



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

ADAPTIVNÍ TECHNIKA V MKP

L. Svoboda¹, D. Rypl², Z. Bittnar³

Abstrakt: V posledních deseti letech se zájem mnoha výzkumníků obrátil na problém, jak při výpočtech založených na metodě konečných prvků dosáhnout požadované přesnosti řešení. Za tu dobu bylo vyvinuto několik metod řešících tento problém a některé z nich se ukázaly natolik úspěšné, že se začaly využívat i v komerčních aplikacích. V každé z těchto metod lze najít tři základní části: (1) úsporný a výkonný nástroj na aposteriorní odhad chyby; (2) proces určující modifikaci (vylepšení) sítě prvků, která by vedla k dosažení předepsané přesnosti řešení při minimálním počtu iterací; (3) výkonný generátor schopný přesně splnit naše požadavky na modifikaci sítě. V tomto článku bude představena adaptivní technika, jejímiž autory jsou Zienkiewicz a Zhu, a na příkladech budou ukázány výsledky, kterých lze touto metodou dosáhnout.

Klíčová slova: *h-adaptivita.*

Úvod

Každý uživatel numerických metod založených na diskretizaci řešeného problému by se měl snažit o odhad přesnosti získaných výsledků. K tomu slouží tzv. *adaptivní techniky*, pomocí nichž lze získat informaci o chybě řešení a zároveň dávají návod na jeho zpřesnění. Vzhledem k složitosti adaptivních výpočtů se u komerčních aplikací spoléhalo na zkušenost uživatelů a na jednoduchá pravidla, jak se vyhnout nejhrubějším chybám. Tento postup však nevedl vždy k uspokojujícím výsledkům. Naštěstí se dnes situace mění k lepšímu a bylo již představeno několik adaptivních metod, které umožňují automatické dosažení požadované chyby řešení v krátkém čase.

Existuje několik typů adaptivních metod. V nejběžnějším řešení úlohy MKP je vytvořen model konstrukce použitím určitého typu prvku se stupněm polynomické aproximace p . Přesnějšího řešení je poté dosaženo užitím více prvků a tím pádem zmenšením jejich charakteristických rozměrů h , a proto se označuje jako *h-adaptivita*. Je možno ji použít ve všech existujících kódech a v tomto příspěvku bude blíže představena. Další metoda se nazývá *p-adaptivita*. Počet prvků zde zůstává stejný a přesnost modelu se zvyšuje tím, že se na vybraných prvcích zvýší stupeň polynomické aproximace p . Takto vzniklá síť s měnící se aproximací sice vyžaduje použití výkonného řešiče, ale zvýšená námaha se vyplatí, obzvláště pokud je požadována vysoká přesnost řešení. Současným použitím obou metod vzniká tzv. *hp-adaptivita*, která se v současné době jeví jako nejefektivnější.

¹Ing. L. Svoboda, ČVUT Fakulta stavební, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, Ladislav.Svoboda@fsv.cvut.cz

²Dr. Ing. D. Rypl, ČVUT Fakulta stavební, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, drypl@fsv.cvut.cz

³Prof. Ing. Z. Bittnar, DrSc., ČVUT Fakulta stavební, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, bittnar@fsv.cvut.cz

V rámci *h-adaptivity* existuje několik způsobů, jak se k hustší síti dopracovat. První z nich je znázorněn na obrázku 1. Původní síť je zde ponechána a pouze v místě s největší chybou se prvky rozdělí na čtvrtiny. Tento proces se opakuje tak dlouho, dokud neobdržíme řešení s požadovanou chybou. Nevýhodou postupu je vznik tzv. *hanging nodes* a závislost tvaru a velikosti prvku na počátečním rastru. Výhoda naopak spočívá v tom, že není třeba generovat stále nové sítě a částečně lze využívat hodnot, vypočtených již na primární síti.

Další alternativou, kterou někteří autoři uvádějí, je tzv. *r-adaptivity*. V tomto procesu zůstává počet prvků sítě konstantní a pouze se hledají nové polohy uzlů, které by zajišťovaly přesnější řešení. Toto samozřejmě není nový typ adaptivní techniky, ale jedná se o *h-adaptivitu* se speciálním způsobem zahušťování. Je důležité si uvědomit, že použitím tohoto procesu získáme o něco přesnější řešení, ale předepsané přesnosti s největší pravděpodobností nedosáhneme.

Asi nejlepší alternativou *h-adaptivity* je generování vždy nové sítě, která by přesně odpovídala našim požadavkům.

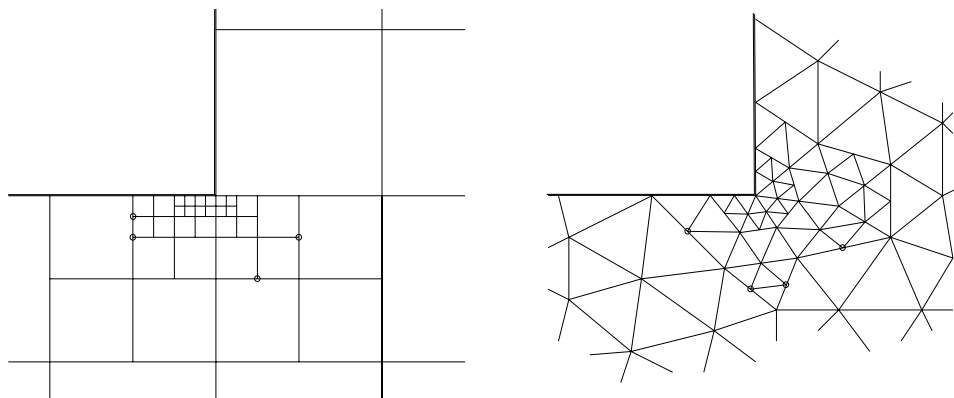
Z předchozích úvah je zřejmé, že všechny adaptivní výpočty hledající řešení požadované přesnosti mají tři části, které musí být cyklicky vykonávány:

- (1) výpočet na zvolené základní síti, vyčíslení odhadu chyby diskretizace řešení
- (2) určení modifikace (vylepšení) sítě, která by zajistila ekonomické dosažení předepsané přesnosti
- (3) implementace tohoto vylepšení, výpočet řešení na modifikované síti a vyčíslení odhadu nové chyby; při nedosažení předepsané přesnosti návrat do bodu (2)

Tyto tři části je třeba navrhnout tak, aby bylo výsledku dosaženo co nejefektivněji a s co nejmenším počtem cyklů.

Adaptivní technika podle Zienkiewicze a Zhua

V následujících kapitolách bude představena adaptivní technika, kterou navrhli O. C. Zienkiewicz a J. Z. Zhu. Tato technika zahrnuje všechny tři výše uvedené body potřebné k



Obr.1: *h-adaptivity* - rozdělování prvků; $\circ$ *hanging nodes*.

dosažení požadované přesnosti řešení a splňuje i přísné požadavky na rychlost a efektivitu výpočtu.

Pro odhad chyby formulovali autoři jednoduchou metodu, která se stala velice účinným nástrojem snadno implementovatelným do existujících programů. Tento odhad je vhodný především pro *h-adaptivitu* a jeho hlavní předností je, že není třeba vyčíslovat skoky mechanických veličin na hranici mezi prvky, jak tomu bylo u „klasických“ odhadů.

Základní vztahy

Uvedená adaptivní technika bude představena na příkladu eliptického problému vyjádřeného vztahem

$$\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{r} = \mathbf{f} \quad \text{na } \Omega. \quad (1)$$

Takovéto problémy jsou typické v teorii pružnosti, kde $\mathbf{r}$ představuje vektor posunutí a $\mathbf{B}$ matici umožňující výpočet napětí a deformace jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{r} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{r} \quad \text{na } \Omega. \quad (2)$$

Při využití standardních vztahů MKP aproximujeme posunutí $\hat{\mathbf{u}}$ pomocí matice bázových funkcí $\mathbf{N}$ jako

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \mathbf{r} \quad (3)$$

a přibližné hodnoty odvozených veličin $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ a $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ z rovnic (2). Rozdíl přesných hodnot $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ a aproximovaných hodnot $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ je chyba řešení:

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{e}_\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (4)$$

Jedná se o definici chyby v bodě, což je z praktického hlediska nevýhodné. Přednost se dává integrálním měřítkům chyb. Vhodným integrálním měřítkem je *energetická norma*. Energetickou normu chyby řešení můžeme vyjádřit jako

$$\|\mathbf{e}\| = \sqrt{\int_{\Omega} \mathbf{e}_\varepsilon^T \mathbf{D} \mathbf{e}_\varepsilon d\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} \mathbf{e}_\sigma^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{e}_\sigma d\Omega}. \quad (5)$$

Přestože jsou všechna integrální měřítka vztažena na celou řešenou oblast, lze čtverec normy vypočítat jako součet příspěvků z jednotlivých prvků

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_{i=1}^{ne} \|\mathbf{e}\|_i^2 \quad (6)$$

Pro snadnější zacházení se dává přednost relativní procentuální chybě

$$\eta = \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{u}\|} \times 100, \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\int_{\Omega} \mathbf{e}^T \mathbf{D} \mathbf{e} d\Omega}. \quad (7)$$

Neboť přesné řešení $\mathbf{u}$ není k dispozici, můžeme chybu řešení přibližně vyjádřit jako

$$\mathbf{e}_\sigma \approx \boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (8)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}^*$ je lepší aproximací přesného řešení než $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$. Přibližná hodnota chyby je potom

$$\|\tilde{\mathbf{e}}\| = \sqrt{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega} \quad (9)$$

a pro odhad procentuelní chyby platí

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\|\tilde{\mathbf{e}}\|^2}{\|\hat{\mathbf{u}}\|^2 + \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2}} \times 100. \quad (10)$$

K posouzení kvality odhadu chyby slouží tzv. *index účinnosti*

$$\vartheta = \frac{\|\tilde{\mathbf{e}}\|}{\|\mathbf{e}\|}, \quad (11)$$

který se tak stává důležitým ukazatelem efektivnosti adaptivního výpočtu a v ideálním případě by se měl rovnat jedné. Zde je třeba poznamenat, že největší vliv na hodnotu ϑ má přítomnost singularit, které mohou výrazně zpomalit konvergenci řešení.

Výpočet σ^*

Pokud vyjdeme ze vztahů (3) a (4), tak je zřejmé, že posunutí $\hat{\mathbf{u}}$ je po prvku aproximováno pomocí polynomu stupně p a $\hat{\sigma}$ pomocí polynomu stupně $p-1$. Zienkiewicz a Zhu, aby získali lepší hodnoty napětí, zavedli předpoklad, že napětí σ^* je po prvku interpolováno stejným způsobem jako posuny $\hat{\mathbf{u}}$. Na izolovaném prvku platí

$$\sigma^* = \mathbf{N} \mathbf{r}_\sigma, \quad (12)$$

kde $\mathbf{r}_\sigma$ je vektor napětí v uzlových bodech, jejichž hodnoty vypočteme z požadavku:

$$\sum_{i=1}^{ne} \int_{\Omega_i} \mathbf{N}^T (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega = \mathbf{0}. \quad (13)$$

Po dosazení (12) do (13) obdržíme

$$\mathbf{r}_\sigma = \mathbf{A}^{-1} \left(\sum_{i=1}^{ne} \int_{\Omega_i} \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{r}, \quad (14)$$

kde

$$\mathbf{A} = \left(\sum_{i=1}^{ne} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right), \quad \hat{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{r}. \quad (15)$$

Vyřešením soustavy lineárních rovnic (14) získáme $\mathbf{r}_\sigma$ a ze vztahu (12) potom σ^* . Pokud je při aproximaci použit lineární prvek, je možno matici $\mathbf{A}$ diagonalizovat. Tím se výpočet σ^* výrazně zrychlí a přesnost se sníží pouze o 2-3%.

Empiricky bylo zjištěno, že odhad procentuelní chyby $\tilde{\eta}$, vypočtený ze vztahu (10) pomocí napětí σ^* získaného popsanou metodou, je třeba přenásobit korekčním součinitelem, jehož velikost je závislá na typu prvku.

Modifikace sítě prvků

Při adaptivním výpočtu se obvykle požaduje, aby na každém prvku byla splněna nerovnost

$$\eta < \bar{\eta}, \quad (16)$$

kde $\bar{\eta}$ je předepsaná procentuální chyba v energetické normě. Za předpokladu, že chyba η je rovnoměrně rozložena po celé oblasti, lze stanovit mez pro normu chyby na každém prvku

$$\|\tilde{\mathbf{e}}\|_i \leq \bar{\eta} \sqrt{\frac{\|\hat{\mathbf{u}}\|^2 + \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2}{ne}} = \bar{e}_m. \quad (17)$$

Protože $\|\tilde{e}\|_i$ se během řešení vyčísluje pro každý prvek, lze jednoduše zjistit, v kterém místě se má velikost prvků zvětšit a kde zmenšit. Jestliže charakteristický rozměr prvku je h_i , potom nový rozměr by měl být

$$h = \frac{h_i}{\xi_i^{\frac{1}{p}}}, \quad \xi_i = \frac{\|\tilde{e}\|_i}{\bar{e}_m}, \quad (18)$$

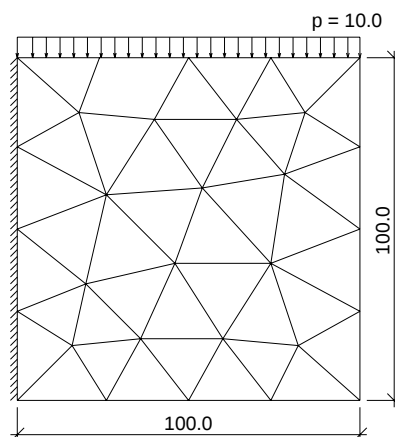
kde p je stupeň polynomické aproximace.

Numerické ověření efektivity metody

V této kapitole bude na jednoduchém příkladě ověřena konvergence adaptivního výpočtu a účinnost odhadu chyby. Jako testovací konstrukce byla vybrána stěna s jednou hranou vetknutou, která je zatížena ve své rovině (obr.1).

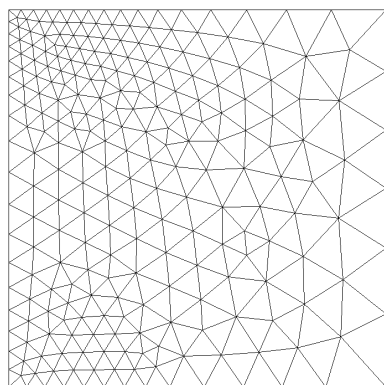
Nejprve byl proveden adaptivní výpočet s vysokou přesností, při kterém bylo dosaženo chyby 0.0068%. Takto získané výsledky je dále možno považovat za „přesné řešení“.

Dále byl proveden běžný výpočet, při kterém bylo požadováno dosažení předepsané přesnosti 3% pro lineární a 8% pro kvadratický trojúhelníkový prvek. V obou případech bylo dosaženo předepsané přesnosti ve dvou krocích (obr.2-6).



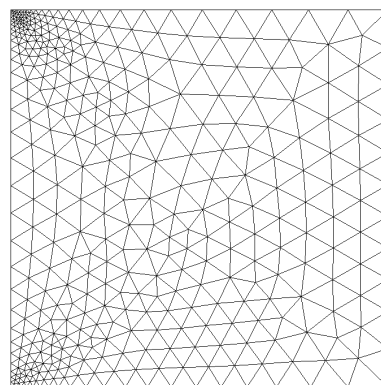
Obr.2: Primární síť

lineární prvek - $\eta=30.3\%$, počet stupňů volnosti (n) = 50; kvadratický prvek - $\eta=8.2\%$, $n = 184$.



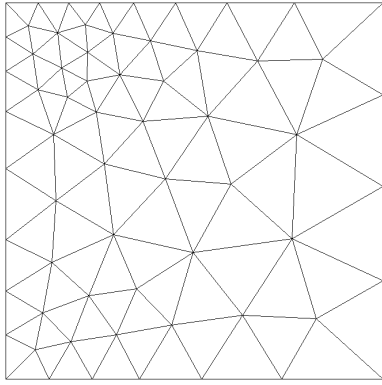
Obr.3: Síť'2

lineární prvek - $\eta = 10.5\%$, $n = 462$.



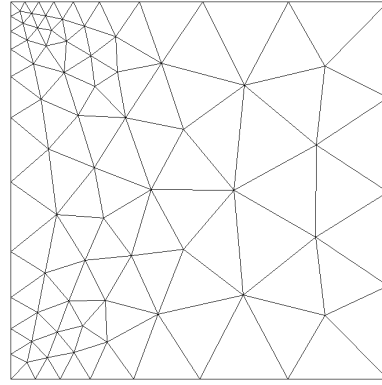
Obr.4: Síť'3

lineární prvek - $\eta = 7.9\%$, $n = 774$.



Obr.5: Síť 2

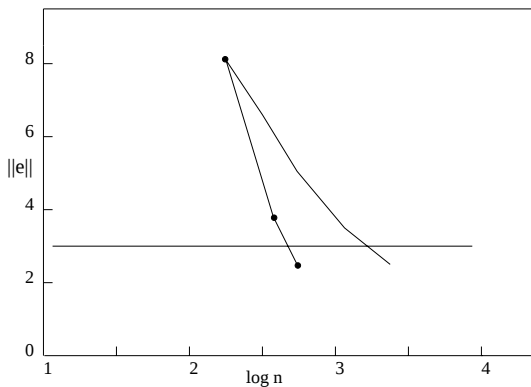
kvadratický prvek - $\eta = 3.88\%$, $n = 420$.



Obr.6: Síť 3

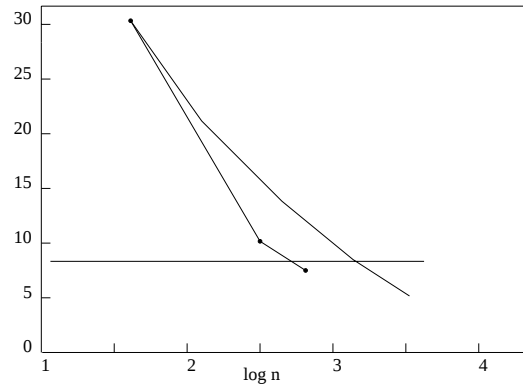
kvadratický prvek - $\eta = 2.53\%$, $n = 526$.

Na obrázcích 7 a 8 je porovnávána konvergence „adaptivního“ a „neadaptivního“ výpočtu.



Obr.7: kvadratický prvek

○ - adaptivní a - - neadaptivní výpočet;
 $\|e\|$ - energetická norma chyby;
 n - počet stupňů volnosti.



Obr.8: lineární prvek

○ - adaptivní a - - neadaptivní výpočet;
 $\|e\|$ - energetická norma chyby;
 n - počet stupňů volnosti.

Na obrázcích 9 a 10 jsou zobrazeny hodnoty indexu účinnosti ϑ (viz. (11)) ve vybraných částech sítě.

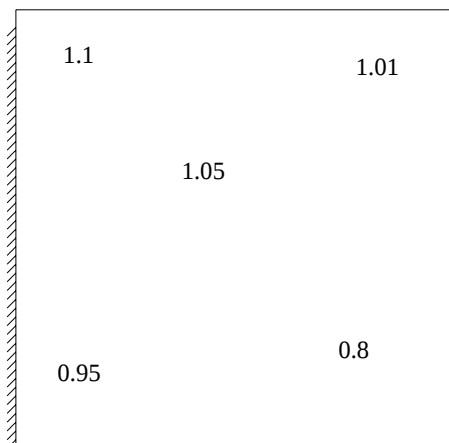
Jak je vidět z obrázků 9 a 10, index účinnosti odhadu chyby ϑ představené metody se dostatečně blíží hodnotě jedna, což zaručuje kvalitní odhad chyby. Dále je vidět z obrázků 7 a 8, že použitím této metody dosáhneme řešení s předepsanou chybou po druhém kroku a s malým počtem prvků.

Závěr

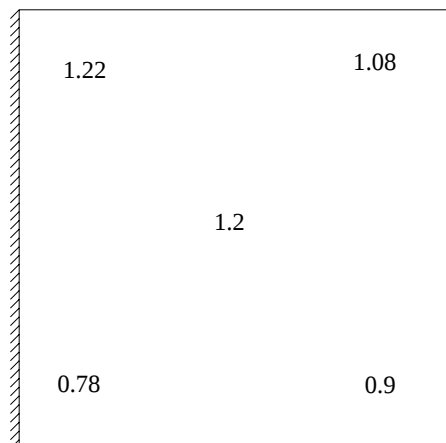
Zde představená adaptivní metoda vykazuje vysokou účinnost a lze ji doporučit do všech aplikací, které využívají MKP.

Poděkování

Tato práce byla podporována grantovým projektem Grantové agentury České republiky číslo 103 00 1202.



Obr.9: *lineární prvek*
hodnoty ϑ ve vybraných částech sítě.



Obr.10: *kvadratický prvek*
hodnoty ϑ ve vybraných částech sítě.

Reference

- [1] Zienkiewicz, O. C. a Zhu, J. Z. *Adaptivity and mesh generation*. Int. j. numer. methods eng., 32, 783-810 (1991).
- [2] Bittnar, Z. a Šejnoha, J. *Numerické metody mechaniky 1*. ASCE Press, (1992).
- [3] Bittnar, Z. a Šejnoha, J. *Numerické metody mechaniky 2*. ASCE Press, (1992).