Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002
13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

# MODELOVÁNÍ PORUŠENÍ V KOMPOZITECH S KŘEHKOU MATRICÍ POMOCÍ MKP

**T. Vysloužil, M. Kotoul a J. Vrbka***

*Abstrakt: Finite element analysis was attempted to modeling microcracks and overall response of solid composites (two-dimensional problem) under compression. As a mathematical model we consider an elastic matrix containing plastic inclusions with a pair of edge cracks itemming from the inclusion's poles into brittle matrix. Cracks are oriented in the compression direction.*

*Klíčová slova: MKP, keramika, cyklické zatěžování, lomová mechanika*

## 1. Úvod

Příspěvek navazuje na naši předešlou práci (Heger et al., 2001) týkající se modelování výsledné odezvy kompozitu s křehkou matricí zpevněnou tvárnými částicemi v podmínkách cyklického tlakového zatěžování. Smyslem citované práce bylo ověřit alespoň kvalitativně predikce získané pomocí mikromechanického modelu a klasických zprůměrovacích technik založených na koncepci vlastních deformací, (Kotoul, 2002). Je známo, že v křehkých materiálech zatížených tlakem dochází k nukleaci a růstu velkého počtu tahových mikrotrhlin, které vznikají v místech koncentrace tahových napětí v okolí různých nehomogenit. V podmínkách cyklického míjivého zatěžování je možné pozorovat akumulaci nepružné deformace vyvolané mikrotrhlinami ve směru středního napětí. Tento proces je podobný akumulaci plastické deformace v kovových materiálech při míjivém zatěžování a nazývá se cyklický creep. Je nutné však podotknout, že zatímco proces cyklického creepu v kovových materiálech je relativně podrobně prozkoumán a jeho podstata souvisí s neuzavřením hysterezních smyček v jednotlivých zátěžných cyklech způsobeném nevratností plastické deformace, v oblasti křehkých materiálů typu různých konstrukčních keramik, skel nebo polymerů existuje mnohem méně poznatků týkajících se tohoto problému. Při matematickém modelování cyklického creepu v kovových materiálech v rámci mechaniky kontinua se zpravidla využívá teorie plastického tečení s různými typy kinematického zpevnění.

*Ing. Tomáš Vysloužil, Ústav mechaniky těles, FSI VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, ČR, tel.: +420 5 4114 2871, e-mail: vyslouz@umtn.fme.vutbr.cz
Doc. RNDr. Michal Kotoul, DrSc., Ústav mechaniky těles, FSI VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, ČR, tel: +420 5 4114 2889, e-mail: kotoul@umtn.fme.vutbr.cz
Prof. RNDr. Ing. Jan Vrbka, DrSc., Ústav mechaniky těles, FSI VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, ČR, tel: +420 5 4114 2859, e-mail: vrbka@umtn.fme.vutbr.cz

Tvárné inkluze v kompozitech s křehkou matricí nemohou vykazovat při míjivém zatěžování cyklický creep, protože stísnění okolní tvrdou matricí nedovolí akumulaci plastické deformace. Jak ale bylo ukázáno pomocí mikromechanického modelu (Kotoul, 2002), je pokles stísnění vlivem mikrotrhlin, které vycházejí z pólů částic do matrice, úzce svázán s plasticitou částic a podle modelu může nastat cyklický creep kompozitu dokonce i tehdy, když pro popis plasticity částic se použije teorie plastického tečení s izotropním zpevněním. Při numerické simulaci uvedeného procesu pomocí analýzy $MKP$ systému $ANSYS$ jsme se uchýlili k periodické $2D$ aproximaci struktury kompozitu, protože je mimo naše výpočtové možnosti simulovat odezvu reprezentativního objemového elementu kompozitu s náhodným rozdělením částic. Byla uvažována čtyři různá geometrická uspořádání částic v kompozitu vzhledem ke směru největšího působícího tlakového zatížení, která jsou schematicky znázorněna na obr. 1. Čáry vycházející z pólů částic znázorňují mikrotrhliny. V podmínkách homogenního zatížení vykazují pak lokální pole jisté rysy symetrie, což umožňuje vybrat základní buňku pro výpočet lokálních polí i výsledné makroodezvy. V místech řezů rovinami symetrie byly zavedeny okrajové podmínky symetrie. Na obr. 1 jsou schémata základní buňky pro uvedené případy uspořádání částic

a) inkluze jsou uspořádány do čtverce,
b) inkluze jsou uspořádány do čtverce, který je pootočen o 45°,
c) inkluze jsou uspořádány do rovnoramenného trojúhelníku s jednou stranou vodorovnou,
d) inkluze jsou uspořádány do rovnoramenného trojúhelníku s jednou stranou svislou.

Vzhledem k existenci dvou rovin symetrie vůči tvaru vzorku i zatížení bylo možno konečnými prvky modelovat jen čtvrtinu buňky. Na obr. 2 je znázorněno schéma čtvrtiny základní buňky pro případ uspořádání částic $a$) a $b$) (pro $c$) a $d$) je schéma stejné, pouze se mění velikost poloměru inkluzí a velikost buňky ve směru osy $x_2$). Zatěžované plochy byly podrobeny podmínce couplingu. To znamená, že všem jejím uzlovým bodům byl přiřazen stejný, ale předem neznámý posuv ve směru zátěžného působení, který je rovněž výsledkem řešení úlohy. Mikrotrhlina se může při zatěžování otevírat a při odlehčování zavírat. Toto je provedeno tak, že pro část líce trhliny je předepsán kontakt s levou svislou stranou buňky. Stejné podmínky platí také podél části rozhraní částice/matrice, kde se simuluje částečná dekoheze tohoto rozhraní v souhlase s experimentálními daty. Zatímco v práci (Heger et al., 2001) jsme se soustředili na modelování globální odezvy na cyklické tlakové zatěžování, v tomto příspěvku je provedeno detailní vyšetřování K-faktoru pro mikrotrhlinu v různých fázích cyklického zatěžování a pro různé geometrie základní buňky.

## 2. Popis sítě a zatížení

Pro vytvoření sítě v programovém systému $ANSYS$ byly použity čtyřúhelníkové prvky s osmi uzly ($PLANE82$). V okolí kořene trhliny byly použity trojúhelníkové prvky s šesti uzly se středovými uzly posunutými do $\frac{1}{4}$ délky strany prvku ke kořeni trhliny, viz obr. 3. Kontakt na části rozhraní matrice/inkluze a podél trhliny byl řešen pomocí kontaktních prvků ($TARGE169$ a $CONTA172$). Protože se v ústí trhliny na rozhraní matrice/inkluze nezjišťovaly žádné parametry, byly použity pouze čtyřúhelníkové prvky s osmi uzly.

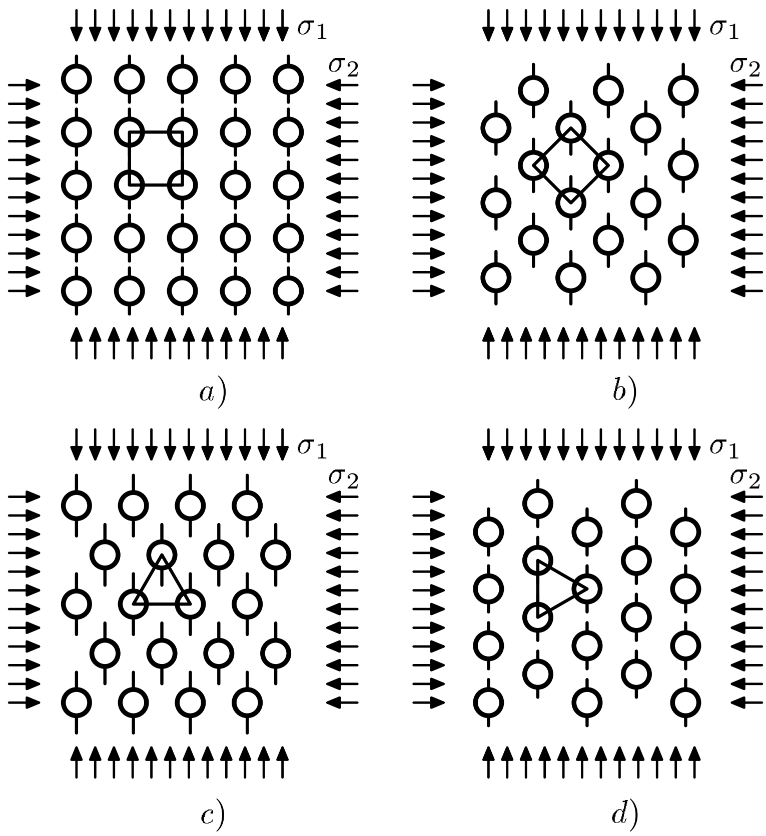
Základní buňky jsou zatěžovány napětím $\sigma_1$ (tlakové) ve směru osy $x_1$

$$\sigma_1 = -\sigma_0 \tag{1}$$

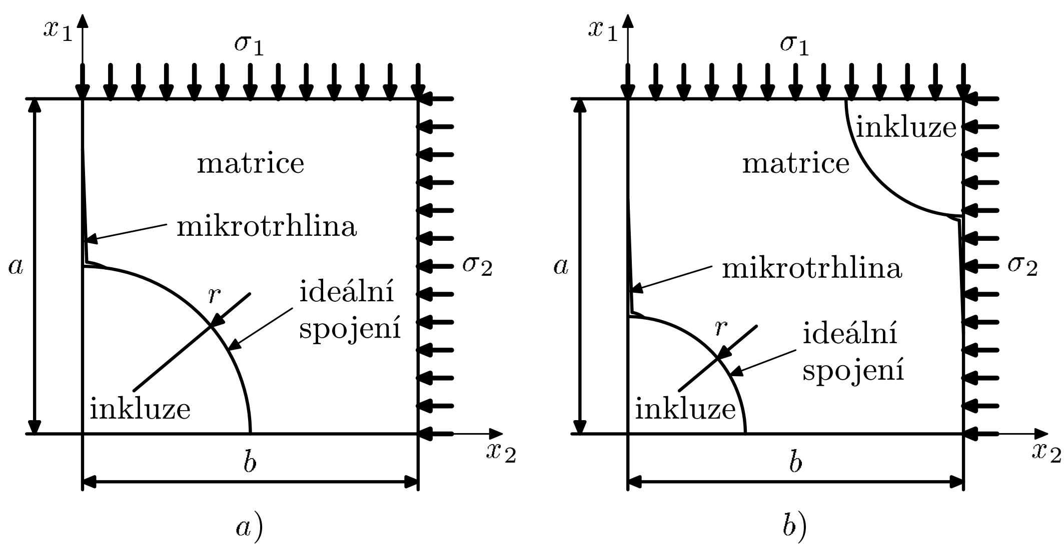
a napětím $\sigma_2$ (tlakové i tahové) ve směru osy $x_2$

$$\sigma_2 = -\sigma_0 \cdot \lambda, \tag{2}$$

kde $|\lambda| = \left|\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\right| < 1$ a pro $\lambda > 0$ je příčné zatížení tlakové a pro $\lambda < 0$ tahové.




Obr. 1 Geometrické uspořádání inkluzí v kompozitu



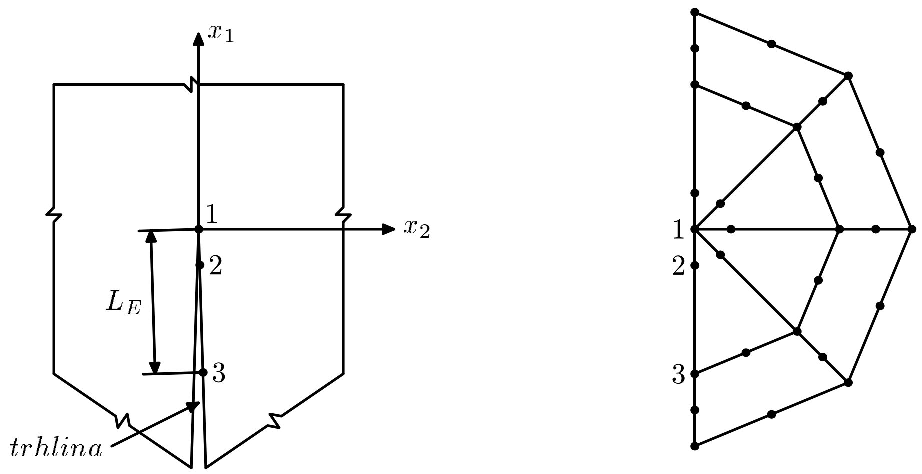

Obr. 2 Tvar a zatížení buňky $a$) a $b$)

Výpočty byly prováděny pro kompozity s objemovým podílem inkluzí

$$\rho_i = k\frac{\pi r^2}{ab} = 0.2, \tag{3}$$

kde $k = \frac{1}{4}$ pro konfiguraci $a$) a $k = \frac{1}{2}$ pro konfigurace $b$), $c$) a $d$), $2a$ je vertikální vzdálenost středů inkluzí, $2b$ je horizontální vzdálenost středů inkluzí, $r$ je poloměr inkluze.

Součinitel intenzity napětí $K_I$ se počítal z posuvů ($v_1$, $v_2$ a $v_3$) ve směru osy $x_2$ uzlů 1, 2 a 3 na trojúhelníkovém prvku v kořeni trhliny, viz. obr. 3.




Obr. 3 Síť konečných prvků v okolí kořene trhliny

Uzel 1 se nachází v kořeni trhliny, uzel 2 je umístěný v $\frac{1}{4}$ strany prvku a uzel 3 na konci strany prvku o délce $L_E$. Pro výpočet $K_I$ se použil vzorec

$$K_I = \frac{E\sqrt{\left(\frac{2\pi}{L_E}\right)}(4v_2 - v_3 - 3v_1)}{4(1-\nu^2)}. \tag{4}$$

Numerické výsledky byly vyjádřeny pomocí bezrozměrného součinitele intenzity napětí $F_I$ definovaného vztahem

$$F_I = \frac{K_I}{\sigma_{0\,max}\sqrt{\pi l}}, \tag{5}$$

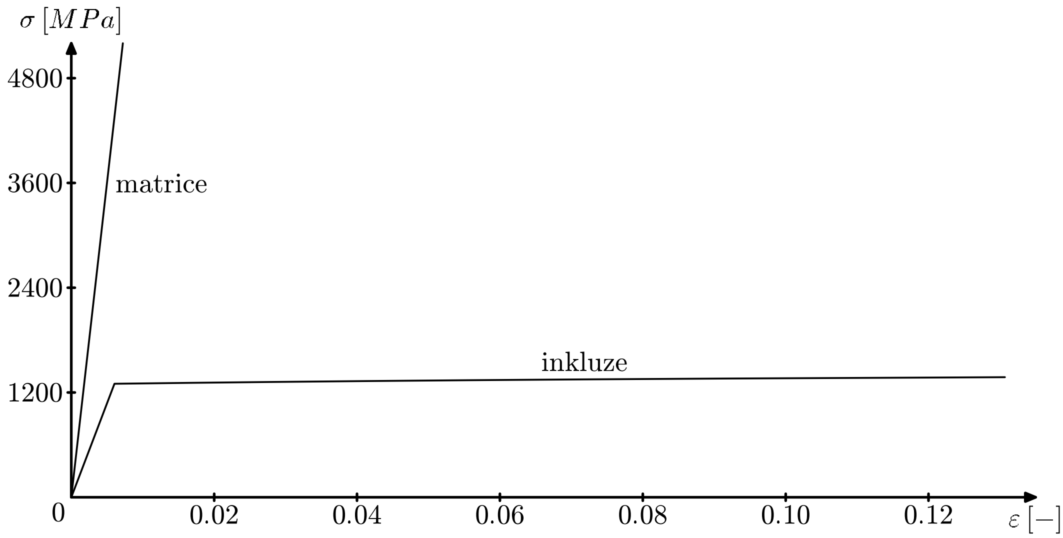
přičemž v závislostech $F_I$ na délce trhliny se používá bezrozměrná délka trhliny zavedená vztahem

$$L = \frac{l}{a-r} \qquad L \in (0,1). \tag{6}$$

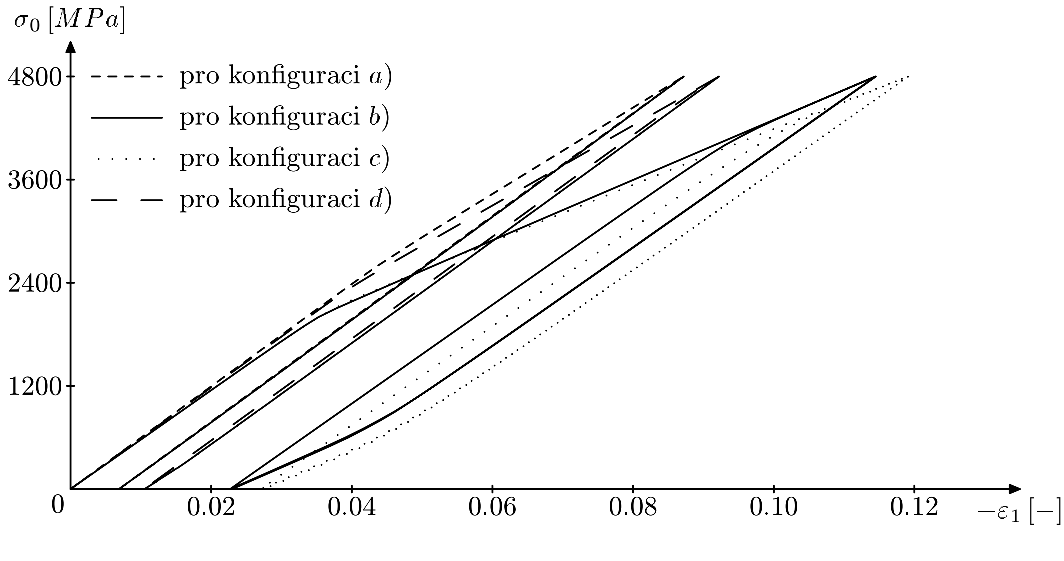
Pak s využitím (6) a definice pro objemový podíl částic (3) přepíšeme vztah (5) do tvaru

$$F_I = \frac{K_I}{\sigma_{0\,max}\sqrt{\pi L}\sqrt{a\left(1-\sqrt{\frac{0.2}{k\pi}\frac{b}{a}}\right)}}. \tag{7}$$

Užitím kontaktních prvků docházelo v některých případech (např. pro $L = 0.5$, $\lambda = 0.1$) k penetraci ($v_2 < 0$, $v_3 < 0$), avšak při uzavření trhliny musí být posuvy bodů na líci trhliny nulové. Tyto hodnoty posuvů se nahradily nulou. V těchto případech bylo $K_I$ vypočtené z (5) nulové, což je v souladu se skutečností. Hodnoty $K_I$ vypočtené programovým systémem $ANSYS$ byly nenulové (kladné, 1000 krát menší, než při zatížení). V případech, kdy nedocházelo k penetraci se výsledky lišily v řádu desetin procent. Kvůli rychlejšímu postupu se používaly hodnoty $K_I$ počítané z (5).



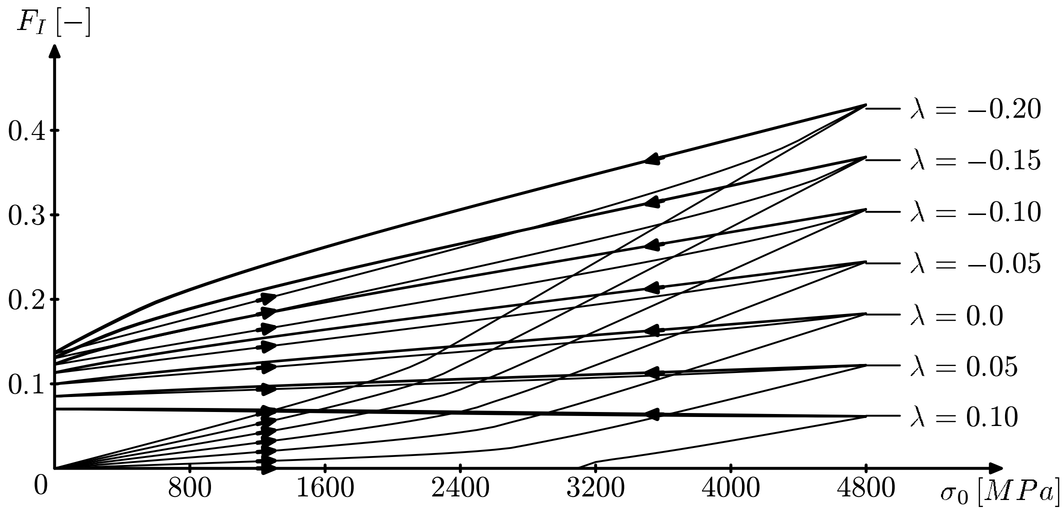

Obr. 4 Charakteristiky matrice a inkluze



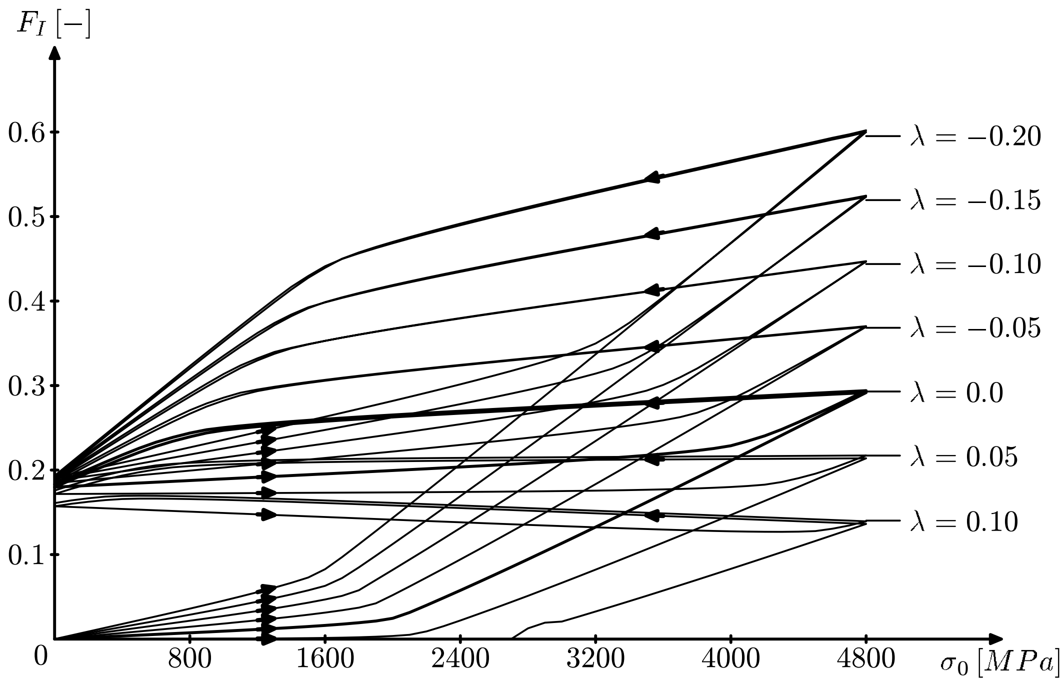

Obr. 5 Globální napěťově deformační diagram kompozitu pro $L = 0.5$, $\lambda = 0.0$

### 3. Numerické výsledky

Pro výpočty byly použity materiálové charakteristiky matrice a inkluzí ilustrované na obr. 4. Obr. 5 pak uvádí napěťově deformační diagram pro celkovou odezvu kompozitu pro případ $L = 0.5$ a $\lambda = 0.0$. Na obr. 5 je vidět vliv zbytkových napětí, který se projevuje zpětnou plastickou deformací při odlehčení.

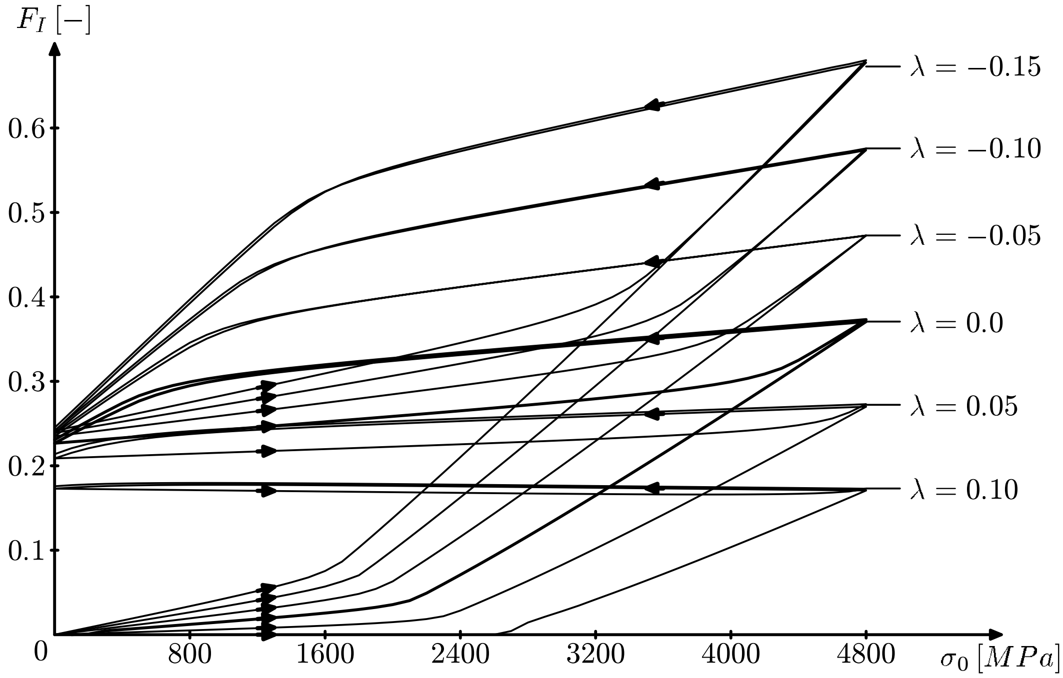



Obr. 6 Závislost $F_I$ na napětí $\sigma_0$ a na $\lambda$ pro uspořádání $a$), $L = 0.5$

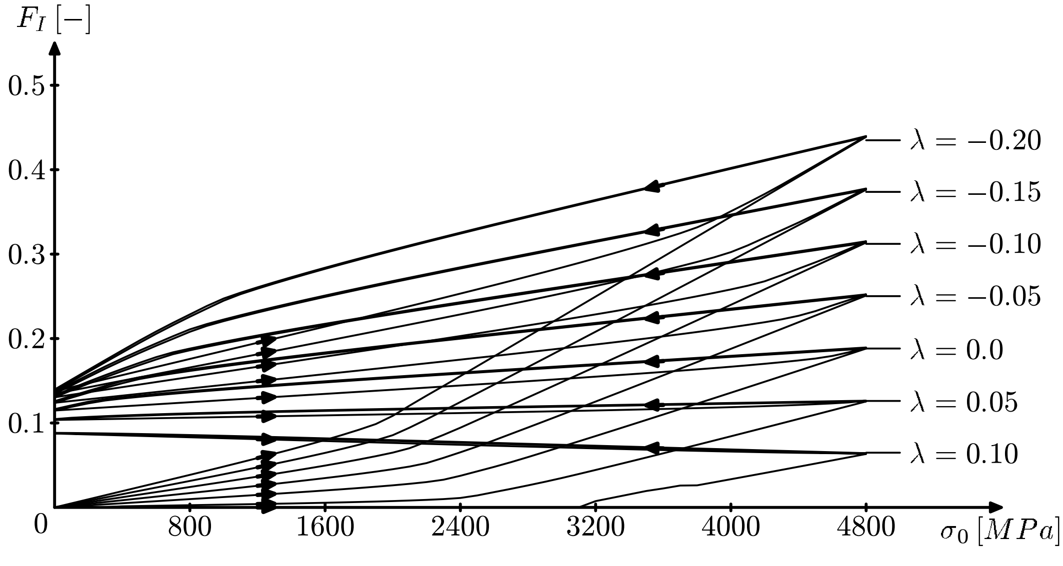



Obr. 7 Závislost $F_I$ na napětí $\sigma_0$ a na $\lambda$ pro uspořádání $b$) , $L = 0.5$

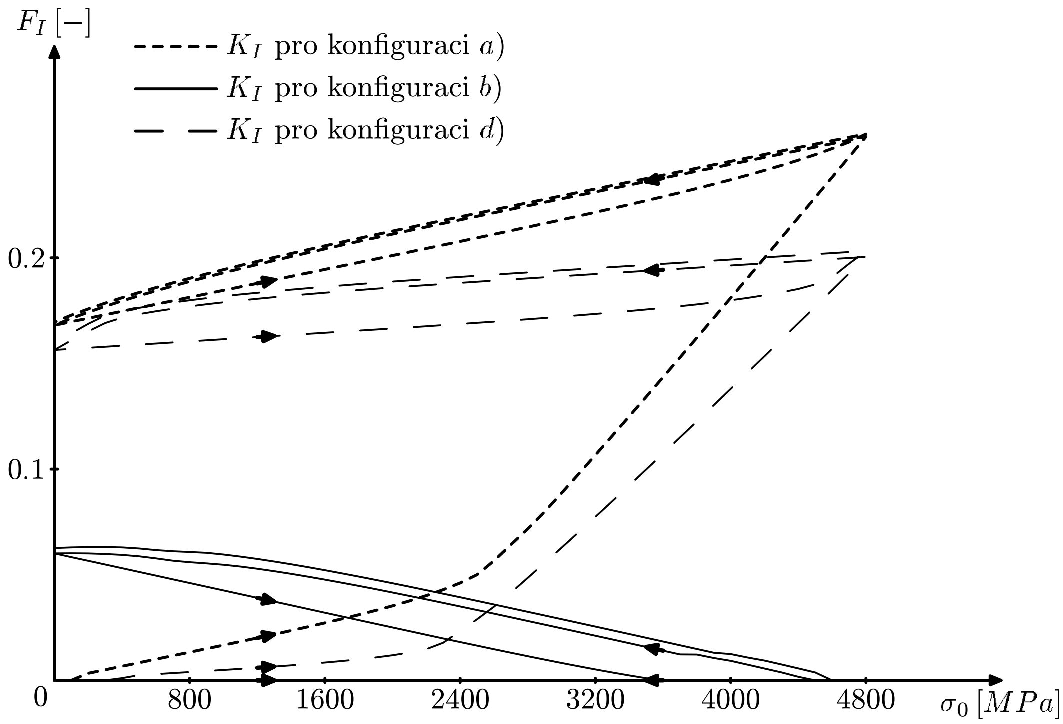
Hlavním úkolem bylo stanovit závislost bezrozměrného součinitele napětí $F_I$ na velikosti osového zatížení $\sigma_0$, při různém příčném zatížení charakterizovaném parametrem $\lambda$ (příčné napětí tahové, či tlakové) a pro různé bezrozměrné délky trhliny $L$.



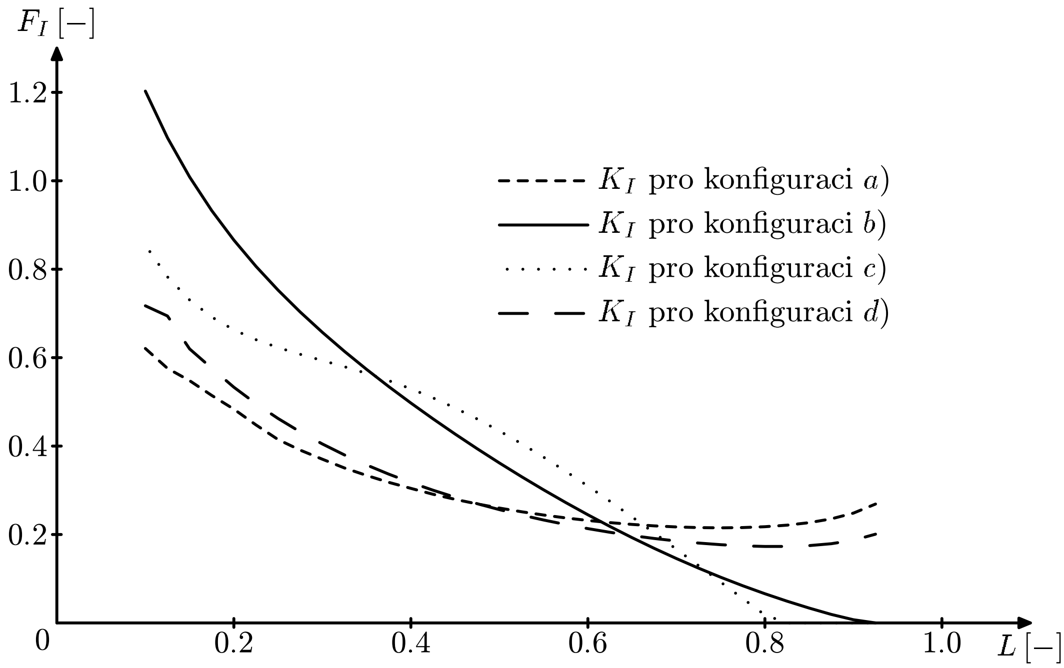

Obr. 8 Závislost $F_I$ na napětí $\sigma_0$ a na $\lambda$ pro uspořádání $c)$ , $L = 0.5$



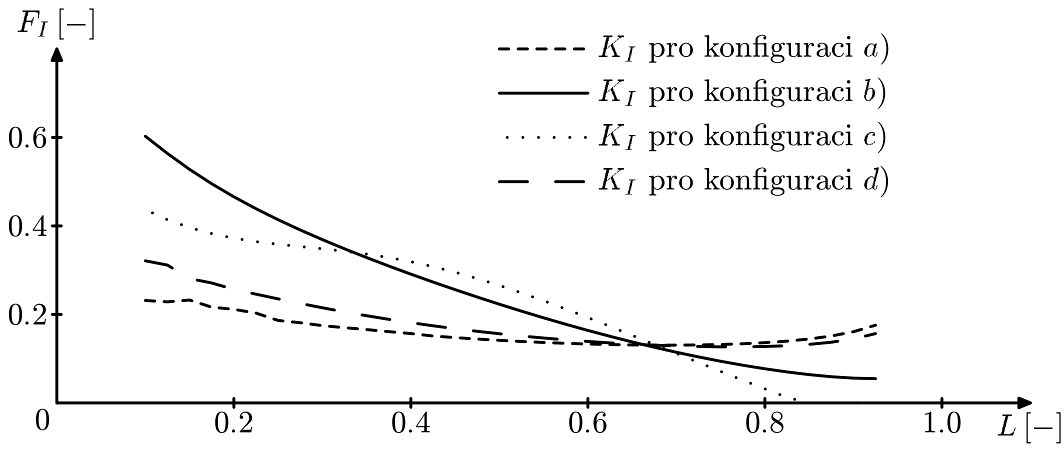

Obr. 9 Závislost $F_I$ na napětí $\sigma_0$ a na $\lambda$ pro uspořádání $d)$ , $L = 0.5$




Obr. 10 Závislost $F_I$ na napětí $\sigma_0$ pro $L = 0.925$ a konfigurace inkluzí $a)$, $b)$ a $d)$




Obr. 11 Závislost $F_I$ na délce trhliny $L$ při maximálním zatížení




Obr. 12 Závislost $F_I$ na délce trhliny $L$ při úplném odlehčení

Na obr. 6 až 9 jsou pro geometrická uspořádání inkluzí $a)$ až $d)$ zakresleny průběhy $F_I$ při prvních dvou zátěžných cyklech v závislosti na napětí $\sigma_0$ pro různé hodnoty $\lambda$ při bezrozměrné délce $L = 0.5$ (šipky označují směr zatěžování). Z obrázků je patrné, že pro příčné tahové zatížení ($\lambda < 0$) je $F_I$ větší, než pro příčné zatížení tlakové ($\lambda > 0$). U všech uspořádání částic při $\lambda = 0.1$ je $F_I$ při zatížení v prvním cyklu nulové až do určité hodnoty osového zatížení $\sigma_0$, které závisí na uspořádání inkluzí. Teprve po překročení této hodnoty (např. $\sigma_0 = 3100MPa$ pro uspořádání $a)$) $F_I$ roste. Při odlehčování a v dalších cyklech $F_I$ roste při odlehčování a klesá při zatěžování. Pro ostatní hodnoty $\lambda$ je v celém intervalu zatěžování $F_I$ rostoucí a klesající v celém intervalu odlehčování. U všech uspořádání částic je průběh $F_I$ při zatěžování a odlehčování odlišný, což vede ke vzniku smyček v diagramu $F_I - \sigma_0$. Geometrické uspořádání částic má vliv na plochu uzavřenou smyčkami. Tato plocha se zvětšuje se zvětšujícím se příčným tahovým zatížením.

Předchozí výsledky ilustrují vliv plastických deformací částic a zbytkových napětí na součinitel intenzity napětí. Zlomy v zatěžujících i odlehčujících větvích diagramů $F_I - \sigma_0$ korespondují se zahájením pružně-plastických deformací viz obr. 5, přičemž v případě odlehčování se jedná o zpětné plastické deformace vyvolané reziduální napjatostí. Zároveň je patrné, že pro uspořádání $b)$ a $c)$ dochází dříve k pružně-plastickým deformacím částic a vzniká větší tahová zbytková napjatost než pro uspořádání $a)$ a $d)$. V důsledku je pak pro danou délku větší i součinitel intenzity napětí.

Na obr. 10 jsou pro geometrická uspořádání inkluzí $a)$ až $d)$ zakresleny průběhy $F_I$ při prvních dvou zátěžných cyklech v závislosti na napětí $\sigma$ pro bezrozměrnou délku $L = 0.925$. Pro konfiguraci $c)$ je při zatěžování i odlehčování $F_I = 0$ a proto není křivka v obrázku uvedena. Zatímco u konfigurace $a)$ a $d)$ jsou závislosti na napětí $\sigma_0$ podobné jako pro $L = 0.5$ a $\lambda = 0$, u $c)$ a $b)$ jsou odlišné. Pro konfiguraci $b)$ během prvního zatěžování a krátce po začátku odlehčování je $F_I = 0$, s dalším odlehčováním roste a při úplném odlehčení nabývá maxima. Při zatěžování v druhém cyklu $F_I$ klesá a od $\sigma_0 = 3600MPa$ nabývá nulové hodnoty a roste až při odlehčování od $4600MPa$.

Na obr. 11 a 12 jsou pro uspořádání inkluzí $a$) až $d$) zakresleny závislosti $F_I$ na bezrozměrné délce trhliny $L$ pro zatížení $4800MPa$ (obr. 11) a úplné odlehčení (obr. 12). S rostoucí bezrozměrnou délkou trhliny $L$ dochází k poklesu $F_I$, u případu $c$) klesá až na nulu při zatížení i odlehčení, u případu $b$) pouze při zatížení. Pro případy $a$) a $d$) nabývá $F_I$ kolem hodnoty $L = 0.75$ minima a dále se zvětšujícím se $L$ roste.

## 4. Závěr

Klesající závislost normovaného součinitele intenzity napětí $F_I$ na délce trhliny je ve shodě s obecnými poznatky mechaniky trhlin zatíženými až v určité vzdálenosti za vrcholem trhliny. Kvalitativně obdobné chování vykazuje součinitel intenzity napětí pro trhlinu s klesajícím zatížením ve směru k vrcholu trhliny, což v podstatě odpovídá sledovanému problému, kdy koncentrované tahové napětí v okolí pólů částic rychle klesá se vzdáleností. Důležitou roli však také hraje délka trhliny ve vztahu k geometrickému uspořádání částic.

Z obrázků je patrné, že závislost $F_I$ na napětí $\sigma_0$ se pro řešené konfigurace $a$) až $d$) a pro $L = 0.5$ liší pouze kvantitativně, nikoli však kvalitativně. To však neplatí pro celý interval $L$. Závislost $F_I$ pro $\lambda = 0.0$, $L = 0.925$ (obr. 10) je kvalitativně závislá na konfiguraci. Výsledky pro konfigurace $a$) a $d$) jsou podobné, ale $b$) a $c$) vykazují odlišné závislosti. U konfigurace $c$) s růstem $L$ klesá $F_I$ až na nulu. V daném případě je poměr stran buňky $\frac{b}{a} = 0.505$ (ve směru osy $x_1$ jsou inkluze vzdálenější než ve směru osy $x_2$), vrcholy trhlin se nacházejí ve směru $x_2$ mezi inkluzemi a vzniká zde tlakové napětí ve směru osy $x_2$, které trhlinu uzavírá. U konfigurace $b$) klesne $F_I$ na nulu pouze při zatížení, ale ne již při odlehčení, protože je zde poměr $\frac{b}{a} = 1$ a tlakové napětí ve směru osy $x_2$ je menší. Pro konfiguraci $d$) je poměr $\frac{b}{a} = 1.723$ (ve směru osy $x_2$ jsou inkluze vzdálenější než ve směru osy $x_1$) a nevzniká zde takové tlakové napětí, které by trhlinu uzavíralo. Pro konfiguraci a) je sice poměr $\frac{b}{a} = 1$, ale vrcholy trhlin se nenacházejí mezi inkluzemi ve směru $x_2$ a tudíž zde nemůže vznikat tlakové napětí ve směru osy $x_2$, které by trhlinu uzavíralo.

Růst součinitele intenzity napětí pro uspořádání $a$) a $d$) a $L > 0.75$ dokládá nastupující interakci nejbližších trhlin, kterou lze pozorovat jak při zatížení, tak při odlehčení, viz obr. 12, kdy jsou trhliny podrobeny pouze zbytkovým napětím. V případě geometrického uspořádání $b$) a $c$) a úplném zatížení je vliv interakce v porovnání s výše diskutovaným účinkem tlakových napětí zanedbatelný (viz zvláště případ $c$)). Při úplném odlehčení je možné pozorovat nastupující interakci i pro uspořádání $b$), viz obr. 12. Interakce trhlin při uvedeném tlakovém zatěžování zřejmě hraje klíčovou roli při porušení materiálu v tzv. "slabbing" módu. Adekvátní modelování tohoto mechanismu bude předmětem zájmu dalšího výzkumu.

## 5. Literatura

Heger, J., Kotoul, M. & Vysloužil, T. (2001) FE modelling of particulate composites with brittle matrix under cyclic compression loading, in Proc. 3rd Int. Conf. Mat. Struct. & Micro-mech. of Fracture ,Brno, 2001, 347-354
Kotoul, M (2002) Constitutive modelling of cyclic plasticity of metal particulate reinforced brittle matrix composites under compression-compression loading, J. Mech. Phys. Solids 50, 1099-1124.

## 6. Poděkování

Tato práce vznikla díky finanční podpoře prostřednictvím projektu MSM 262100001.