x}_s(t), \quad s = R, S \;, \tag{3}$$

kde ${}^m\mathbf{V}_s(\mathbf{p}_s) = R^{n_s, m_s}$ jsou modální submatice rozpojených a nerotujících subsystémů vyhovující podmínkám ortonormality

$${}^m\mathbf{V}_s^T\,\mathbf{M}_s\;{}^m\mathbf{V}_s = \mathbf{E}_s\,, \quad {}^m\mathbf{V}_s^T\,\mathbf{K}_s\;{}^m\mathbf{V}_s = {}^m\mathbf{\Lambda}_s\;.$$

Matice gyroskopických účinků řádu *m*

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} {}^m\mathbf{V}_R^T(\mathbf{p}_R)\,\mathbf{G}_R(\mathbf{p}_R)\;{}^m\mathbf{V}_R(\mathbf{p}_R) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{4}$$

a matice $\mathbf{V} = diag\,\{{}^m\mathbf{V}_s(\mathbf{p}_s)\} \in R^{n,m}$, $n = n_R + n_S$, $m = m_R + m_S$ jsou blokově diagonální a matice $\mathbf{\Lambda} = diag\,\{{}^m\mathbf{\Lambda}_s(\mathbf{p}_s)\} \in R^{m,m}$ je diagonální. Matice tuhosti vazeb $\mathbf{K}_C(\mathbf{p}_C)$ závisí na parametrech vazeb mezi subsystémy *R* a *S*. Model (2) rozšíříme o identitu

$$\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{V}^T\;\mathbf{K}_C\;\mathbf{V}\right)\dot{\mathbf{x}}(t) - \left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{V}^T\;\mathbf{K}_C\;\mathbf{V}\right)\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0} \tag{5}$$

a zavedeme stavový vektor dimenze 2*m*

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Kondenzovaný konzervativní model rotorové soustavy můžeme přepsat do stavového prostoru (Géradin & Rixen, 1997)

$$\mathbf{A}\;\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{B}(\omega)\,\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \tag{7}$$

se symetrickou maticí **A** a antisymetrickou maticí $\mathbf{B}(\omega)$, přičemž

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda} + \mathbf{V}^T\mathbf{K}_C\mathbf{V} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(\omega) = \begin{bmatrix} \omega\mathbf{G} & \mathbf{\Lambda} + \mathbf{V}^T\mathbf{K}_C\mathbf{V} \\ -\left(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{V}^T\mathbf{K}_C\mathbf{V}\right) & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

3. Citlivost a ladění vlastních frekvencí

Znalost citlivosti vlastních frekvencí Ω_ν na parametrech systému a provozní úhlové rychlosti rotoru je klíčová pro ladění rotorové soustavy. Řešením problému vlastních hodnot kondenzovaného modelu (7) vypočítáme ryze imaginární vlastní čísla $\lambda_\nu = i\,\Omega_\nu$ a $\lambda_{\nu+m} = -i\,\Omega_\nu$, $\nu = 1, 2, ..., m$ a jim přiřazené komplexní vlastní vektory $\mathbf{u}_\nu$. Tyto modální veličiny rotorové soustavy splňují rovnici (argument ω u **B** vypouštíme)

$$\left[\lambda_\nu\;\mathbf{A} + \mathbf{B}\right]\mathbf{u}_\nu = \mathbf{0}, \quad \nu = 1, 2, ..., 2m \tag{8}$$

a podmínky ortogonality

$$\mathbf{u}_i^H\ \mathbf{A}\ \mathbf{u}_j = \alpha_j\ \delta_{i,j}\ , \qquad \mathbf{u}_i^H\ \mathbf{B}(\omega)\ \mathbf{u}_j = -\lambda_j\ \alpha_j\ \delta_{i,j}\ , \quad i,\ j \in \{1,\ 2,\ ...,\ 2m\}\ , \tag{9}$$

kde $\alpha_j = \mathbf{u}_j^H\ \mathbf{A}\ \mathbf{u}_j$ je reálné číslo a $\delta_{i,j}$ je Kroneckerův symbol.

Předpokládejme, že matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}(\omega)$ jsou funkcí vektoru parametrů $\mathbf{p} = \lfloor p_j \rfloor$. Parciální derivací rovnice (8) podle parametru p_j a poté pronásobením hermitovsky sdruženým vlastním vektorem $\mathbf{u}_\nu^H$ zleva dostaneme

$$\frac{\partial \lambda_\nu}{\partial p_j} \mathbf{u}_\nu^H\ \mathbf{A}\ \mathbf{u}_\nu + \mathbf{u}_\nu^H \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial p_j} + \lambda_\nu\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_j} \right) \mathbf{u}_\nu + \mathbf{u}_\nu^H (\lambda_\nu\ \mathbf{A} + \mathbf{B}) \frac{\partial \mathbf{u}_\nu}{\partial p_j} = \mathbf{0}\ . \tag{10}$$

Vzhledem k symetrické matici $\mathbf{A}$ a antisymetrické matici $\mathbf{B}$ adjungovanému problému vlastních hodnot

$$\left(\lambda_\nu\ \mathbf{A} + \mathbf{B}^T\right) \mathbf{u}_\nu^* = \mathbf{0} \tag{11}$$

vyhovuje komplexně sdružený pravostranný vlastní vektor, $\mathbf{u}_\nu^*$ k $\mathbf{u}_\nu$. Transponováním rovnice (11) dostaneme

$$\mathbf{u}_\nu^H\ (\lambda_\nu\ \mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

a tudíž z rovnice (10) a pro $\lambda_\nu = i\ \Omega_\nu$ vyplývá

$$\frac{\partial \Omega_\nu}{\partial p_j} = \frac{i}{\mathbf{u}_\nu^H\ \mathbf{A}\ \mathbf{u}_\nu}\ \mathbf{u}_\nu^H \left(\frac{\partial \mathbf{B}(\omega)}{\partial p_j} + i\ \Omega_\nu\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_j} \right) \mathbf{u}_\nu\ , \quad \nu = 1,\ 2,\ ...,\ m\ . \tag{12}$$

Výraz (12) vyjadřuje citlivost vlastní frekvence rotorové soustavy při dané úhlové rychlosti ω rotoru. Lze dokázat, že platí

$$\mathbf{u}_\nu^H\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial p_j}\ \mathbf{u}_\nu = 2i\ \overline{\mathbf{u}}_\nu^T\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial p_j}\ \overline{\overline{\mathbf{u}}}_\nu \quad \text{a} \quad \mathbf{u}_\nu^H\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_j}\ \mathbf{u}_\nu = \overline{\mathbf{u}}_\nu^T\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_j}\ \overline{\mathbf{u}}_\nu + \overline{\overline{\mathbf{u}}}_\nu^T\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_j}\ \overline{\overline{\mathbf{u}}}_\nu\ ,$$

kde $\overline{\mathbf{u}}_\nu = \mathrm{Re}\ \{\mathbf{u}_\nu\}$, $\overline{\overline{\mathbf{u}}}_\nu = \mathrm{Im}\ \{\mathbf{u}_\nu\}$ a tudíž citlivost v (12) je reálné číslo.

Při zkoumání citlivosti vlastních frekvencí na změnu parametrů o různých jednotkách je účelné definovat relativní citlivosti

$$\frac{\partial \overline{\Omega}_\nu}{\partial \overline{p}_j} = \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial p_j}\ \frac{p_j}{\Omega_\nu}\ , \quad \nu = 1,\ 2,\ ...,\ m\ , \quad j = 1,\ 2,\ ... \tag{13}$$

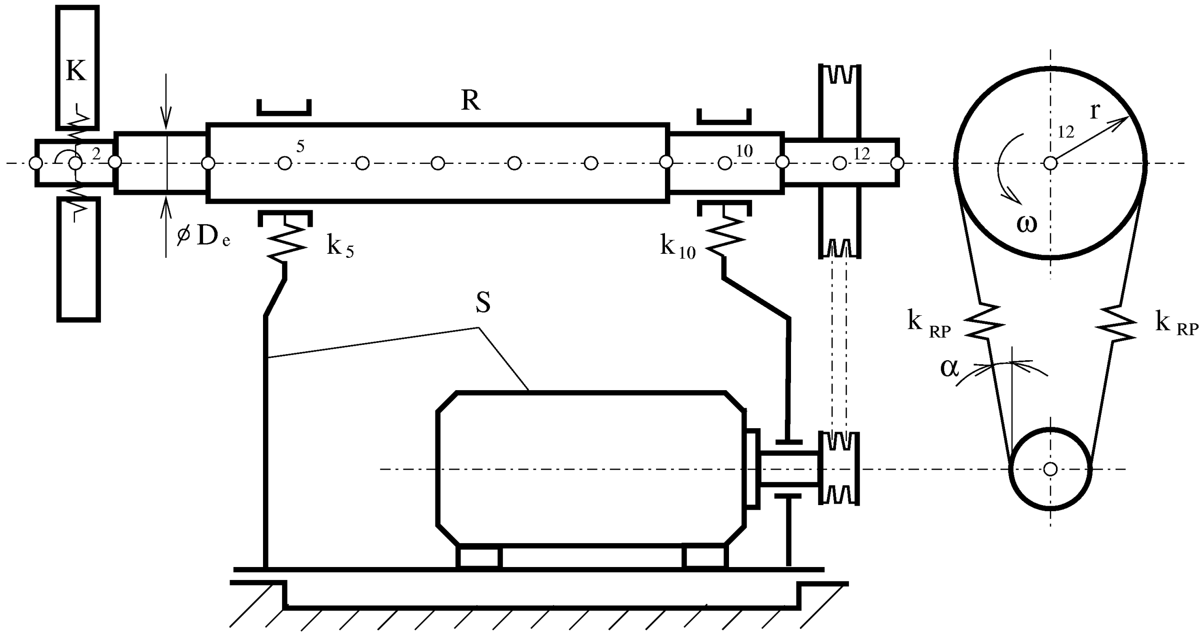
a podle jejich velikosti vybírat parametry pro ladění. Přeladění je chápáno jako optimalizační úloha s cílovou funkcí typu

$$\psi(\mathbf{p}) = \sum_{\nu} \left[a_\nu \ \Omega_\nu \left(\mathbf{p},\ \omega\right) + b_\nu \ \frac{1}{\Omega_\nu \left(\mathbf{p},\ \omega\right)} \right] , \tag{14}$$

kde váhové koeficienty a_ν jsou přiřazeny vlastním frekvencím přelaďovaným k nižším hodnotám a naopak b_ν k vyšším hodnotám.

4. Aplikační příklad

Nově vyvinutou metodu citlivostní analýzy a spektrálního ladění jsme testovali na příkladě rotoru (R) ventilátoru (obr. 1) zatím za předpokladu tuhé skříně (S). Rotor je uložen v uzlech 5 a 10 v anizotropních ložiskách o axiální tuhosti $k_x^{(l)} = \bar{k}_x \ k_l$ a radiálních tuhostech k_l ve vertikálním a $k_z^{(l)} = \bar{k}_z \ k_l$ v horizontálním směru. S řemenicí na hnacím hřídeli motoru je rotor vázán řemenovým převodem o tuhostech řemenů k_{RP} v obou větvích. Oběžné kolo (K) ventilátoru je pružně uložené k hřídeli.



Obr. 1 Schema ventilátoru

Za uvedených předpokladů konzervativní matematický model rotoru má tvar

$$\mathbf{M}_R \ \ddot{\mathbf{q}}_R(t) + \omega \, \mathbf{G}_R \ \dot{\mathbf{q}}_R(t) + \left(\mathbf{K}_R + \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{RP}\right) \mathbf{q}_R(t) = \mathbf{0} \ , \tag{15}$$

kde $\mathbf{M}_R, \mathbf{G}_R, \mathbf{K}_R$ jsou matice hmotnosti, gyroskopických účinků a tuhosti rotoru bez vazeb s rámem a $\mathbf{K}_L$ resp. $\mathbf{K}_{RP}$ jsou matice ložiskových vazeb a vazeb řemenovým převodem. Lze je vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{K}_L = \sum_l \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \mathbf{K}_l & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K}_{RP} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \mathbf{K}_{r\,p} & \\ & & \ddots \end{bmatrix},$$

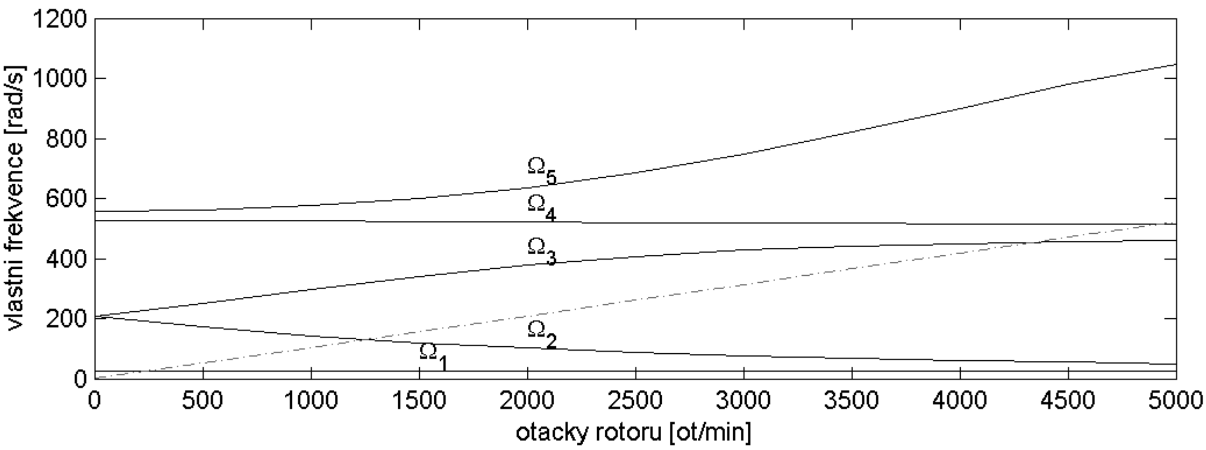
kde

$$\mathbf{K}_l = k_l \; diag\left(\bar{k}_x \quad 1 \quad \bar{k}_z\right) \qquad l = 5, 10$$

$$\mathbf{K}_{r\,p} = k_{RP} \begin{bmatrix} 2\cos^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\sin^2\alpha & -2r\sin\alpha \\ 0 & -2r\sin\alpha & 2r^2 \end{bmatrix}.$$

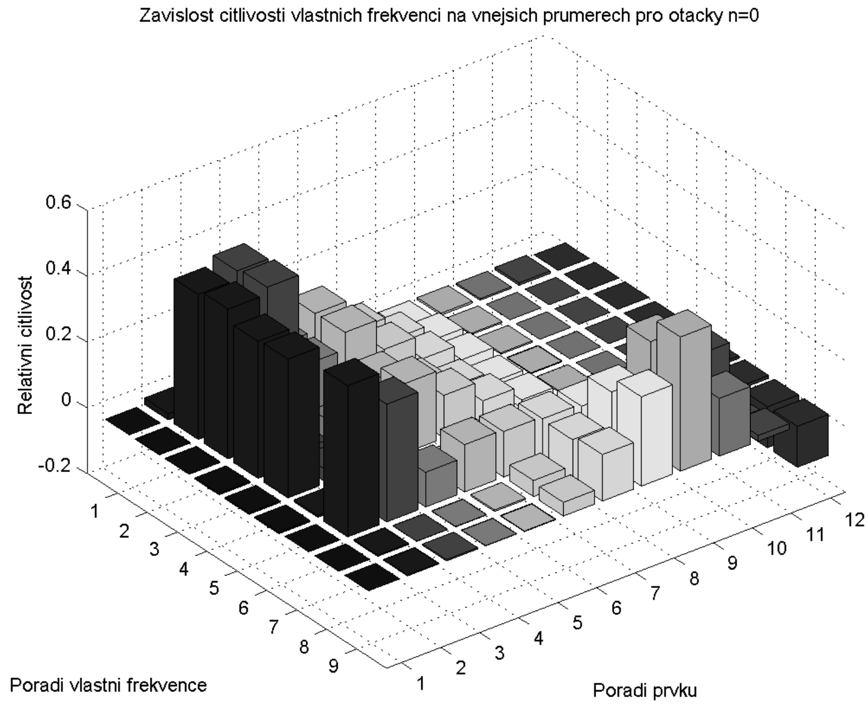
Lokalizace matic $\mathbf{K}_l$ a $\mathbf{K}_{r\,p}$ v maticích $\mathbf{K}_L$ a $\mathbf{K}_{RP}$ je dána pozicí souřadnic uzlů 5, 10 a 12 (obr. 1) ve vektoru zobecněných souřadnic $\mathbf{q}_R$.

Campbellův diagram rotoru ventilátoru pro rozsah jeho otáček za minutu $n \in \langle 0, 5000 \rangle$ je znázorněn na obr. 2. nejnižší vlastní frekvence, odpovídající torzním kmitům rotoru, nezávisí na jeho otáčkách. kritické otáčky rotoru jsou dány průsečíky náběhové přímky (vyznačené čerchovaně) s čarami $\Omega_\nu(n)$.

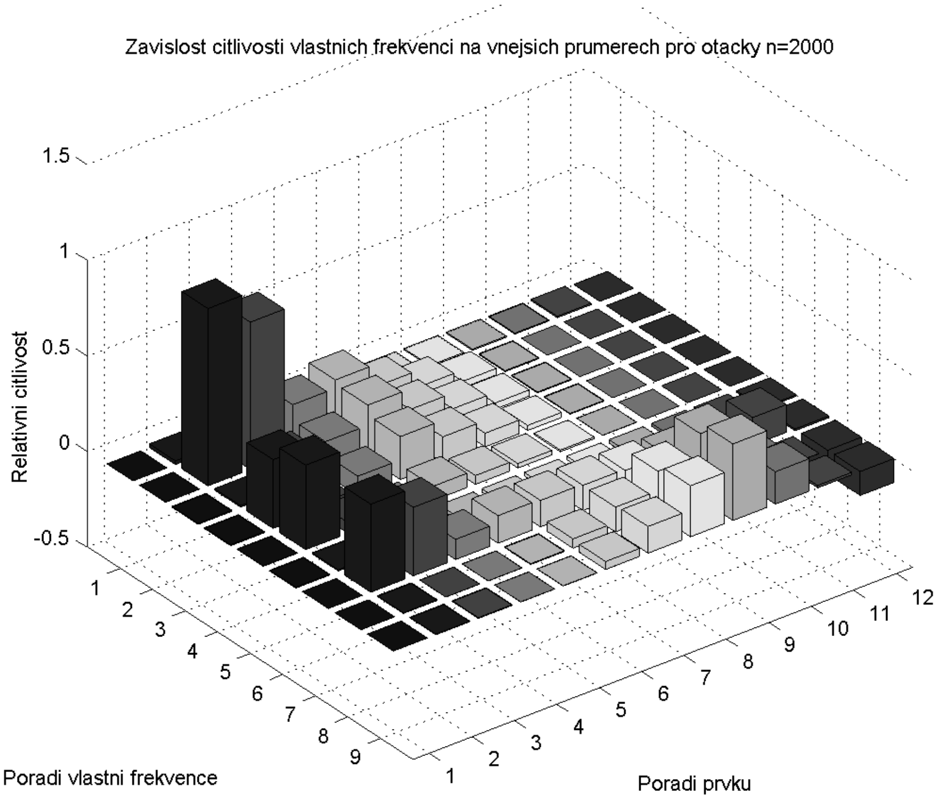


Obr. 2 Campbellův diagram rotoru ventilátoru

Relativní citlivosti prvních devíti vlastních frekvencí subsystému R vzhledem k průměrům D_e, $e = 1, 2, ..., 12$ rotorových prvků (mezi uzly vyznačenými na obr. 1) jsou znázorněny na obr. 3a (pro $n = 0$) a 3b (pro $n = 2000\ ot/\min$). Z obrázků je zřejmá velká citlivost 2., 4., 5. a 7. vlastní frekvence na změnu průměrů rotorových prvků nejbližších k oběžnému kolu a výrazná změna citlivosti v důsledku gyroskopických účinků zejména u 3. vlastní frekvence.



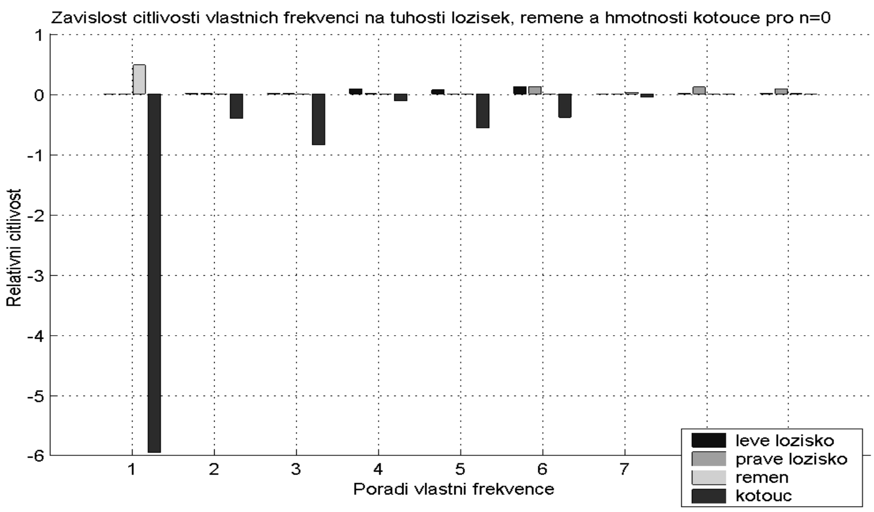
a)



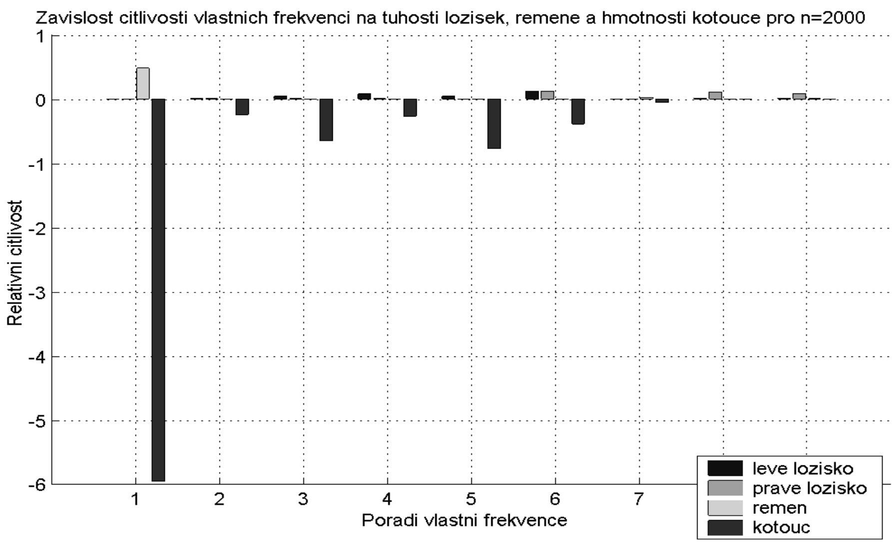
b)

Obr. 3 Citlivost vlastních frekvencí rotoru ventilátoru na změnu průměrů rotorových prvků při otáčkách rotoru $n = 0$ (a) a $n = 2000$ $ot/\min$ (b)

Relativní citlivosti týchž vlastních frekvencí vzhledem k tuhostem ložisek k_5, k_{10}, tuhosti řemenů k_{RP} a hmotnosti m kotouče (oběžného kola) při zachovaném poměru jeho momentů setrvačnosti k hmotnosti I/m, I_0/m jsou znázorněny na obr. 4a (pro $n = 0$) a 4b (pro $n = 2000$). Na citlivost 1. vlastní frekvence má dominantní vliv hmotnost kotouče a tuhost řemenů. Změnou hmotnosti kotouče lze též výrazně ovlivnit vlastní frekvence Ω_2 až Ω_6.



a)



b)

Obr. 4 Citlivost vlastních frekvencí rotoru ventilátoru na změnu tuhosti ložisek, řemene a hmotnosti kotouče při otáčkách rotoru $n = 0$ (a) a $n = 2000\ ot/\min$ (b)

Pro ilustraci uveďme úlohu přeladění rotoru ventilátoru, který má provozní otáčky $n_p = 1500\ ot/\min$, nacházející se blízko nad kritickými otáčkami $n_2 = 1247\ ot/\min$. Cílovou funkci formulujme v souladu s výrazem (14) ve tvaru

$$\psi(\mathbf{p}) = \Omega_2\,(\mathbf{p},\, \omega_p), \quad \omega_p = \frac{\pi\, n_p}{30}$$

s cílem oddálit provozní stav kritickému. Z analýzy citlivosti vyplývá, že za optimalizační parametry bude účelné vybrat poměrné hodnoty průměrů $p_1 = \frac{D_2}{D_2^{(0)}}$, $p_2 = \frac{D_3}{D_3^{(0)}}$ a poměrnou hmotnost kotouče $p_3 = \frac{m}{m^{(0)}}$ vzhledem k hodnotám na startu. Přípustnou oblast definujme množinou

$$\mathbf{p} \in \langle 0{,}8\ ;\ 1{,}2 \rangle\, \mathbf{p}_0$$

při startovacím vektoru parametrů $\mathbf{p}_0 = [1 \quad 1 \quad 1]^T$. Výsledkem minimalizace cílové funkce jsou kritické otáčky $n_2 = 988\ ot/\min$ dosažené při vektoru optimalizačních parametrů $\mathbf{p} = [0{,}8 \quad 1{,}094 \quad 1{,}2]^T$.

5. Závěr

Metoda umožňuje analyzovat citlivost vlastních frekvencí a spektrálně ladit rozsáhlé rotorové soustavy při libovolných otáčkách rotoru. Je založena na dekompozici soustavy na rotující subsystém (rotor) s výraznými gyroskopickými účinky a nerotující subsystém (stator). Oba subsystémy jsou provázány diskretizovanými vazbami. Vektory zobecněných souřadnic navzájem rozpojených subsystémů jsou transformovány svými modálními maticemi (submaticemi) při nulových otáčkách rotoru. Východiskem analýzy citlivosti vlastních frekvencí a spektrálního ladění je kondenzovaný konzervativní model soustavy ve stavovém prostoru. Parametrizovaný model rotoru umožňuje analytické vyjádření citlivosti vlastních frekvencí vzhledem k jeho návrhovým parametrům na základě modálních veličin kondenzovaného modelu soustavy při libovolných otáčkách rotoru. Metodika je algoritmizována a testována na reálné soustavě ventilátoru.

Příspěvek byl vypracován v rámci výzkumného záměru MSM 235200003 MŠMT, řešeném na katedře mechaniky Fakulty aplikovaných věd, Západočeské univerzity v Plzni.

5. Literatura

Krämer, E. (1993) Dynamics of Rotors and Foundations. Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg.

Zeman, V. (1994) Vibration of Mechanical Systems by the Modal Synthesis Method. ZAMM – Z. angew. Math. Mech., 74, 4, T 99 – T101.

Géradin, M., Rixen, D.(1997) Mechanical Vibrations. Wiley, Chichester.