



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

**MATERIÁLOVÁ IDENTIFIKACE VÝPOČETNÍHO SYSTÉMU MKP
METODOU PRUTOVÉHO ETALONU**

Karel VÍTEK

Abstract: *Computational approach to structural or limit state assessment needs better knowledge of material qualities as one of the basic inputs. The methodology of determining the construction materials' elastic constants is based on the mechanical tests, being mostly tensile tests, of partially loaded specimens (macro-specimens). The elastic constants obtained are applied mainly when a computer-aided modeling structure is used which considerably advanced due to computer techniques development in the last years (to obtain a deeper understanding of occurring phenomena, it is necessary to find out the σ - ϵ distribution). It is the aim of this article to introduce a original method for a material identification of FEM computing system. The method is based on the two simply experiments and three simply calculations of only three displacements on the simply etalon bar beam. In this case, it is demonstrated how to find material identification which uses finite element method (the Young's modulus of elasticity and Poisson's ratio are determined by this method).*

Key words: *Material identification, FEM, Young's modulus, Poisson's ratio*

Využití tahového diagramu k materiálové identifikaci, kdy jsou poměrně deformace na tahovém vzorku snímány většinou tenzometry při definované tahové síle je metodika klasická. Na základě praktických zkušeností s tahovou zkouškou jsme rozvinuli tuto metodiku o techniku práce se vzorky s usměrňovacími vruby a řadu aspektů jsme publikovali také v (1, 2, 3). Tahová zkouška využívající trhačského stroje vnáší do materiálové identifikace výpočetního systému principiální nejistotu v definici okrajových podmínek zkoušky (interakce vzorku a čelistí trhačky, poloha vzorku), neboť zkouška pro definované parciální zatížení tahem je vlastně zkouškou na kombinaci ohybu a tahu vzorku (s dominantním tahem). Zároveň je nutno měřit deformace tenzometry, neboť v rozsahu použitelnosti materiálů bývají tahové poměrné deformace vzorků velmi malé (10^{-3} - 10^{-6}) a proto ladit tahovou zkouškou výpočetní systém na materiálové vlastnosti je problematické, zdlouhavé a poměrně drahé, vezmeme-li v úvahu též cenu prací se vzorky a dále hlavně náklady na tenzometry. Obecněji namáhané prutové těleso jednoduchého tvaru je možno pro experimenty snadno a rychle vyrobit a bez problémů a rychle ve výpočetním systému namodelovat. Logický požadavek na takový identifikační výzkum je dodržení podmínek jednoznačné rozlišitelnosti parciální odezvy na parciální akci v oblasti experimentů i souvisejících výpočtů. Na jednoduché konstrukci prutu je lákavé i to, že vhodnou volbou rozměrů prutu je možno ladit citlivost a přizpůsobit ji citlivosti měřidel, která při měření posuvů prutu mohou být mechanická, není nutno investovat do tenzometrie (každý výpočtář nebo konstruktér nemá k dispozici tenzometrickou ústřednu, ale běžně dostupný a relativně levný je například mikrometr).

Ing. Karel Vitek, CSc., Department of Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, Czech Technical University in Prague, Technická 4, 166 07 Prague 6, Czech Republic, Email: VITEK@FSID.CVUT.CZ

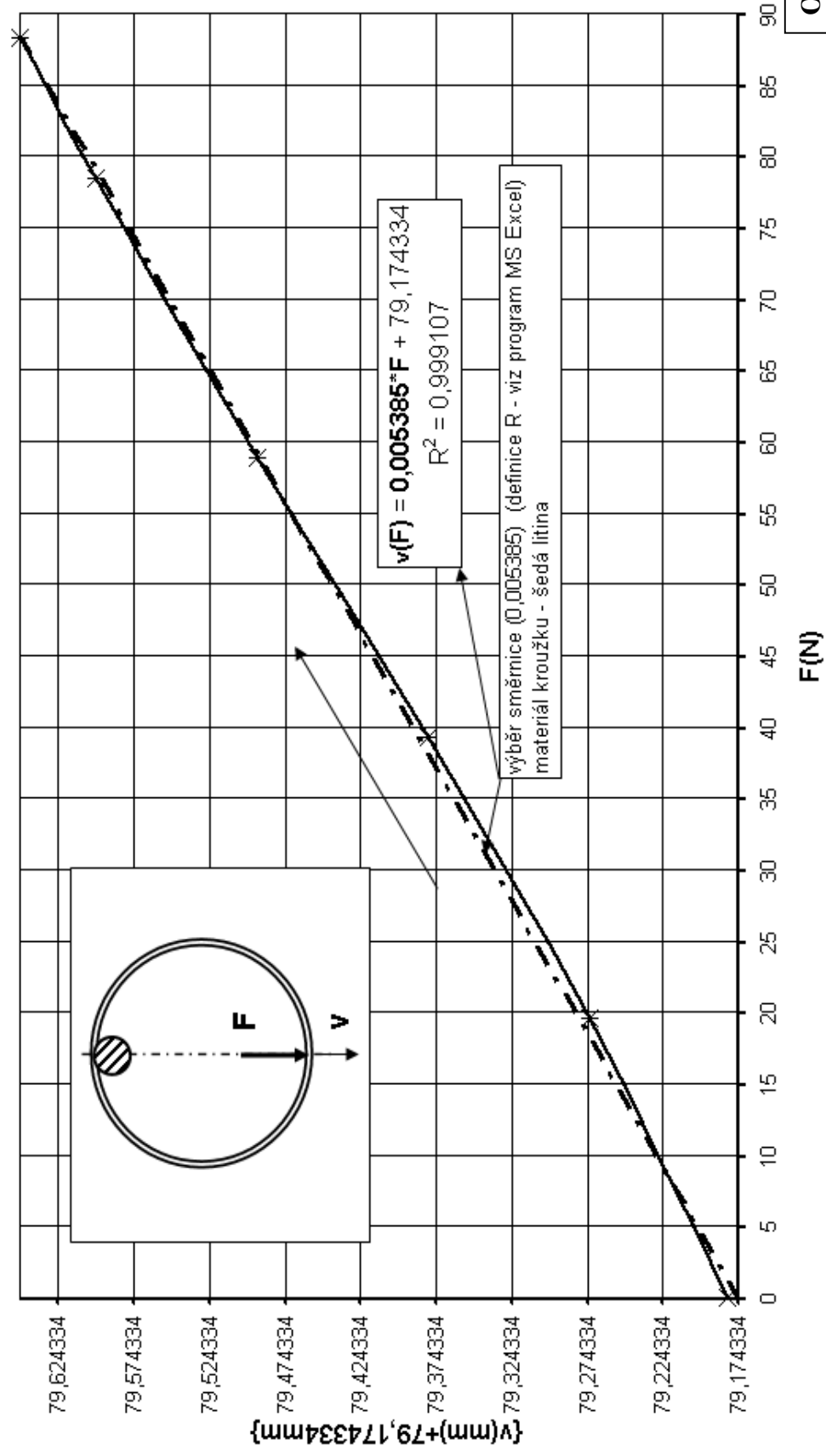
Experimenty s měřením posuvů mikrometrem i související výpočtové modely MKP jsme realizovali na litinovém kroužku – **prutovém etalonu**, o středním poloměru $R=37,85\text{mm}$ s konstantním obdélníkovým průřezem o radiální výšce $h=3,3\text{mm}$ a šířce $b=5,15\text{mm}$. S prakticky shodnými výsledky byl vyzkoušen jak 8 uzlový - tak 20 uzlový prostorový prvek implementovaný v systému Ansys.

Ohybový diagram etalonu z obr. 1 je v oblasti Hookeova zákona zpracován lineární regresí ve tvaru : $\mathbf{v} = \mathbf{a} * \mathbf{F}$. Směrnice regresní přímky $\mathbf{a}(\mathbf{E}, \mu)$ je obecně funkcí modulu pružnosti $\mathbf{E}$ a Poissonova čísla. Výsledek analýzy MKP v obr. 2 vzhledem k Poissonovu číslu μ tohoto posuvu $\mathbf{v}(\mathbf{E}, \mu)$ pro volenou jednotkovou sílu odpovídá současně teoretické směrnici regresní přímky $\mathbf{a}(\mathbf{E}, \mu)$, neboť se jedná o logicky totožnou hodnotu získanou na jedné straně experimentem a na straně druhé výpočtem. V polynomicke regresi na obr. 2 je stabilní konstantní člen funkcí modulu pružnosti $\mathbf{E}$ a ostatní zanedbatelné členy, které ovlivňují ve výpočtu nejvýše 4. významovou číslici výsledku $\mathbf{v}(\mathbf{E}, \mu)$, jsou funkcí μ . Uvažovaný posuv $\mathbf{v}$ je tedy velmi slabou funkcí μ a dominantní funkcí $\mathbf{E}$. To je důležitý závěr, který umožní identifikovat modul pružnosti materiálu $\mathbf{E}$. Není podstatné, zda podle znalosti teoretické struktury konečného prvku i řešeného modelu vyklneme z matice tuhosti $\mathbf{K}$ (vlastností silné) $\mathbf{E}$, neboť by bylo zřejmě potřeba dokazovat (indukcí) tutéž vlastnost zbývajících množiny deformací uvažovaného modelu. Numericky nás zajímá (z množiny posuvů řešených na modelu) pouze jeden - experimentem měřený posuv $\mathbf{v}$, který je i podle numerické analýzy dokumentované v obr. 3 (po proložení mocninné regresní křivky vypočtenými variantami) skutečně předpokládanou nepřímou úměrností modulu pružnosti $\mathbf{E}$ ve tvaru $\mathbf{v} = \mathbf{c} * \mathbf{E}^{-1}$. Protože směrnice $\mathbf{a}$ regresní přímky experimentu odpovídá posuvu $\mathbf{v}$ pro jednotkovou sílu $\mathbf{F}$, lze modul pružnosti $\mathbf{E}$ určit jako průsečík regresní přímky experimentu a regresní hyperboly výpočtů, tedy z rovnosti : $\mathbf{v} = \mathbf{a} * \mathbf{F} = \mathbf{a} * \mathbf{1} = \mathbf{c} * \mathbf{E}^{-1}$, z čehož pak plyne $\mathbf{E} = \mathbf{c} / \mathbf{a}$.

Další - výhodnější cesta, která vyžaduje pouze jeden výpočet konstrukce (a není třeba provádět mocninnou regresi) spočívá v řešení modelu prutu zatíženého (shodně s předchozím modelem) jednotkovou silou s materiálovými konstantami: $\mathbf{E}=1, \mu=0$, ze kterého pak ve výsledku numerické analýzy získáme přímo konstantu $\mathbf{c}$ dle vztahu: $\mathbf{v} = \mathbf{c} * \mathbf{E}^{-1} = \mathbf{c} * \mathbf{1}^{-1} = \mathbf{c}$ a dále též $\mathbf{E} = \mathbf{c} / \mathbf{a}$ (v tomto konkrétním případě je konstanta $\mathbf{c}=519,667$ zjištěná numericky oproti $\mathbf{c}=519,86$ z regrese, přičemž jejich relativní rozdíl činí $0,037\%$ a nemá tedy praktický vliv na další zpřesnění modulu pružnosti, proto je zde například: $\mathbf{E} = \mathbf{c} / \mathbf{a} = 519,86 / 0,005385 = 96538,53 \text{ MPa}$).

Určení Poissonova čísla jsme založili na hypotéze o jednoduché funkční závislosti deformace prutu při dominantní kombinaci krutu s ohybem na Poissonově čísle μ . Proto jsme zatížili kroužek jednotkovou silou kolmo na rovinu prutu podle obr. 4. Model může být totožný s modelem užitým pro posuv $\mathbf{v}$, ale v tomto případě pro možnost porovnání velikosti deformací $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ volíme půlkruh, který je pak asi o řád měkčí. Porovnáme-li oba případy, vidíme široké možnosti ladění experimentů na měřicí zařízení i na velikosti modelů - zkušebních těles vhodných pro tyto experimenty doprovázející materiálovou identifikaci. Výpočty v obr. 4 jsou provedeny s konstantním $\mathbf{E}=90000 \text{ MPa}$ a charakterizovány regresní přímkou, která je silně lineární funkcí μ ve tvaru: $\mathbf{u}(\mu, \mathbf{E}) = \mathbf{g} * \mu + \mathbf{h}$. Konstanta $\mathbf{h}=0,180726$ pak je zde pouze funkcí modulu pružnosti $\mathbf{E}$ (ten je už první analýzou vyřešen a zde známý). Proto můžeme stanovit výpočtem posuvu $\mathbf{u}(\mu, \mathbf{E})$ konstantu $\mathbf{h}$ modelu prutu zatíženého jednotkovou silou s materiálovými konstantami ve tvaru: $\mathbf{E}=\text{dané}, \mu=0$. Při volbě druhé vhodné kombinace konstant: $\mathbf{E}=\text{dané}, \mu=1$, vyplývá konstanta regresní přímky $\mathbf{g}$ z vypočtené deformace $\mathbf{u}$ vztahem: $\mathbf{g} = \mathbf{u} - \mathbf{h}$.

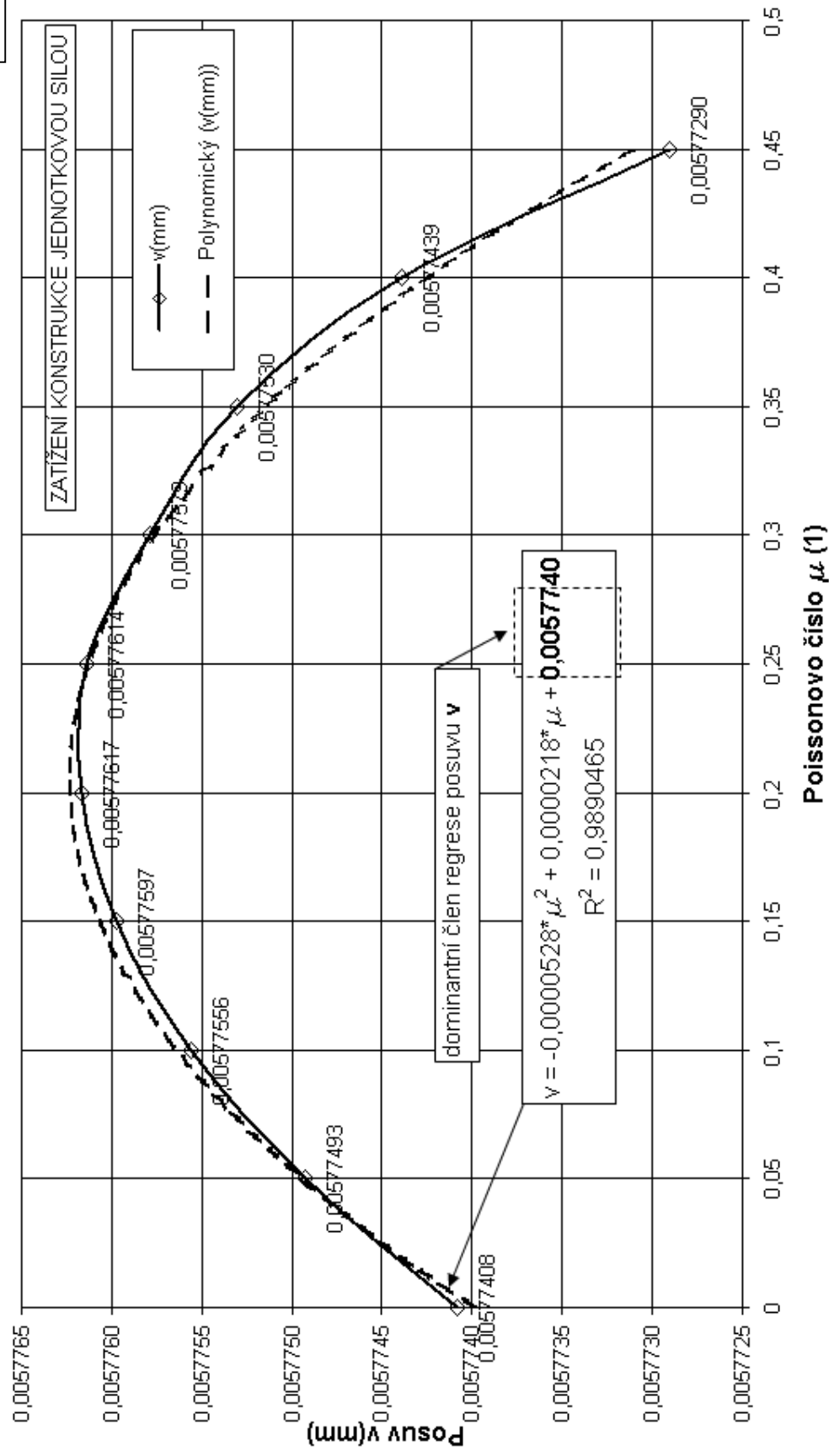
OHYBOVÝ DIAGRAM: síla F(N) - délka {posuv v(mm)}+79,174334mm}



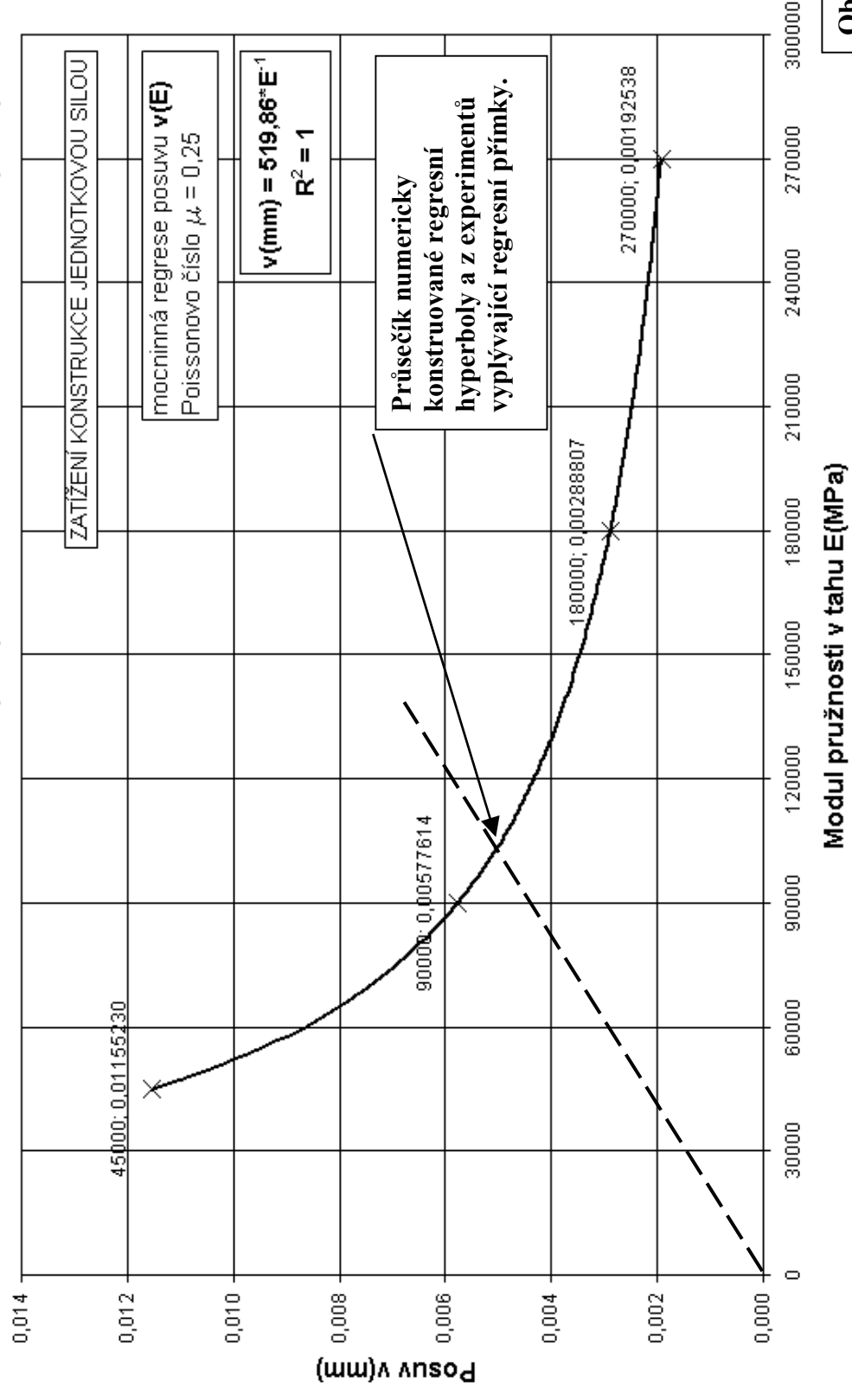
Obr.1

ZÁVISLOST POSUVU KONSTRUKCE $v(\text{mm})$ NA POISSONOVĚ ČÍSLE $\mu(1)$

Obr.2



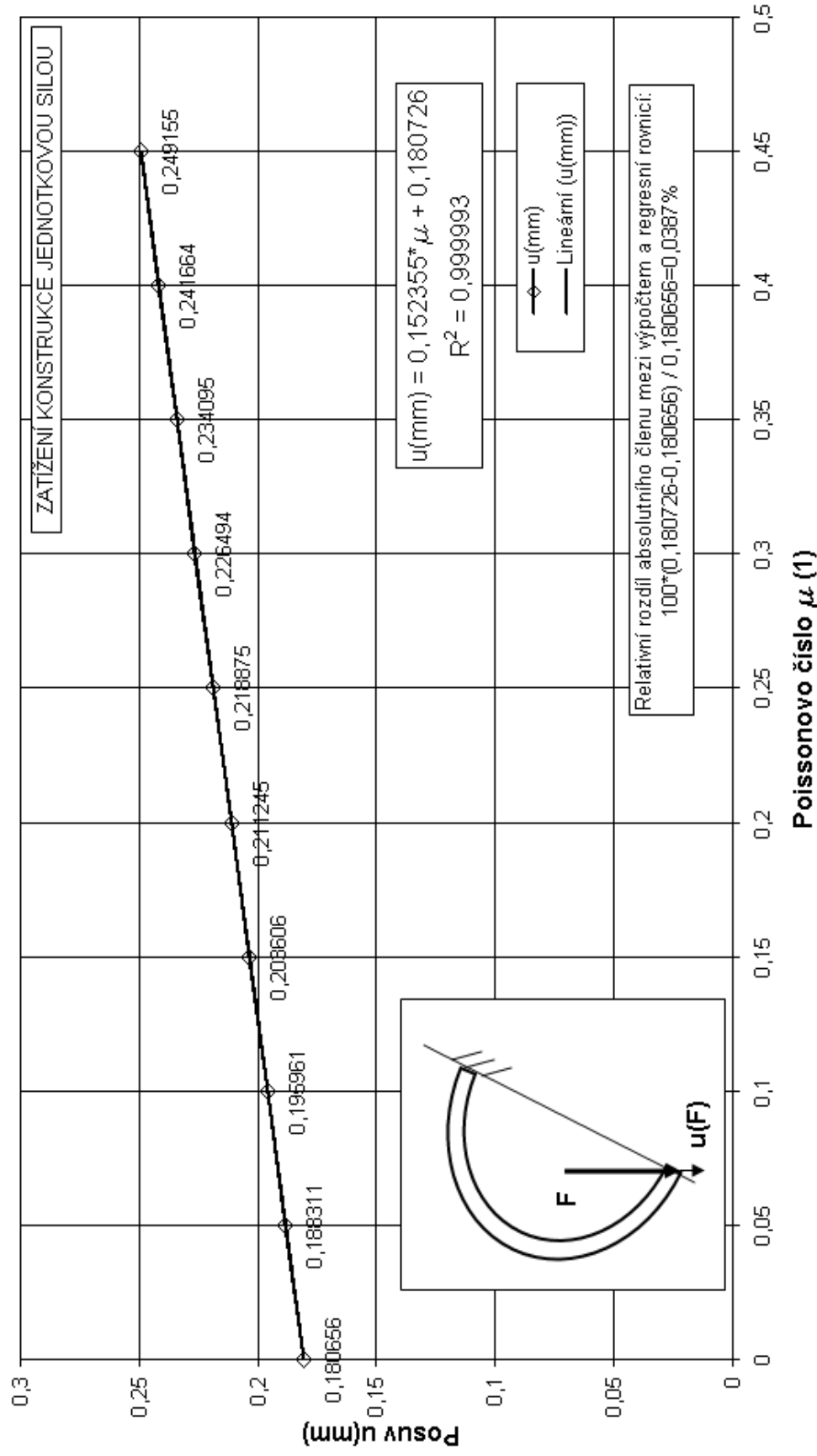
ZÁVISLOST POSUVU KONSTRUKCE $v(\text{mm})$ NA MODULU PRUŽNOSTI $E \text{ (MPa)}$



Obr.3

ZÁVISLOST POSUVU KONSTRUKCE $u(\text{mm})$ NA POISSONOVĚ ČÍSLE $\mu (1)$

Obr.4



Lineární regrese tohoto druhého experimentu - s příčnou silou F : $u(F) = p \cdot F$ je stejného charakteru jako lineární regrese posuvu z obr. 1 ($v(F) = a \cdot F$), proto je také možno porovnat (jednotkové síle odpovídající) obě přímky: $u(\mu, E) = (g \cdot \mu + h) \cdot F = p \cdot F$ a na základě rovnosti směrnic vypočítat Poissonovo číslo: $\mu = (p-h) / g$ – tím je materiálově výpočetní systém identifikován.

Závěrem je třeba zdůraznit, že pro materiálovou identifikaci výpočetního systému předkládanou metodu je potřeba realizovat dvě poměrně nenáročná experimentální měření celkem dvou deformací na modelu prutu a vyrovnat je lineární regresí. Dále už postačují tři jednoduché výpočty odpovídajícího prutu zatíženého jednotkovou silou s vhodně zvolenými materiálovými konstantami samotným výpočetním systémem a tyto (2+3) výsledky přímo stanovují na základě jednoduchého matematického obratu obě konstanty E, μ zkoumaného materiálu.

Tento směr výzkumu na nosné téma „Optimalizace elastických konstant pro tenzometrické aplikace“ je podporován grantem GAČR_106/01/0958.

LITERATURA:

- [1] Vítek K.- Optimalizace tvaru tyčí pro tahovou zkoušku, Konference Experimentální analýza napětí - EAN 93, Měřín, 1993, sborník str.319-320
- [2] Vítek K., Holý S.- Identifikace materiálové tahové zkoušky, Konference Experimentální analýza napětí - EAN 99, Frenštát pod Radhoštěm, 1999, sborník str.213-216
- [3] Vítek K., Holý S, Štěrba P. - Identifikace materiálové tahové zkoušky užitím vrubového vzorku, Konference Experimentální analýza napětí - EAN 2000, Třešť, 2000, sborník str.371-374
- [4] Vítek K., Holý S, Štěrba P. – Zjišťování materiálových konstant využitím metody konečných prvků, National Conference with International Participation “ENGINEERING MECHANICS 2001”, Svratka, Czech Republic, May 14 - 17, 2001, sborník, str. 371-372