



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF ASYMMETRY IN CASE
OF THE VIBRATION OF A RESILIENTLY SUPPORTED PLATE -
APPLICATION ON THE VIBRATION OF VEHICLE III

J. Volek, K. Kočí, J. Husák*

As in case of previous papers published on conference IM 2000, 2001 the influence of asymmetry at oscillating three-dimensional resiliently beared body, rigid plate, forced by kinematical excitation was investigated. They are compared the fully symmetrical (two axes of symmetry) and partly symmetrical cases (one axis of symmetry, centric symmetry). The submitted solution is applied on common used method, determination of natural vehicle frequency "comedown from the wedges".

Potřebu vyšetřování vlivu nesymetrie při kmitání prostorově pružně uloženého tělesa, vozidla je možno doložit rozborem jedné metody pro experimentální stanovení vlastních frekvencí kolejového vozidla [1]. Proto v návaznosti na příspěvky na konferenci IM 2000, 2001 je tento vliv vyšetřován při kinematickém buzení vynuceného kmitání prostorově pružně uložené tuhé desky představující nejjednodušší třírozměrný model vozidla. Cílem je posoudit vhodnost, podmínky platnosti metody shazování s klínů 1).

Při symetrickém uspořádání je kmitání desky při uvažování jen vertikálních posuvů, jako soustavy o třech stupních volnosti, popsáno třemi vzájemně nezávislými rovnicemi [2], [3], [4]:

$$\begin{vmatrix} m, & 0, & 0 \\ 0, & J_x, & 0 \\ 0, & 0, & J_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & 0, & 0 \\ 0, & a_{22}, & 0 \\ 0, & 0, & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_z(t) \\ F_x(t) \\ F_y(t) \end{vmatrix} \quad (1)$$

Řešení těchto rovnic při nulových počátečních podmínkách je dáno vztahy [5]

$$z(t) = \frac{1}{m\omega_z} \int_0^t F_z(\tau) \sin\omega_z(t - \tau) d\tau$$

* PhDr. Ing. Jan Volek, Ing. Karel Kočí, Ing. Josef Husák, ČD – Výzkumný ústav železniční, Oblast materiálů a konstrukcí, 281 02 Cerhenice, tel., fax.: 0321/ 792 410, e-mai.: koci@pds.pce.cd rail.cz

$$\varphi_x(t) = \frac{1}{J_x \omega_x} \int_0^t F_x(\tau) \sin \omega_x(t - \tau) d\tau \quad (2)$$

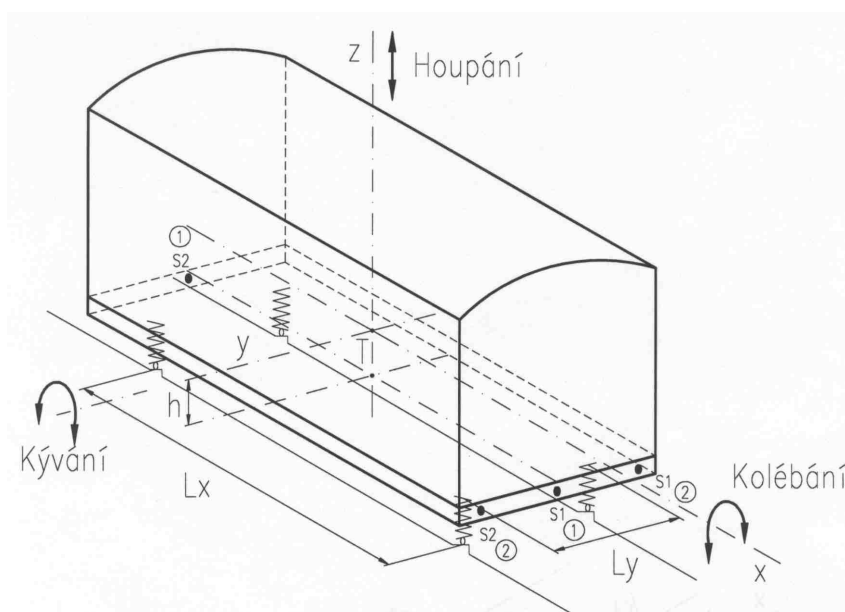
$$\varphi_y(t) = \frac{1}{J_y \omega_y} \int_0^t F_y(\tau) \sin \omega_y(t - \tau) d\tau$$

$$\text{kde} \quad \omega_z^2 = \frac{4k}{m} \quad \omega_x^2 = \frac{4k}{m} \left(\frac{l_y}{i_x} \right)^2 \quad \omega_y^2 = \frac{4k}{m} \left(\frac{l_x}{i_y} \right)^2 \quad (2a)$$

Při zvoleném souřadnicovém systému funkce $z(t)$ udává vertikální posuv $w_T(t)$ těžiště desky. Výsledný vertikální posuv libovolného bodu i

$$w_i(t) = z(t) + x_i \varphi_x(t) - y_i \varphi_y(t) \quad (3)$$

Pro posouzení metody shazování s klínů je třeba určit funkce $F_z(t)$, $F_x(t)$, $F_y(t)$ kinematického buzení jednotlivých částí zkoušky pro stanovení vlastních frekvencí tří vyšetřovaných kmitavých pohybů - ω_z - houpání, ω_x - kývání, ω_y - kolébání obr. 1



Za předpokladu stejných konstant tuhosti vypružení $k_i = k$ a stejné geometrie klínů, výšky $h_{01} = h_0$ a délky, je možno průběh zkoušky rozdělit na dvě fáze:

$$\begin{array}{lll} \text{nájezd na klín} & \text{pro } 0 \leq t \leq t_1 & h(t) = h_0 \frac{t}{t_1} \\ \text{shoz a kmitání} & \text{pro } t \leq t_1 & h(t) = -h_0 H(t) \end{array} \quad (4)$$

kde $h(t)$ definuje vertikální změnu základu pružného uložení .

$H(t)$ je Heavisideova funkce jednotkového skoku. Je zřejmé, že tato matematická formulace funkce $h(t)$ druhé fáze shozu nepopisuje skutečný pohyb kola vozidla. Avšak

usnadňuje porovnat kmitání při symetrickém a nesymetrickém uspořádání a posouzení metody shozu aplikací na zvolený model – desku.

Při zjišťování vlastní frekvence houpání ω_z jsou v rovnicích (2) funkce kinematického buzení.

$$F_z(t) = 4kh(t) \quad F_x(t) = 0 \quad F_y(t) = 0 \quad (5)$$

vozidlo přejíždí přes čtyři klíny současně všemi čtyřmi koly, tj. místy vypružení.

Podle (4) je v první fázi vertikální posuv těžiště

$$z(t) = \frac{4kh_0}{m\omega_z \cdot t_1} \int_0^{t_1} \tau \sin\omega_z(t - t_1) d\tau$$

tedy

$$z(t) = h_0 \left[\frac{1}{t_1 \omega_z} (\sin\omega_z(t - t_1) - \sin\omega_z t) + \cos\omega_z(t - t_1) \right]$$

pro $t = t_1$ je posuv těžiště v okamžiku skoku

$$z(t_1) = h_0 \left[1 - \frac{\sin\omega_z t_1}{t_1 \omega_z} \right]$$

Vzhledem k malé rychlosti nájezdu vozidla na klín je možno druhý člen zanedbat, tj. považovat fázi nájezdu za kvazistatický děj. Stejný závěr se získá v případě kinematického buzení skokem z koleje vyšší na kolej nižší úrovně o h_0 .

Pak poloha těžiště $w_T(t_1) = h_0$

Druhá fáze shozu pro $t > t_1$

$$z(t) = -\frac{4kh_0}{m\omega_z} \int_{t_1}^t \sin\omega_z(t - t_1) dt = -h_0 [1 - \cos\omega_z(t - t_1)]$$

Posuv těžiště od okamžiku shozu $w_T(t) = h_0 \cos\omega_z t$

a odpovídající zrychlení $\ddot{w}_T(t) = -h_0 \omega_z^2 \cos\omega_z t$ (6)

Podle metodiky zkoušky jsou snímače zrychlení S1 a S2 v poloze (1), tj. v horizontální rovině v podélné ose jdoucí těžištěm. Ze záznamu signálů se z odečtené periody T určí úhlová frekvence $\omega_z = \frac{2\pi}{T}$ a frekvence $f_z = \frac{1}{T}$ vertikálních posuvů - houpání.

Při zjišťování vlastní úhlové frekvence ω_z kolébání jsou podle metodiky zkoušky použity klíny 1. a 4.

$$h_{01} = h_{04} = h_0 \quad h_{02} = h_{03} = 0 \quad (7)$$

Funkce kinematického buzení v rovnicích (2)

$$F_z(t) = 2kh(t) \quad F_x(t) = 2kh(t)l_y \quad F_y(t) = 0 \quad (8)$$

Dva snímače jsou S1 a S2 umístěny v horizontální rovině těžiště na okraji vozidla v místě (2) ve vzdálenosti $l_y = \frac{L_y}{2}$ od podélné osy. Zjišťují zrychlení v místě 3 a 4.

Signály snímačů se odečtou z důvodu eliminace vlivu $z(t)$. Podle vztahu (3)

$$w_3(t) = w_T(t) + x_3 \varphi_y(t) - y_3 \varphi_x(t) \quad w_4(t) = w_T(t) + x_4 \varphi_y(t) - y_4 \varphi_x(t)$$

je jejich rozdíl pro $x_3 = x_4$ a pro $y_4 = -y_3 = l_y$

$$w_4(t) - w_3(t) = -2l_y \varphi_x(t)$$

Rozdíl zrychlení v těchto bodech s ohledem na (2) a (2a) lze podobným postupem jako při určení (6) odvodit

$$\ddot{w}_4(t) - \ddot{w}_3(t) = h_0 \omega_x^2 \cos \omega_x t \quad (9)$$

Ze záznamu signálů snímačů se z odečtené periody T určí úhlová frekvence $\omega_x = \frac{2\pi}{T}$, resp. frekvence $f_x = \frac{1}{T}$ rotačních pohybů kolem podélné osy y jdoucí těžištěm – kolébání.

Při zjišťování vlastní úhlové frekvence kývání ω_y jsou podle metodiky zkoušky použity klíny 1 a 2.

$$h_{01} = h_{02} = h_0 \quad h_{03} = h_{04} = 0 \quad (10)$$

Funkce kinematického buzení v rovnicích (2)

$$F_z(t) = 2kh(t) \quad F_x(t) = 0 \quad F_y(t) = 2kl_x h_0 \quad (11)$$

Dva snímače zrychlení S1 a S2 umístěné v horizontální rovině těžiště ve vzdálenosti $x_1 = -x_4 = l_x$ od příčné osy y zjišťují zrychlení v bodech 1 a 2 pružného uložení. Signály se odečítají z důvodu eliminace vlivu $z(t)$. Podle vztahu (3) s ohledem na (2a)

$$w_1(t) - w_4(t) = h_0 \cos \omega_y t$$

$$\text{a rozdíl zrychlení} \quad \ddot{w}_1(t) - \ddot{w}_4(t) = -h_0 \omega_y^2 \cos \omega_y t \quad (12)$$

Ze záznamu signálů snímačů se z odečtené periody T určí úhlová frekvence $\omega_y = \frac{2\pi}{T}$, resp. frekvence $f_x = \frac{1}{T}$ rotačních pohybů kolem příčné osy y jdoucí těžištěm – kývání.

Závěr:

Zkoušku M13 shazování s klínů je možno použít, jestliže soustava a její buzení splňují podmínky symetrie

1. Konstanty tuhosti pružin jsou stejné
2. Místa pružného uložení jsou souměrná podle geometrických os symetrie
3. Podélné a příčné osy geometrické symetrie jsou hlavními centrálními osami setrvačnosti
4. Jsou splněny podmínky pro uložení snímačů v horizontální rovině těžiště, vozidla
5. Jsou splněny podmínky symetrického kinematického buzení, tj. uložení a tvar klínů.

Analogickým postupem je aplikována metodika zkoušky M13 na zvolený model tuhou desku při nesymetrickém uspořádání. Nejjednodušší a pravděpodobně častý případ nesymetrie je vychýlení těžiště z geometrického centra ve směru jen jedné osy, např. y od osy podélné x o vzdálenost e_y . V tomto případě pohybové rovnice mají tvar

$$\begin{vmatrix} m, & 0, & 0 \\ 0, & J_x, & 0 \\ 0, & 0, & J_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21}, & 0 \\ a_{12}, & a_{22}, & 0 \\ 0, & 0, & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_z(t) \\ F_x(t) \\ F_y(t) \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$\text{kde} \quad a_{11} = 4k \quad a_{12} = a_{21} = 4ke_y \quad a_{22} = 4k(l_y^2 + e_y^2)$$

Řešení nezávislé třetí rovnice pro $\varphi_y(t)$ je dáno třetím vztahem (2). Řešení simultánních rovnic pro $z(t)$ a $\varphi(t)$ pro nulové počáteční podmínky [5]

$$z(t) = \frac{\omega_x^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t F_z(\tau) \sin\omega_1(t-\tau) d\tau - \frac{\omega_x^2 - \omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t F_z(\tau) \sin\omega_2(t-\tau) d\tau - \frac{b_{zx}}{J_x(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left[\frac{1}{\omega_1} \int_0^t F_x(\tau) \sin\omega_1(t-\tau) d\tau - \frac{1}{\omega_2} \int_0^t F_x(\tau) \sin\omega_2(t-\tau) d\tau \right] \quad (14)$$

$$\varphi_x(t) = \frac{\omega_z^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \frac{1}{J_x\omega_1} \int_0^t F_x(\tau) \sin\omega_1(t-\tau) d\tau - \frac{\omega_z^2 - \omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \frac{1}{J_x\omega_2} \int_0^t F_x(\tau) \sin\omega_2(t-\tau) d\tau - \frac{b_x}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left[\frac{1}{\omega_1} \int_0^t F_z(\tau) \sin\omega_1(t-\tau) d\tau - \frac{1}{\omega_2} \int_0^t F_z(\tau) \sin\omega_2(t-\tau) d\tau \right] \quad (15)$$

$$\text{kde } \omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_z^2 + \omega_x^2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\omega_x^2 - \omega_z^2}{2}\right)^2 - b_x b_{zx}} = \frac{\omega_z^2}{2} \left[\left(\frac{l_y}{i_x}\right)^2 + 1 \mp \sqrt{\left[\left(\frac{l_y}{i_x}\right)^2 - 1\right]^2 + \left(\frac{e_y}{i_x}\right)^2} \right]$$

$$\omega_z = \frac{a_{11}}{m} \quad \omega_x = \frac{a_{22}}{J_x} \quad b_{zx} = \frac{a_{12}}{m} = \frac{4k}{m} e_y \quad b_{zx} = \frac{a_{21}}{J_x} = \frac{4k}{m} \cdot \frac{e_y}{i_x^2}$$

Funkce $F_z(t)$, $F_x(t)$ a $F_y(t)$ závisí na geometrii a rozmístění klínů.

Aplikace metodiky zkoušky M13 obdobným postupem jako v případě symetrického uspořádání. Při zjišťování úhlové frekvence ω_z posuvných pohybů – houpání je kinematické buzení realizováno symetrickým uspořádáním stejných klínů $h_{oi} = h_o$ v poloze 1. až 4. Snímače zrychlení S1 a S2 v místě (1). Funkce kinematického buzení

$$F_z(t) = 4kh(t) \quad F_x(t) = 4ke_y h(t) \quad F_y(t) = 0 \quad (16)$$

Obdobným postupem jako bylo naznačeno při symetrickém uspořádání se určí posuv těžiště po shozu z vrcholu klínu, z výšky h_0 z rovnice (14)

$$w_T(t) = z(t) = h_0 \frac{\omega_z^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \left[\frac{\omega_x^2 - \omega_1^2 - \omega_z^2 \left(\frac{e_y}{i_x} \right)^2}{\omega_1^2} \cos \omega_1 t - \frac{\omega_x^2 - \omega_2^2 - \omega_z^2 \left(\frac{e_y}{i_x} \right)^2}{\omega_2^2} \cos \omega_2 t \right] \quad (17)$$

Zrychlení těžiště desky ve směru z

$$\ddot{w}_T(t) = -h_0 \frac{\omega_z^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \left[\left(\omega_x^2 - \omega_1^2 - \omega_z^2 \left(\frac{e_y}{i_x} \right)^2 \right) \cos \omega_1 t - \left(\omega_x^2 - \omega_2^2 - \omega_z^2 \left(\frac{e_y}{i_x} \right)^2 \right) \cos \omega_2 t \right] \quad (17a)$$

pro $e_y = 0$ se získá vztah (6).

Úhel natočení $\varphi_x(t)$ kolem podélné osy x jdoucí těžištěm podle (15) a (16)

$$\varphi_x(t) = -\frac{h_0 \cdot e_y}{i_x^2} \cdot \frac{\omega_z^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} [\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t] \quad (18)$$

a úhlové zrychlení

$$\ddot{\varphi}_x(t) = \frac{h_0 \cdot e_y}{i_x^2} \cdot \frac{\omega_z^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} [\omega_1^2 \cos \omega_1 t - \omega_2^2 \cos \omega_2 t] \quad (18a)$$

Podle metodiky zkoušky jsou snímače zrychlení S1 a S2 v poloze (1) – obr. 1, tj. na podélné geometrické ose jdoucí geometrickým centrem. V místě snímačů S1 a S2 je zrychlení dáno vztahem

$$\ddot{w}_{S1,2}(t) = \ddot{w}_T(t) - e_y \ddot{\varphi}_x(t)$$

a podle vztahů (17) a (18)

$$\ddot{w}_{S1,2}(t) = -h_0 \frac{\omega_z^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \left[\left(\omega_x^2 - \omega_1^2 - \left(\omega_z^2 - \omega_1^2 \right) \left(\frac{e_y}{i_x} \right)^2 \right) \cos \omega_1 t - \left(\omega_x^2 - \omega_2^2 - \left(\omega_z^2 - \omega_2^2 \right) \left(\frac{e_y}{i_x} \right)^2 \right) \cos \omega_2 t \right] \quad (19)$$

pro $e_y = 0$ se získá vztah (6)

Podle (19) je průběh zrychlení v tomto případě rozdíl dvou harmonických pohybů rozdílné frekvence a amplitudy. Posuvný pohyb těžiště „houpání“ je vždy svázáno s rotačními pohyby kolem osy x „kolébáním“.

Při zjišťování úhlové frekvence rotačních pohybů kolem osy x – kolébání jsou pro kinematické buzení použity klíny v místě na 1. a 4. místě vypružení.

$$h_{01} = h_{04} = h_0$$

$$h_{02} = h_{03} = 0$$

Funkce kinematického buzení v rovnicích (14) a (15)

$$F_z(t) = 2kh(t) \quad F_x(t) = 2kh(t)(l_y + e_y) \quad F_y(t) = 0 \quad (20)$$

Snímače zrychlení S1 a S2 jsou umístěny na podélných stranách vozidla v místech (2) obr. 1. tj. ve vzdálenosti $l_y = \frac{L_y}{2}$ od podélné geometrické osy. Signály snímačů se odečtou. Rozdíl posuvů v bodech 3 a 4 pro $x_3 = x_4$ a pro $y_3 = -(l_y + e_y)$ a $y_4 = -l_y - e_y$ je podle vztahu (3) dán rovnicí

$$w_4(t) - w_3(t) = -2l_y \varphi_x(t)$$

a rozdíl zrychlení v těchto bodech vzhledem k vztahu (15)

$$\ddot{w}_4(t) - \ddot{w}_3(t) = \frac{\omega_z^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot \frac{l_y h_0}{i_x^2} \left[(l_y (\omega_z^2 - \omega_1^2) - e_y \omega_1^2) \cos \omega_1 t - (l_y (\omega_z^2 - \omega_2^2) - e_y \omega_2^2) \cos \omega_2 t \right] \quad (21)$$

pro $e_y = 0$ se získá vztah (9).

Podle (21) je průběh zrychlení v tomto případě opět rozdíl dvou harmonických pohybů rozdílné frekvence a amplitudy. Rotační pohyb kolem osy x „kolébání“ je vždy svázáno s posuvnými pohyby ve směru osy z „houpáním“.

Uvedený rozbor metody shazování s klínů v případě nesymetrického uspořádání soustavy potvrzuje hodnocení učiněné na závěr řešení kmitání symetrické soustavy. Metodu M13 je možno použít jen při symetrickém uspořádání kmitající soustavy.

1. Popis zkoušky podle metodiky M13 [1] pro zjišťování vlastních frekvencí vypruženého vozidla metodou shazování s klínů obr. 1

Cílem zkoušky je ze změřené periody T periodického průběhu signálu snímače zrychlení stanovit vlastní frekvenci, kmitočet $f = \frac{1}{T}$, resp. vlastní úhlovou frekvenci

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ kmitaných pohybů vzhledem k hlavním centrálním osám setrvačnosti vozidla: frekvenci f_z , resp. ω_z posuvných pohybů ve směru vertikální osy z – tzv. houpání, frekvenci f_x , resp. ω_x rotačních pohybů kolem podélné osy x – tzv.

kolébání a frekvenci f_y , resp. ω_y rotačních pohybů kolem příčné osy y – tzv. kývání.

Uvedené frekvence je třeba vedle dalších parametrů zjistit pro posouzení kvality chodu vozidla, resp. jako vstupní veličiny pro různé simulační programy. Vozidlo je rozkmitáno kinematickým buzením přejezdem velmi malou rychlostí přes geometrickou nerovnost – klíny, tzv. „shoz z klínů“. Po rozkmitání vozidla je zjišťováno zrychlení vertikálních posuvů v několika místech.

1. Snímače zrychlení S1 a S2 na přední a zadní straně vozidla v rovině podélné geometrické osy
2. Snímače zrychlení S1 a S2 na delších stranách vozidla, symetricky k podélné ose na stejné straně příčné osy vozidla.

Postup zkoušky při zjišťování jednotlivých vlastních frekvencí vozidla:

1. houpání f_z :
 - a) umístění snímačů S1 a S2 v poloze (1)
 - b) kinematické buzení: symetrické uspořádání klínů 1. a 4., $h_{0i} = \text{konst.}$
2. kolébání f_x :
 - a) umístění snímačů S1 a S2 v poloze (2) signály se odečítají
 - b) kinematické buzení: klíny jen po jedné straně podélné osy
 $h_1 = h_4 \neq 0$ a $h_2 = h_3 = 0$ nebo $h_2 = h_3 \neq 0$ a $h_1 = h_4 = 0$
3. kývání f_y :
 - a) umístění snímačů S1 a S2 v poloze (1) signály snímačů se odečítají
 - b) kinematické buzení: klíny umístěny po jedné straně příčné osy
 $h_1 = h_2 \neq 0$ a $h_3 = h_4 = 0$ nebo $h_1 = h_2 = 0$ a $h_3 = h_4 \neq 0$

[1] M13 Metodika zkoušky. Stanovení charakteristik vlastních kmitů vypružení. Ze souboru vypracovaného někdejší Radou zmocněnců RVHP, Predeal 1977, Riga 1978, český překlad 1979

[2] Volek J., Kočí K., Litomyský P.: Investigation of the influence of asymmetry in case of the vibration of a resiliently supported plate –application on the vibration of vehicle. Inženýrská mechanika 2000.

[3] Volek J., Kočí K., Husák J.: Investigation of the influence of asymmetry in case of the vibration of a resiliently supported plate –application on the vibration of vehicle II. Inženýrská mechanika 2001.

[4] Volek J.: Vliv nesymetrie pružně uložené tuhé desky při volném kmitání. Bulletin vědeckých, výzkumných a pedagogických prací 2000. Ústav techniky a řízení výroby. Univerzita J. E. Purkyně, Ústí nad Labem

[5] Volek J.: Řešení soustavy nehomogenních diferenciálních rovnic 2. Řádu kmitání pružně uloženého tuhého tělesa vynucené obecným budícím zatížením. Bulletin vědeckých, výzkumných a pedagogických prací 2002. Ústav techniky a řízení výroby. Univerzita J. E. Purkyně, Ústí nad Labem