



Národní konference s mezinárodní účastí  
**INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002**

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

**MATEMATICKÝ MODEL HYDRAULICKÉHO TLUMIČE  
S AKTIVNÍM ŘÍZENÍM VÝSLEDNÉ SÍLY**

Jan Šklíba, Rudolf Svoboda\*

**Abstrakt:**

*Príspevok predstavuje výsledky numerické simulace hydraulického tlumiče s řízením ve vodítku, u něhož je velikost obtokového proudu regulována podle okamžité odchylky od předepsaného průběhu tlumicí síly. Regulací lze dosáhnout předepsaného průběhu tlumicí síly u obou větví charakteristiky tlumiče.*

**Klíčová slova:** nelineární systémy, dynamika, hydraulický tlumič, aktivní řízení, charakteristika tlumiče, tlumicí síla

**Úvod**

V pracech [1],[2],[3] byl analyzován model pasivně řízeného tlumiče, konkrétně průběh odezvy síly tlumiče na skokovou změnu řídicího signálu s respektováním daných konstant regulátoru.

Řízení tlumiče podle okamžité velikosti realizované výsledné síly není podle dostupných technických pramenů úplnou novinkou a používá se ve zpětnovazebním řízení regulátoru tlumiče tak, aby regulační odchylka (rozdíl snímané síly a její požadované hodnoty) při dané (rovněž snímané) relativní rychlosti pístu byla minimalizována.

**Matematický model neřízeného tlumiče**

Matematický model tlumiče s tlaky soustředěnými do třech oblastí (do oblastí nad pístem, pod pístem a do akumulátoru) je tvořen soustavou obyčejných diferenciálních rovnic popisujících pohybové rovnice ventilů, podmínky dynamické rovnováhy proudů v tlumiči a vývoj a zanikání sloupců nasycených par, dále pak stavovou rovnici plynu v akumulátoru a algebraickými vztahy pro výpočet aktuálních koeficientů průtoku.

**1) Dynamická rovnováha sil na ventilech**

$$m_k (\ddot{x}_k - \ddot{y}(t)) \cdot (-1)^{k+1} + \delta_k \dot{x}_k + c_k (x_k + x_{kP}) + \tilde{Z}_k = (S_{k1} P_1 - S_{k2} P_2) \cdot (-1)^{k+1}$$
$$\tilde{Z}_k = \gamma_{k0} \alpha_k \sqrt{(P_1 - P_2) \cdot (-1)^{k+1}} \dot{x}_k + \sum_{j=1}^2 \sigma_{kj0} \alpha_k^2 x_k^j (P_1 - P_2) \cdot (-1)^{k+1}, \quad k=1,2, \quad x_k \geq 0$$
$$\tilde{Z}_k = \delta_{0k} \dot{x}_k + c_k^* x_k, \quad k=1,2, \quad x_k \leq 0$$

\* Prof. RNDr. Jan Šklíba, CSc., Technická univerzita v Liberci, fakulta strojní, Katedra mechaniky a pružnosti, Hálkova 6, 461 17 Liberec, telef. 048-5354131, e-mail : jan.skliba@vslib.cz  
RNDr. Rudolf Svoboda, CSc., TECHLAB s.r.o., Sokolovská 207, 190 00 Praha 9, tel./fax: 02-83890581, e-mail : techlab@czn.cz

kde  $\tilde{Z}_k$ ,  $k = 1, 2$ , představují hydrodynamické síly v případě otevřeného ventilu a odporové síly sedla ventilu v případě ventilu zavřeného,  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, 2$  jsou zdvihy ventilů a  $y(t)$  značí výchylku buzené pístnice. V případě dvojice ventilů ve dně válce vystupuje v těchto rovnicích tlakový spád  $P_3 - P_2$  namísto  $P_1 - P_2$  a odpadne výchylka  $y(t)$  odpovídající kinematickému buzení pístnice.

## 2) Dynamická rovnováha proudů (model se třemi tlaky)

Označme  $W_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  objemové proudy a změny objemu vyvolané pohybem pístu, vnějšího válce a ventilu (indexy 1, 2, 3 odpovídají po řadě prostoru nad pístem, pod pístem a akumulátoru). Pro  $W_i > 0$  proud do uvažovaného prostoru přitéká resp. objem prostoru se zmenšuje, pro  $W_i < 0$  proud odtéká resp. objem prostoru se zvětšuje.

Pro tlaky  $P_i$  v prostorách tlumiče nad pístem a pod pístem platí za předpokladu, že prostor je zcela vyplněn kapalinou, tedy není vyvinut sloupec nasycených par  $V_{pi}$  a tlak neklesl pod úroveň tlaku nasycených par  $P_{np}$ , rovnice

$$C_i \cdot \dot{P}_i = W_i, \quad \dot{V}_{pi} = 0, \quad i = 1, 2, \quad P_i \geq P_{np} \text{ a } V_{pi} = 0.$$

V případě, že buď tlak klesl pod úroveň tlaku nasycených par nebo je vyvinut sloupec nasycených par, zůstává tlak beze změny a dochází ke změně objemu sloupce nasycených par :

$$\dot{P}_i = 0, \quad \dot{V}_{pi} = -W_i, \quad i = 1, 2, \quad P_i < P_{np} \text{ nebo } V_{pi} > 0.$$

Pro tlak v akumulátoru platí rovnice

$$(C_3 + V_{V3} / p_3) \cdot \dot{P}_3 = W_3,$$

kde  $V_{V3}$  je objem vzduchu v akumulátoru. Hydraulické kapacity  $C_i$  jsou dány vztahy

$$C_1 = -(V_{10} - (S - S_0) \cdot y(t)) \cdot (E_k + E_{kP} P_1)^{-1}$$

$$C_2 = -(V_{20} - S \cdot y(t)) \cdot (E_k + E_{kP} P_2)^{-1}$$

$$C_3 = V_{30} \cdot (E_k + E_{kP} P_3)^{-1}$$

a výsledné objemové proudy  $W_i$  vztahy

$$W_1 = Q_{12} - Q_{21} + Q_{13} - (S - S_0) \cdot \dot{y}(t) - S_{21} \dot{x}_2 + S_{11} \dot{x}_1,$$

$$W_2 = -Q_{12} + Q_{21} - Q_{23} + Q_{32} + S \cdot \dot{y}(t) - S_3 \dot{x}_3 - S_{11} \dot{x}_1 + S_4 \dot{x}_4 + S_{21} \dot{x}_2$$

$$W_3 = Q_{23} - Q_{32} + Q_{13} - S_4 \dot{x}_4 + S_3 \dot{x}_3 - S_a \dot{x}_6$$

Veličiny  $Q_{ij}$  ( $i \neq j$ ) značí výsledný proud tekoucí z  $i$ -tého do  $j$ -tého prostoru. Mezi prostory nad pístem ( $i = 1$ ) a pod pístem ( $j = 2$ ) dochází pro oba směry k větvení toku na tok přes ventily, tok přes kalibrované otvory a parazitní toky přes netěsnosti v pístu a pracovním válci:

$K(P_i - P_j)$  značí parazitní proud netěsností pístu v pracovním válci (shodný pro oba směry průtoku)

$\alpha_0 K_1 \sqrt{P_1 - P_2}$  resp.  $\alpha'_0 K_1 \sqrt{P_2 - P_1}$  proud tekoucí kalibrovaným otvorem,

$\alpha_1 k_1 x_1 \sqrt{P_1 - P_2}$  resp.  $\alpha_2 k_2 x_2 \sqrt{P_2 - P_1}$  proud tekoucí šterbinou odlehčovacího resp. zpětného ventilu .

Celkový proud  $\tilde{Q}_{21}$  tekoucí např. odlehčovacím ventilem je pak dán vztahy

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{21} &= 0, & P_2 &\leq P_1 \\
&= K(P_2 - P_1) + \alpha'_0 K_1 \sqrt{P_2 - P_1}, & P_2 &> P_1, \quad x_2 < 0 \\
&= K(P_2 - P_1) + (\alpha'_0 K_1 + k_2 \alpha_2 x_2) \sqrt{P_2 - P_1}, & P_2 &> P_1, \quad 0 \leq x_2 \leq x_{2\alpha} \\
&= K(P_2 - P_1) + (\alpha'_0 K_1 + k_2 \alpha_2 x_{2\alpha}) \sqrt{P_2 - P_1}, & P_2 &> P_1, \quad x_2 > x_{2\alpha}
\end{aligned}$$

Obdobné rovnice platí i pro tři zbývající ventily.

### 3) Stavová rovnice plynu v akumulátoru

$$V_b = (V_{0a} - V_{30} - F_a x_b) = \Phi(n, P_3, T)$$

### 4) Závislosti koeficientů průtoku ventily $\alpha_i$ ( $i=1, \dots, 4$ ) a kalibrovanými otvory $a_5, a_6$ na odpovídajících Reynoldsových číslech

$$\alpha_i = \alpha_{i00} + \alpha_{i0}(1 - \exp(\alpha_{i1} \text{Re}_i)), \quad \text{kde} \quad \text{Re}_i = \frac{2Q_{vi}}{\pi d_{Hi} \nu},$$

a  $Q_{vi}$  představuje proud tekoucí přes písty nebo proudící kalibrovanými otvory s hydraulickým průměrem  $b_{vi}$ .

### Řízení podle okamžité odchylky realizované síly

Pro numerické simulace byl modelován tlumič s řízením ve vodítku, u něhož byla velikost obtokového proudu  $Q_{\text{reg}}$  regulována podle okamžité odchylky od předepsaného průběhu tlumicí síly. Regulovaný průtok  $Q_{\text{reg}}$  z nadpístového prostoru do akumulátoru je realizovaný jednorozměrným proudem tekoucím přes regulovanou škrťací plochu regulátoru  $S_{\text{reg}}$ , takže můžeme psát (předpokládáme průtok turbulentního typu)

$$Q_{\text{reg}} = \alpha_5 K_{\text{reg}} \sqrt{(P_1 - P_3)}, \quad K_{\text{reg}} = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot S_{\text{reg}}, \quad S_{\text{reg}} = S_{\text{reg}}(\varphi).$$

Tok  $Q_{\text{reg}}$  vstupuje do celkové rovnováhy proudů v tlumiči, v případě řízení vodítkem se načítá do celkového toku  $Q_{13}$  tekoucího z prostoru nad pístem do akumulátoru.

Regulátor je modelován oscilačním členem 2.řádu. Řídící plocha regulátoru  $S_{\text{reg}}$  je obecně nelineární funkcí jeho řídicí veličiny  $\varphi(t)$ :  $S_{\text{reg}} = S_{\text{reg}}(\varphi)$ . Označíme-li  $u(t)$  vstupní veličinu regulátoru, bude pro řídicí veličinu  $\varphi$  určující plochu  $S_{\text{reg}}(\varphi)$  platit diferenciální rovnice

$$T^2 \ddot{\varphi} + 2aT \dot{\varphi} + \varphi = K_0 \cdot u(t),$$

kde  $K_0$  je konstanta zesílení,  $T$ ,  $a$  jsou časové konstanty regulátoru, a za řízenou veličinu  $\varphi$  byl vzat úhel otevíření regulované škrťací plochy - obdélníkové šterbiny na válcové ploše. Vstupní signál  $u(t)$  byl uvažován ve tvaru

$$u(t) = k (F_h(t) - F_{\text{reg}}(t)),$$

$F_h(t)$  okamžitá tlumicí síla (rozdíl tlakových sil působících na píst tlumiče),  
 $F_{\text{reg}}(t)$  předepsaný průběh síly.

Rovněž v pracích [1] ÷ [5] byl regulátor modelován oscilačním členem 2.řádu se stejnou diferenciální rovnicí pro řídicí veličinu  $\varphi(t)$ . Práce [2],[3],[5] byly věnovány zkoumání odezvy tlumiče na regulační zásah při různých typech použité regulace; signál  $u(t)$  byl přitom brán ve tvaru schodovité funkce. V práci [1] resp.[4] byla zkoumána odezva soustavy na dvoustavové řízení - přepínání mezi stavy neregulovaného tlumiče (se zavřenou řídicí plochou  $S_{\text{reg}}$ ) a plně regulovaného tlumiče (s

plně otevřenou řídicí plochou  $S_{\text{reg}}$ ) - vedoucí k přeskoku mezi krajními větvemi charakteristik tlumiče (přepínání mezi „tvrdým“ a „měkkým“ režimem tlumiče).

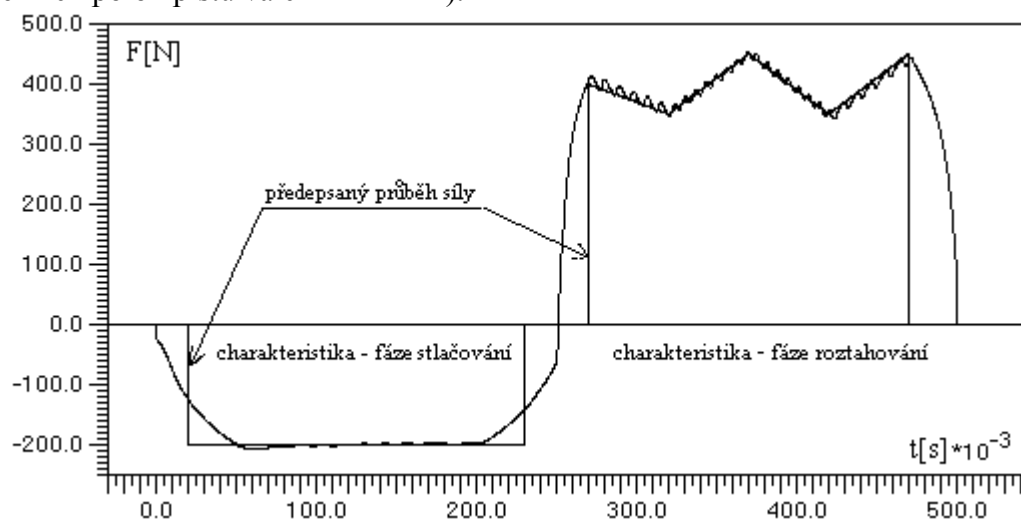
Ve všech těchto případech pasivní regulace přicházel regulační zásah zvenčí a neměl přímou vazbu na veličiny stavového vektoru tlumiče. Diferenciální rovnice pro řídicí veličinu  $\varphi(t)$  byla nezávislá na soustavě rovnic tlumiče a bylo možno ji řešit odděleně. Při řešení rovnic tlumiče se počítala odezva systému na předem známý časový průběh regulačního zásahu daného známým průběhem řídicí veličiny  $\varphi$  na čase.

V případě aktivního řízení výsledné síly tlumiče prostřednictvím okamžité odchylky od předepsaného průběhu síly představuje regulátor zpětnovazební člen, který přes hodnotu řídicí veličiny  $\varphi(t)$  určuje velikost regulačního toku  $Q_{\text{reg}}$ . Změna  $Q_{\text{reg}}$  vyvolá změny tlaků nad pístem (výrazný vliv)  $P_1$  a pod pístem  $P_2$  (ovlivňován menší měrou), z kterých se zpětně určuje výsledná tlumicí síla. Zpětnovazební člen aktivního řízení tedy vede k vzájemné provázanosti rovnic tlumiče s diferenciální rovnicí regulátoru. S ohledem na tuto vazbu nelze řešit regulační rovnici separátně, ale je nutno ji včlenit do soustavy rovnic tlumiče.

Vzhledem ke složitosti systému rovnic je třeba již pro řešení neregulovaného tlumiče využívat specifické metody numerické integrace. Po rozšíření soustavy rovnic o aktivní řízení síly nebylo předem jasné, zda nenastanou problémy s numerickou integrací. První etapou v modelování tlumiče s aktivním řízením a zároveň hlavním cílem této práce bylo ověření, zda a jak se užívané numerické metody řešení vyrovnají s touto novou vazbou.

## Výsledky numerických simulací

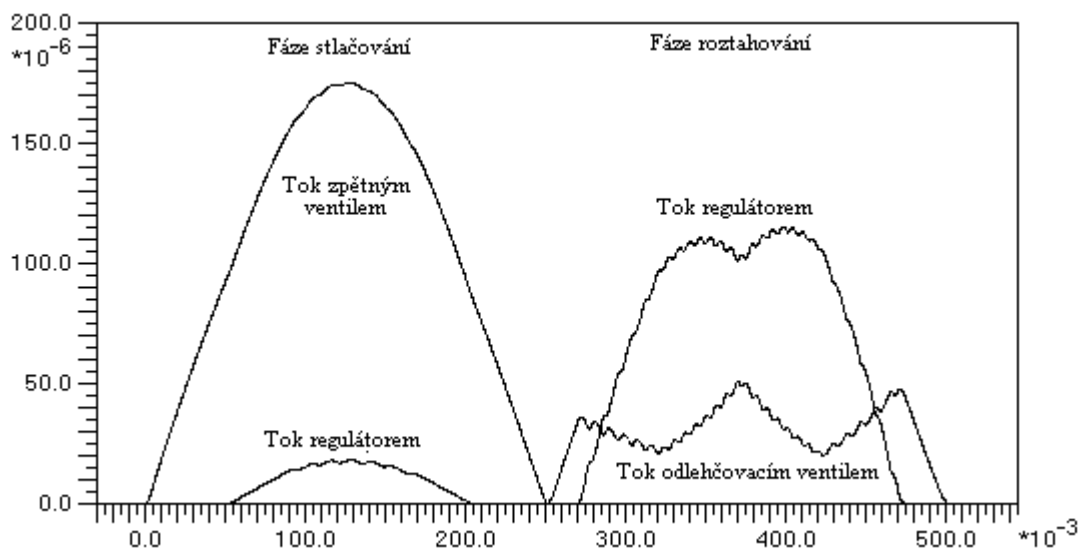
Pro výpočty regulace bylo využito modelu automobilového tlumiče, vyvinutého pro Auto Škoda Mladá Boleslav v roce 1992 (viz též [2]). V modelu byla kinematicky buzena pístnice s frekvencí 1,66 Hz resp. 2,0 Hz, amplitudy buzení byly uvažovány v rozmezí od 15 do 50 mm (maximální teoretická amplituda 57 mm je dána vzdáleností mezních poloh pístu válci - 114 mm).



Obr.1: Tlumicí síla v průběhu jednoho pracovního cyklu

Po kontrolních výpočtech neregulovaného a pasivně regulovaného tlumiče byla propočítána řada příkladů charakterizovaných různými volbami časových konstant regulátoru  $a, T$  a koeficientů  $K_o, k$ . Výsledek jednoho z počítaných příkladů regulace tlumiče je uveden na obrázku 1. Je vidět, že pomocí regulace realizované propojením

nadpístového prostoru s akumulátorem lze žádoucím způsobem modifikovat obě větve charakteristiky tlumiče.

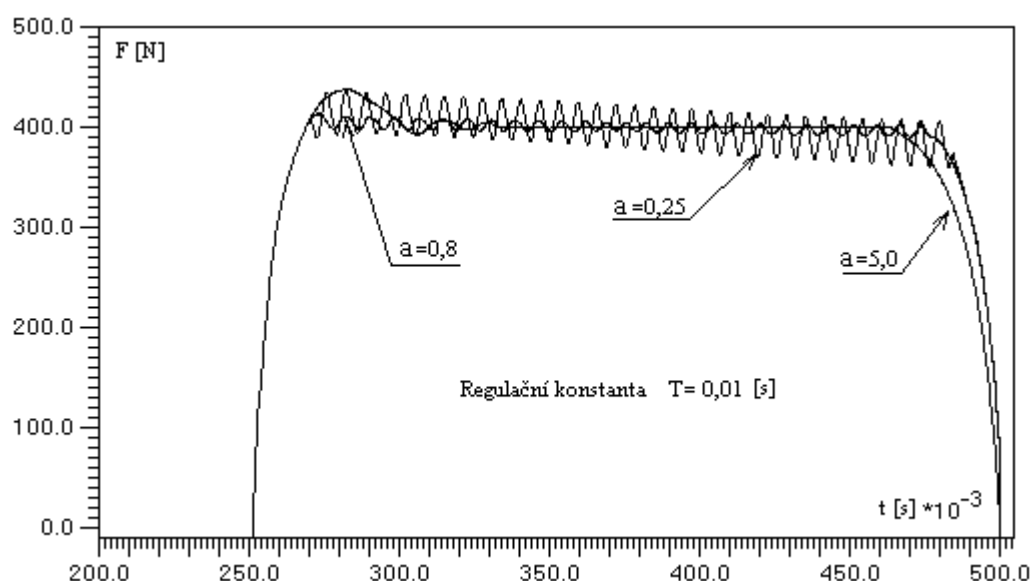


Obr.2 : Porovnání velikosti toku regulátorem s toky otevřenými ventily

Porovnání velikosti toků vytékajících resp. přitékajících do oblasti nad pístem je na obrázku 2. Velikosti toků se výrazně liší podle fáze tlumiče. Ve fázi stlačování tlumiče je pro řízení potřebný mnohem menší regulační tok než ve fázi roztahování. To je vyvoláno především rozdílným směrem pohybu pístnice v obou fázích : při stlačování tlumiče se prostor nad pístem zvětšuje a tok zpětným ventilem směřující do oblasti nad pístem má opačný směr než je tok regulátorem, naopak při roztahování tlumiče se prostor nad pístem zmenšuje a oba toky, tj. tok regulátorem a (v této fázi otevřeným) odlehčovacím ventilem mají shodný směr - vytékají z oblasti nad pístem do akumulátoru resp. do oblasti pod pístem.

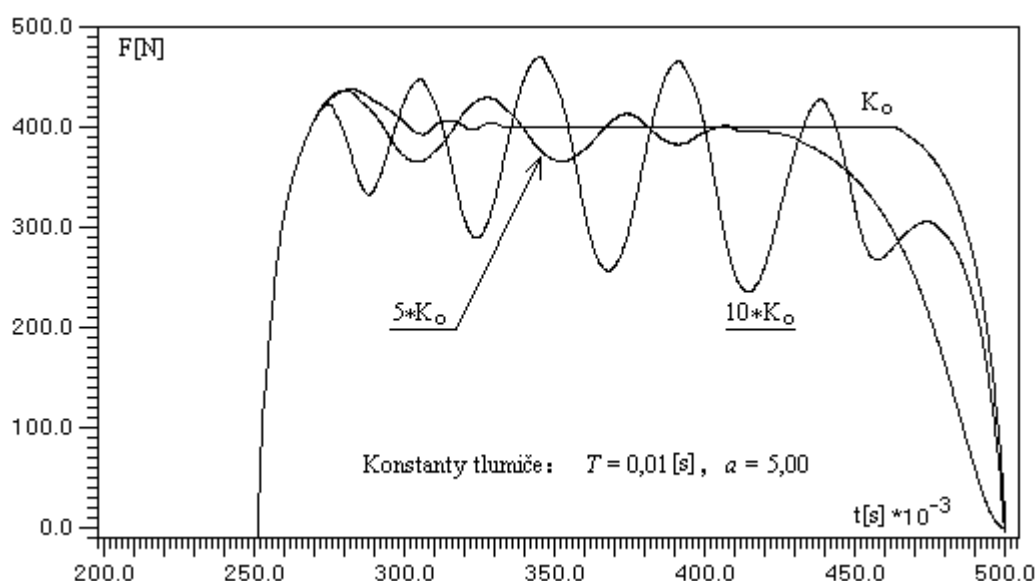
Na obr. 1 jsou patrné oscilace vypočtené regulované síly kolem předepsaného průběhu síly. Na řadě provedených výpočtů se prokázalo, že průběh regulované síly (amplitudy a frekvence oscilací kolem předepsané hodnoty) podstatně závisí na volbě veličin regulace, a to nejen na časových konstantách  $a$ ,  $T$  regulátoru, jak bylo možno pozorovat v případech pasivně řízeného tlumiče, ale i na konstantách zesílení  $K_0$  resp.  $k$ . Je podstatně obtížnější nastavit kombinace těchto konstant tak, aby se dosáhlo žádoucího výsledku.

Na obrázku 3 jsou uvedeny výsledky regulace síly tlumiče ve fázi roztahování na konstantní hodnotu 400 [N]. Časová konstanta regulátoru  $T = 0,01$  [s], a z výpočtů s různými hodnotami konstanty  $a$  jsou zobrazeny výsledky pro  $a = 0,25$ ,  $a = 0,8$  a  $a = 5,0$ . Oscilace regulované síly se při vyšších hodnotách tlumení  $a$  zmenší, v případě přetlumeného regulátoru se zcela potlačí, ovšem za cenu většího překmitu síly na začátku regulace. Za povšimnutí stojí další typický jev patrný zejména při menších hodnotách  $a$ , zde pro  $a = 0,25$ . Jde o mírný pokles střední hodnoty regulované síly oproti síle předepsané v průběhu regulačního zásahu, kdy na začátku regulace je mírně nad a na konci regulace mírně pod předepsaným průběhem síly. Tento jev byl pozorován nejen pro uváděné kombinace konstant regulátoru, ale ve všech počítaných příkladech a pro všechny kombinace, a souvisí zřejmě s rychlostí resp. se zrychlením pístnice tlumiče při kinematickém buzení.



Obr.3: Regulace síly tlumiče ve fázi roztahování na hodnotu 400 N

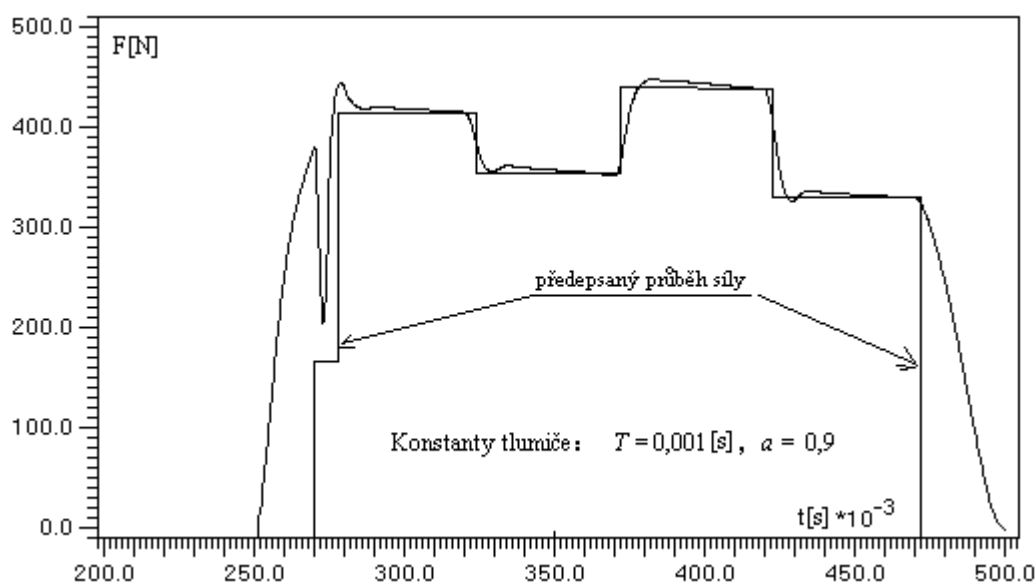
Z uvedených výsledků by se mohlo zdát, že vhodně zvolenou konstantou  $a$  lze vždy minimalizovat nebo potlačit oscilace vypočtené regulované síly. Bohužel, není tomu tak. Ukazuje se, že při nevhodně zvolené konstantě zesílení  $K_0$  nelze dosáhnout předepsaného průběhu síly ani při libovolně velkém  $a$ , dokonce ani různými kombinacemi obou časových konstant  $a$ ,  $T$ . Z obrázku 4 je vidět, že oscilace síly jsou tak velké, že jsou omezeny až charakteristikou neregulovaného tlumiče.



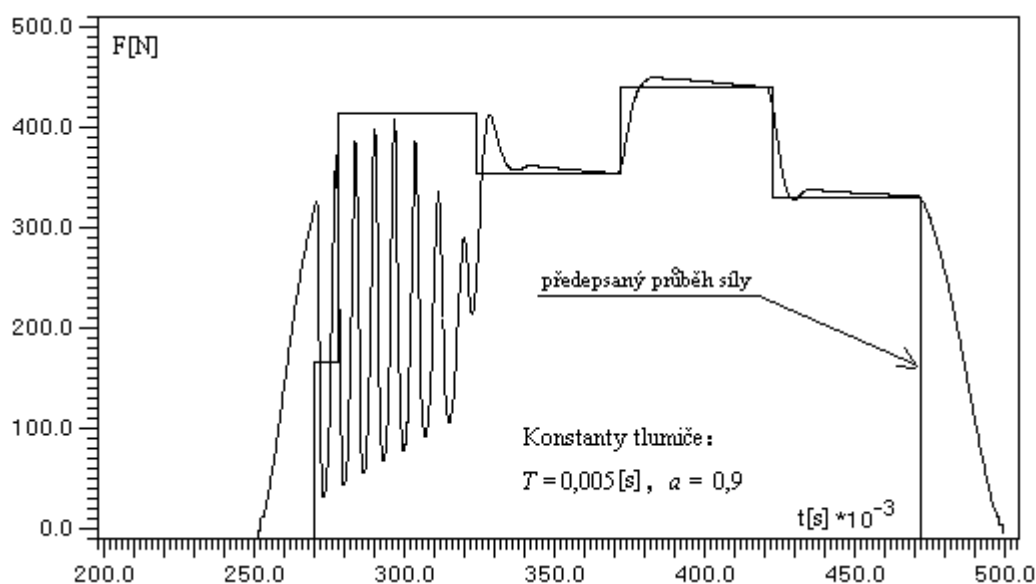
Obr.4 : Průběhy výsledné síly v závislosti na volbě konstanty  $K_0$

Počítána byla rovněž řada příkladů, kde jsme se snažili modelovat charakteristiku podle složitějšího průběhu předepsané síly. Sem patří zejména skokové změny v předepsané síle, tedy regulace blízká se dvoustavovému řízení [1]. Podstatný rozdíl je ovšem v tom, že na rozdíl od dvoustavového řízení se nejedná o přeskoky mezi jednotlivými větvemi charakteristiky tlumiče, ale o přeskoky na jiné, zvolené hladiny tlumicí síly. Jak se dalo očekávat, v případě skokových změn v předepsané síle tlumiče se nejlepší výsledky simulací dosáhly s nejmenšími hodnotami konstanty  $T$ , konkrétně při volbě  $T = 0,001$  [s], kdy vypočtená odezva sledovala předepsaný průběh síly nejvěrněji. Přesto

je z obrázku 5 vidět, že v případě velkého skoku v požadované síle (viz začátek regulace, kdy by síla měla spadnout z hodnoty  $\approx 380$  N na charakteristice na předepsaných 180 N) soustava nestačí dostatečně rychle reagovat. Rychlost odezvy regulované soustavy tlumiče na skokovou změnu v předepsané síle lze sice zvýšit zmenšením konstanty  $\alpha$ , v řešení se však opět objevují oscilace kolem předepsané hodnoty síly. Obdobně se mohou oscilace projevit i v části řešení při větší hodnotě časové konstanty  $T$ , jak je vidět z grafu na obrázku 6.



Obr.5: Odezva tlumiče na skokové změny v předepsaném průběhu tlumicí síly



Obr.6: Odezva tlumiče na skokové změny v předepsaném průběhu tlumicí síly: oscilace síly při větší časové konstantě  $T$

## Závěr

Zkušenosti s počítanými příklady prokázaly, že moderní numerické metody pro integraci stiff-systémů diferenciálních rovnic používané při řešení neregulovaného resp. pasivně regulovaného hydraulického tlumiče jsou bez problémů schopny zvládnout i systém rovnic rozšířený o zpětnovazební regulační člen v případě aktivně řízeného tlumiče.

V modelu použité jednoduché řízení tlumiče pouze podle okamžité velikosti realizované výsledné síly (přesněji podle okamžitého rozdílu snímané síly a její požadované hodnoty) není zřejmě nejvhodnějším způsobem pro aktivní řízení charakteristik tlumiče. Průběh regulované síly (amplitudy a frekvence oscilací kolem předepsané hodnoty) totiž závisí nejen na volbě veličin použité regulace, ale i na dalších parametrech stavu tlumiče, které v modelované regulaci nebyly respektovány. Cílem této práce však nebylo hledání optimální metody aktivního řízení, nýbrž ověření, že model hydraulického tlumiče lze rozšířit o regulační člen se zpětnou vazbou na veličiny stavového vektoru řešení. Zavedení regulace s PID regulátorem, která by lépe odpovídala obvykle užívaným regulacím, je předmětem dalšího řešení.

## **Poděkování**

Práce vznikla za podpory grantového projektu MŠMT v rámci projektu COST P4-20 „Zpřesnění modelu hydraulického tlumiče“.

## **Literatura**

- [1] Šklíba J., Svoboda R.: Hydraulic damper with two-state control, 3<sup>rd</sup> International Conference „Mechatronics, Robotics and Biomechanics“, Třešť, 2001
- [2] Šklíba J., Svoboda R.: Hydraulic damper with control of upper and lower damping, Colloquium „Dynamics of Machines“, Praha 2001
- [3] Šklíba J., Svoboda R.: Hydraulic damper with electric control, Mezinárodní konference „Diagnostika a aktivní řízení“, VUT Brno, Třešť, 2000
- [4] Šklíba J., Svoboda R.: Influence of time delay of hydraulic damper controller, International Conference „Vibrations and Diagnostics 2001“, Kaunas-Vilnius
- [5] Šklíba J., Svoboda R.: On the problem of hydraulic damper valve oscillation, Fifth International Conference on Vibration Problems ICOVP-2001, Moskva