Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002
13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

HOPFOVA BIFURKACE ROVNOVÁŽNÝCH STAVŮ POHONOVÝCH SOUSTAV

František Procházka*)

1. Úvod

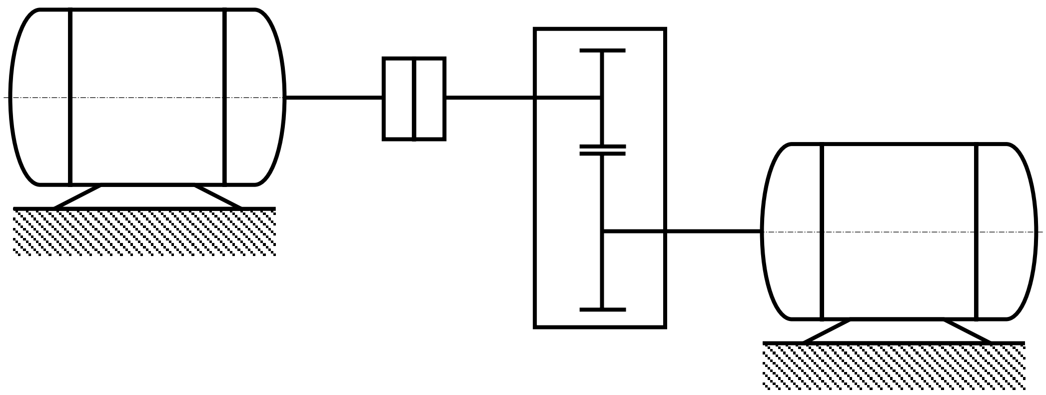
Předkládaný příspěvek se zabývá problematikou kvalitativní analýzy dynamických vlastností pohonových soustav na hranici oblasti stability, stanovené na základě podmínek stability linearizovaných pohybových rovnic pohonové soustavy, kdy reálná část komplexně sdružených vlastních čísel nabývá nulových hodnot. To znamená, že od daného rovnovážného stavu pohonové soustavy se může odvětvit periodické řešení, které se v reálné pohonové soustavě projevuje vznikem intenzivních samobuzených oscilací.

Jelikož při řešení dané problematiky nabývají reálné části komplexně sdružených vlastních čísel linearizovaných pohybových rovnic nulových hodnot, potom nelineární členy, vyskytující se v pohybových rovnicích, nabývají řádově stejných a někdy i vyšších hodnot než členy lineární, tj. k řešení není oprávněno použít „standartních“ metod nelineární mechaniky (metoda malého parametru, metoda středních hodnot, atd.), protože tyto metody vycházejí z předpokladu, co do velikosti malých nelineárních členů. Z tohoto důvodu bylo k řešení dané problematiky použito matematického aparátu kvalitativní teorie diferenciálních rovnic (přesněji metody konstruování normalizovaných invariantních podprostorů), tedy oboru, který se v současné době velmi bouřlivě rozvíjí a jehož se velmi často využívá při studiu chemických a biologických systémů.

2. Pohybové rovnice pohonové soustavy

Uvažujme pohonovou soustavu znázorněnou na obr.1, která představuje pohon „klasického uspořádání“ : motor – spojka – převodový mechanismus – pracovní stroj. Pro tento typ uspořádání pohonové soustavy byl v práci [1] odvozen, za předpokladu tuhých spojovacích prvků mezi základními strukturními jednotkami pohonové soustavy, její matematický model (tzv. modelová soustava pohonu s tuhými členy) ve tvaru :

*) Ing. František Procházka, ÚMT – VUT FSI Brno, Technická 2, 616 00 Brno. E-mail: prochazka@umtn.fme.vutbr.cz, tel.: 02/4114 2888, 0606/819287.



Obr.1. Schématické znázornění pohonové soustavy klasického uspořádání.

$$
\begin{aligned}
& I_{red}\,\dot{\tilde{\omega}} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k^Z(\omega_0)\,\tilde{\omega}^k - \tilde{M}_M = P_I(t) + P_Z(t)\,, \\
& \tau_M\,\dot{\tilde{M}}_M - \sum_{k=1}^{n} \beta_k^M(\omega_0)\,\tilde{\omega}^k + \tilde{M}_M = P_M(t)\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

kde jednotlivé veličiny, vystupující v těchto rovnicích, mají následující význam :

I_{red} …… moment setrvačnosti redukovaný na hřídel motoru,

$\tilde{M}_M$ …… poruchová složka hnacího momentu motoru,

$\tilde{\omega}$ …… poruchová složka úhlové rychlosti,

β_k^Z …… strmost k - tého řádu momentové charakteristiky pracovního stroje,

β_k^M …… strmost k - tého řádu momentové charakteristiky hnacího motoru

$P_I(t)$ …… poruchová funkce momentu setrvačnosti,

$P_Z(t)$ …… poruchová funkce zatěžujícího momentu,

$P_M(t)$ …… poruchová funkce hnacího momentu,

τ_M …… časová konstanta motoru,

přičemž platí :

$$
\beta_k^Z(\omega_0) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k M_Z(\dot{\varphi})}{d\dot{\varphi}^k}\right]_{\omega_0},
$$

$$
\beta_k^M(\omega_0) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k M_{MS}(\dot{\varphi})}{d\dot{\varphi}^k}\right]_{\omega_0},
$$

$$P_I(t) = \frac{\omega_0^2}{2} \sum_{j=1}^{m} j A_j^{red} \sin j\omega_0 t - j B_j^{red} \cos j\omega_0 t \, ,$$

$$P_Z(t) = -\sum_{j=1}^{m} A_j^Z(\omega_0) \cos j\omega_0 t - B_j^Z(\omega_0) \sin j\omega_0 t \, ,$$

$$P_M(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j^M(\omega_0) \cos j\omega_0 t - B_j^M(\omega_0) \sin j\omega_0 t \, ,$$

kde ω_0 je úhlová rychlost pohonové soustavy v rovnovážném stavu. V práci [1] je dále dokázáno, že matematický model (1) pohonové soustavy je prakticky použitelný ve všech případech, když nejvyšší frekvence budících účinků, které jsme se rozhodli ještě respektovat, je více jak pětkrát menší než nejnižší (základní) úhlová frekvence netlumeného kmitání pohonové soustavy.

3. Podmínky stability a vzniku bifurkací rovnovážného stavu

Jelikož obecně platí, že podmínky stability rovnovážného stavu vlivem poruch počátečních podmínek bývají totožné s podmínkami stability rovnovážného stavu vlivem poruchových funkcí, omezíme se v dalším na zkoumání podmínek stability rovnovážného stavu vlivem poruch počátečních podmínek, tj. budeme vyšetřovat stabilitu rovnovážného stavu soustavy

$$\begin{aligned} &I_{red}\, \dot{\tilde{\omega}} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k^Z(\omega_0)\, \tilde{\omega}^k - \tilde{M}_M = 0 \, , \\ &\tau_M\, \dot{\tilde{M}}_M - \sum_{k=1}^{n} \beta_k^M(\omega_0)\, \tilde{\omega}^k + \tilde{M}_M = 0 \, , \end{aligned} \tag{2}$$

při odchylkách počátečních podmínek od nuly, tj.

$$\tilde{\omega}(0) = \tilde{\omega}_0 \neq 0 \, , \quad \tilde{M}_M(0) = \tilde{M}_0 \neq 0 . \tag{3}$$

K vyšetřování stability rovnovážného stavu použijeme první Ljapunovovu metodu (metoda charakteristických exponentů). Za tím účelem si nejdříve zavedeme nové proměnné

$$y_1 = \tilde{\omega} \, , \quad y_2 = \tilde{M}_M \, , \tag{4}$$

pomocí kterých si převedeme soustavu pohybových rovnic (2), ve kterých se omezíme na členy prvního až třetího řádu (tj. položíme $n = 3$), do následujícího tvaru

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{f}(\mathbf{y}) \, , \tag{5}$$

kde jednotlivé matice jsou dány vztahy

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\beta_1^Z}{I_{red}} & \dfrac{1}{I_{red}} \\ \dfrac{\beta_1^M}{\tau_M} & -\dfrac{1}{\tau_M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\beta_2^Z}{I_{red}} y_1^2 - \dfrac{\beta_3^Z}{I_{red}} y_1^3 \\ \dfrac{\beta_2^M}{\tau_M} y_1^2 + \dfrac{\beta_3^M}{\tau_M} y_1^3 \end{bmatrix}.$$

Nejdříve vyšetříme linearizaci soustavy (5) v okolí počátku (rovnovážného stavu). Matice linearizace **B** má vlastní čísla

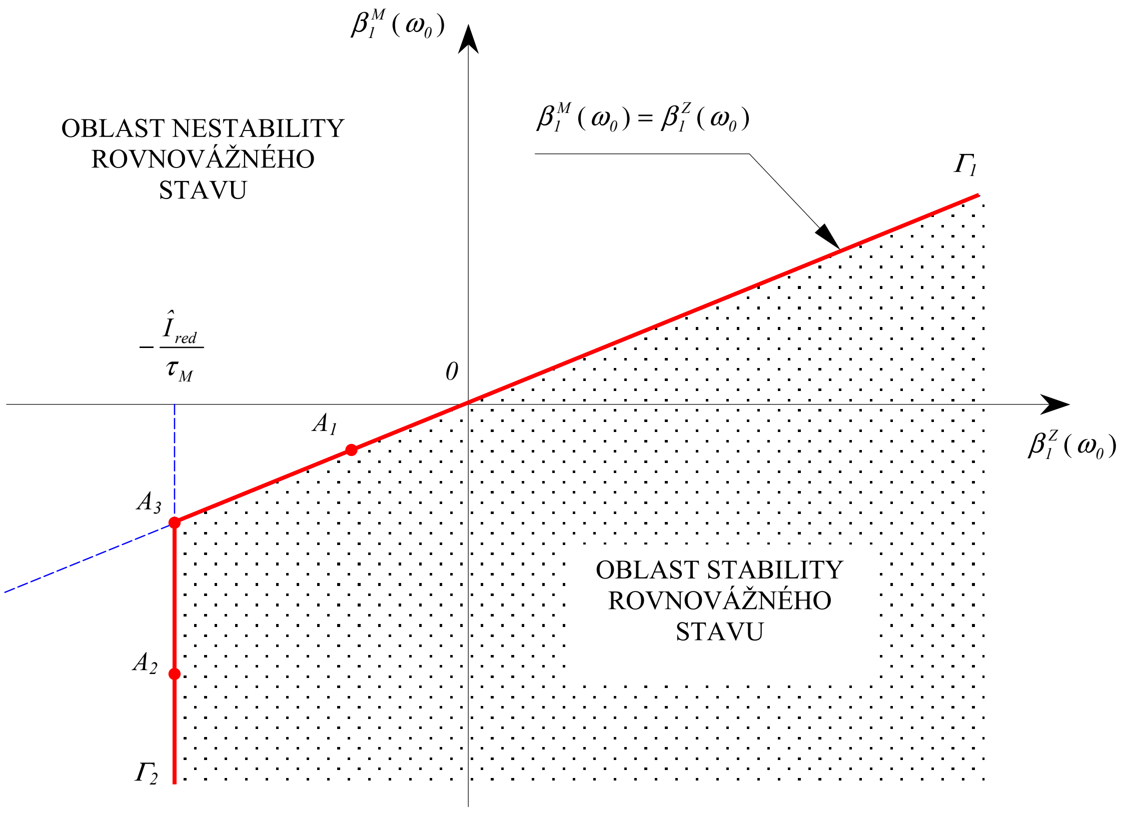
$$\lambda_1 = -\frac{I_{red} + \tau_M \beta_1^Z}{2\,\tau_M I_{red}} - \sqrt{\left[\frac{I_{red} + \tau_M \beta_1^Z}{2\,\tau_M I_{red}}\right]^2 - \frac{\beta_1^Z - \beta_1^M}{\tau_M I_{red}}}\ ,$$
$$\lambda_2 = -\frac{I_{red} + \tau_M \beta_1^Z}{2\,\tau_M I_{red}} + \sqrt{\left[\frac{I_{red} + \tau_M \beta_1^Z}{2\,\tau_M I_{red}}\right]^2 - \frac{\beta_1^Z - \beta_1^M}{\tau_M I_{red}}}\ , \tag{6}$$

se zápornou reálnou částí tehdy a jen tehdy, jsou-li splněny následující podmínky

$$\frac{I_{red} + \tau_M \beta_1^Z}{2\,\tau_M I_{red}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_1^Z > -\frac{I_{red}}{\tau_M}\ , \tag{7a}$$

$$\frac{\beta_1^Z - \beta_1^M}{\tau_M I_{red}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_1^Z > \beta_1^M\ , \tag{7b}$$

které lze poměrně jednoduše znázornit graficky, jak je patrné z obr.2.



Obr.2. Oblast asymptotické Ljapunovské stability rovnovážného stavu podle první metody Ljapunova.

Z matematického vyjádření podmínek stability rovnovážného stavu (7) je zřejmá vzájemná provázanost mezi základními vlastnostmi jednotlivých strukturních jednotek pohonové soustavy a vlastností pohonové soustavy jako celku, přičemž :

- podmínka stability (7a) omezuje hodnotu strmosti momentové charakteristiky pracovního stroje $\beta_1^Z(\omega_0)$ v závislosti na centrované složky redukovaného momentu setrvačnosti I_{red}, která vyjadřuje odpor pohonové soustavy jako celku proti změně jejího pohybového stavu, a na časové konstantě motoru τ_M, která reprezentuje dynamické vlastnosti motoru,
- podmínka stability (7b) omezuje hodnotu strmosti momentové charakteristiky hnacího motoru $\beta_1^M(\omega_0)$ v závislosti na hodnotě strmosti momentové charakteristiky pracovního stroje $\beta_1^Z(\omega_0)$.

Vyšetřujme nyní podmínky stability rovnovážného stavu nelineární pohonové soustavy na hranicích oblastí stability, zobrazených na obr.2 křivkami Γ_1 a Γ_2, kdy některé z vlastních čísel matice linearizace **B** má nulovou reálnou část, tj. budeme vyšetřovat zda na hranicích oblastí stability dochází k bifurkaci rovnovážného stavu, která má za následek kvalitativní změnu v chování dané nelineární pohonové soustavy. Jak je patrné z obr.2, který znázorňuje oblasti stabilního a nestabilního chování nelineární pohonové soustavy v blízkém okolí rovnovážného stavu, přicházejí v úvahu následující tři možnosti :

- Hranice oblasti stability Γ_1 : tato možnost nastává ve všech případech kdy platí (viz. např. bod A_1 na obr.2)

$$\beta_1^Z(\omega_0) > -\frac{I_{red}}{\tau_M}, \quad \beta_1^M(\omega_0) = \beta_1^Z(\omega_0), \tag{8}$$

  což po dosazení do vztahů (6) pro vlastní čísla značí, že vlastní číslo λ_1 je záporné reálné, kdežto vlastní číslo λ_2 je nulové. To znamená, že na hranici oblasti stability Γ_1 může docházet k ***reálné*** bifurkaci rovnovážného stavu, přičemž podrobným rozborem této situace se zabývá autorův článek [2].

- Hranice oblasti stability Γ_2 : tato možnost nastává ve všech případech kdy platí (viz. např. bod A_2 na obr.2)

$$\beta_1^M(\omega_0) < -\frac{I_{red}}{\tau_M}, \quad \beta_1^Z(\omega_0) = -\frac{I_{red}}{\tau_M}, \tag{9}$$

  což po dosazení do vztahů (6) pro vlastní čísla značí, že komplexně sdružená vlastní čísla mají nulovou reálnou část, tzn. že platí $Re\,\lambda_1 = Re\,\lambda_2 = 0$. To znamená, že na hranici oblasti stability Γ_2 může docházet k ***Hopfově*** (komplexní) bifurkaci rovnovážného stavu, přičemž podrobný rozbor této možnosti bude náplní tohoto článku.

- Průsečík hranic Γ_1 a Γ_2 oblastí stability : tato možnost nastává ve všech případech, kdy jsou splněny následující podmínky (viz. bod A_3 na obr.2)

$$\beta_1^Z(\omega_0) = -\frac{I_{red}}{\tau_M}, \quad \beta_1^M(\omega_0) = \beta_1^Z(\omega_0), \tag{10}$$

  což po dosazení do vztahů (6) pro vlastní čísla značí, že obě vlastní čísla jsou nulové, tzn. že platí $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Jelikož současné splnění podmínek (10) je v praktických aplikacích velmi nepravděpodobné, nebudeme se touto možností dále zabývat.

4. Hopfova bifurkace rovnovážného stavu pohonové soustavy

Jak již bylo řečeno, na hranici oblasti stability Γ_2, kde platí podmínky (9), mají komplexně sdružená vlastní čísla nulovou reálnou část a může tedy docházet ke vzniku tzv. komplexní (Hopfovy) bifurkace rovnovážného stavu, kdy se od rovnovážného stavu odvětví periodické řešení. Otázkou vzniku tohoto typu bifurkace rovnovážného stavu se budeme zabývat v tomto odstavci, přičemž k odpovědi na tuto otázku využijeme algoritmu uvedeného v práci [1] na str.195-207.

Vlastní čísla matice linearizace **B** jsou v okolí hranice oblasti stability Γ_2 (viz. např. bod A_2 na obr.2) komplexně sdružená. Pro další řešení je výhodné tato komplexní vlastní čísla vyjádřit v následujícím algebraickém tvaru

$$\lambda_1 = \alpha(\beta_1^Z) - i\,\Omega(\beta_1^Z), \quad \lambda_2 = \alpha(\beta_1^Z) + i\,\Omega(\beta_1^Z), \tag{11}$$

kde veličiny $\alpha(\beta_1^Z)$ a $\Omega(\beta_1^Z)$ jsou dány následujícími výrazy

$$\alpha(\beta_1^Z) = -\frac{I_{red} + \tau_M\,\beta_1^Z}{2\,\tau_M\,I_{red}}, \quad \Omega(\beta_1^Z) = \sqrt{\frac{\beta_1^Z - \beta_1^M}{\tau_M\,I_{red}} - \left[\frac{I_{red} + \tau_M\,\beta_1^Z}{2\,\tau_M\,I_{red}}\right]^2}\,. \tag{12}$$

Kritická hodnota parametru β_1^Z, při které se veličina $\alpha(\beta_1^Z)$ rovná nule (tzn. že reálné části vlastních čísel (11) jsou nulové) je

$$\alpha(\beta_1^Z) \equiv -\frac{I_{red} + \tau_M\,\beta_1^Z}{2\,\tau_M\,I_{red}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\beta_1^Z)_{krit} = -\frac{I_{red}}{\tau_M}, \tag{13}$$

což je v plné shodě s rovnicí (9). Nyní musíme ověřit předpoklady použitelnosti algoritmu pro vyšetřování vlastností Hopfovy bifurkace (viz. [1], str.200), které mají v našem případě tvar

$$\alpha_{krit} = 0, \quad \dot{\alpha}_{krit} \neq 0, \quad \Omega_{krit} \neq 0. \tag{14}$$

Derivací vztahů (12) podle proměnné β_1^Z dostáváme

$$\dot{\alpha} \equiv \frac{d\alpha}{d\beta_1^Z} = -\frac{1}{2\,I_{red}}, \quad \dot{\Omega} \equiv \frac{d\Omega}{d\beta_1^Z} = \frac{1 - \dfrac{I_{red} + \tau_M\,\beta_1^Z}{2\,I_{red}}}{2\,\tau_M\,I_{red}\sqrt{\dfrac{\beta_1^Z - \beta_1^M}{\tau_M\,I_{red}} - \left[\dfrac{I_{red} + \tau_M\,\beta_1^Z}{2\tau_M\,I_{red}}\right]^2}}\,. \tag{15}$$

Dosadíme-li nyní do vztahů (12) a (15) za parametr β_1^Z jeho kritickou hodnotu, definovanou rovnicí (9), resp. rovnicí (13), obdržíme následující výrazy

$$\alpha_{krit} = 0, \quad \dot{\alpha}_{krit} = -\frac{1}{2\,I_{red}}, \quad \Omega_{krit} = \sqrt{-\frac{I_{red} + \tau_M\,\beta_1^M}{\tau_M^2\,I_{red}}}\,. \tag{16}$$

Porovnáme-li vztahy (16) s podmínkami (14) vidíme, že předpoklady použitelnosti algoritmu pro vyšetřování vlastností Hopfovy bifurkace jsou v našem případě splněny.

Vlastní vektor matice linearizace **B**, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = \alpha - i\,\Omega$, který stanovíme řešením rovnice $(\mathbf{B} - \lambda_1\,\mathbf{E})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, je

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \tau_M \\ -I_{red} - i\,\tau_M\,I_{red}\,\Omega_{krit} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_M \\ -I_{red} \end{bmatrix} + i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_M\,I_{red}\,\Omega_{krit} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Nyní si převedeme pomocí transformační matice

$$\mathbf{P} = [\ Re\,\mathbf{v} \quad Im\,\mathbf{v}\ ] = \begin{bmatrix} \tau_M & 0 \\ -I_{red} & -\tau_M\, I_{red}\, \Omega_{krit} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

a následující substituce

$$\mathbf{y} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{y}, \tag{19}$$

soustavu diferenciálních rovnic (5.46) do tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \tag{20}$$

kde matice $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}$ má reálný Jordanův kanonický tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} Re\,\lambda_1 & Im\,\lambda_1 \\ Im\,\lambda_2 & Re\,\lambda_2 \end{bmatrix}_{krit} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_{krit} \\ \Omega_{krit} & 0 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

a kde vektorová funkce $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ má tvar

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_2\, x_1^2 - \gamma_3\, x_1^3 \\ -\delta_2\, x_1^2 - \delta_3\, x_1^3 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

přičemž platí

$$\delta_k = \frac{\beta_k^Z - \beta_k^M}{I_{red}\, \Omega_{krit}} \cdot \tau_M^{k-2}, \qquad \gamma_k = \frac{\beta_k^Z}{I_{red}} \cdot \tau_M^{k-1}, \qquad k = 2, 3. \tag{23}$$

Nyní si stanovíme všechny parciální derivace funkcí $g_1(x_1, x_2)$ a $g_1(x_1, x_2)$, v bodech $x_1 = x_2 = 0$ a $\beta_1^Z = (\beta_1^Z)_{krit}$, až do třetího řádu včetně

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} = -2\,\gamma_2, \quad \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\
&\frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1^3} = -6\,\gamma_3, \quad \frac{\partial^3 g_1}{\partial x_2^3} = \frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0, \\
&\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2} = -2\,\delta_2, \quad \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\
&\frac{\partial^3 g_2}{\partial x_1^3} = -6\,\delta_3, \quad \frac{\partial^3 g_2}{\partial x_2^3} = \frac{\partial^3 g_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} = \frac{\partial^3 g_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} = 0,
\end{aligned} \tag{24}$$

a vypočteme následující pomocné veličiny

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2} + i \left(\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} \right) \right] = -\frac{\gamma_2 + i\,\delta_2}{2}, \\
G_{02} &= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2} + i \left(\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] = -\frac{\gamma_2 + i\,\delta_2}{2}, \\
G_{20} &= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2} + i \left(\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] = -\frac{\gamma_2 + i\,\delta_2}{2},
\end{aligned} \tag{25}$$

$$G_{21}=\frac{1}{8}\cdot\left[\frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1\,\partial x_2^2}+\frac{\partial^3 g_2}{\partial x_1^2\,\partial x_2}+\frac{\partial^3 g_2}{\partial x_2^3}+\right.$$
$$\left.+i\left(\frac{\partial^3 g_2}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^3 g_2}{\partial x_1\,\partial x_2^2}+\frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1^2\,\partial x_2}+\frac{\partial^3 g_1}{\partial x_2^3}\right)\right]=-3\cdot\frac{\gamma_3+i\,\delta_3}{4}\;. \tag{25}$$

Zavedeme novou komplexní funkci $\Psi\,(\delta_2,\gamma_2,\delta_3,\gamma_3)$ vztahem

$$\Psi\,(\delta_2,\gamma_2,\delta_3,\gamma_3)=\frac{i}{2\,\Omega_{krit}}\cdot\left[\,G_{20}\,G_{11}-2\cdot|\,G_{11}\,|^2-\frac{1}{3}\cdot|\,G_{02}\,|^2\right]+\frac{G_{21}}{2}\,, \tag{26}$$

který přejde, po dosazení za jednotlivé veličiny, do následujícího tvaru

$$\Psi\,(\delta_2,\gamma_2,\delta_3,\gamma_3)=-\frac{2\,\delta_2\,\gamma_2+3\,\gamma_3\,\Omega_{krit}}{8\,\Omega_{krit}}-i\,\frac{10\,\delta_2^2+4\,\gamma_2^2+9\,\delta_3\,\Omega_{krit}}{24\,\Omega_{krit}}\,. \tag{27}$$

Pomocí funkce $\Psi\,(\delta_2,\gamma_2,\delta_3,\gamma_3)$ si nyní definujeme následující parametry pomocí výrazů

$$b_2\equiv 2\cdot Re\,\Psi\,(\delta_2,\gamma_2,\delta_3,\gamma_3)\,, \tag{28a}$$

$$\mu_2\equiv-\frac{Re\,\Psi\,(\delta_2,\gamma_2,\delta_3,\gamma_3)}{\dot{\alpha}_{krit}}\,, \tag{28b}$$

$$\tau_2\equiv-\frac{Im\,\Psi\,(\delta_2,\gamma_2,\delta_3,\gamma_3)+\mu_2\,\dot{\Omega}_{krit}}{\Omega_{krit}}\,, \tag{28c}$$

z nichž po dosazení obdržíme pro tyto parametry vyjádření

$$b_2=-\frac{2\,\delta_2\,\gamma_2+3\,\gamma_3\,\Omega_{krit}}{4\,\Omega_{krit}}\,, \tag{29a}$$

$$\mu_2=-\frac{2\,\delta_2\,\gamma_2+3\,\gamma_3\,\Omega_{krit}}{4\,\Omega_{krit}}\cdot I_{red}\,, \tag{29b}$$

$$\tau_2=-\frac{10\,\delta_2^2+4\,\gamma_2^2+9\,\delta_3\,\Omega_{krit}}{24\,\Omega_{krit}^2}-\frac{2\,\delta_2\,\gamma_2+3\,\gamma_3\,\Omega_{krit}}{8\,\tau_M\,\Omega_{krit}^3}\,. \tag{29c}$$

Pomocí parametrů b_2, μ_2 můžeme vyšetřit kvalitativní vlastnosti Hopfovy bifurkace (tj. typ bifurkace a stabilitu odvětvených periodických řešení). Jelikož v našem konkrétním případě, jak je zřejmé ze vztahu (16), vždy platí $\dot{\alpha}_{krit}<0$, může na hranici oblasti stability Γ_2 (viz. obr.2, bod A_2) dojít buď k superkritické Hopfově bifurkaci (tj. pro $\mu_2>0$, tzn. při přecházení parametru β_1^Z přes kritickou hodnotu, definovanou podmínkami (9), zleva doprava), při níž jsou odvětvená periodická řešení orbitálně nestabilní ($b_2>0$), anebo může dojít k subkritické Hopfově bifurkaci (tj. pro $\mu_2<0$, tzn. při přecházení parametru β_1^Z přes kritickou hodnotu, definovanou podmínkami (9), zprava doleva), při níž jsou odvětvená periodická řešení orbitálně stabilní ($b_2<0$). Vidíme tedy, že v našem konkrétním případě může dojít k odvětvení orbitálně stabilních periodických řešení.

Proveďme si nyní podrobný rozbor podmínek vzniku subkritické Hopfovy bifurkace ($\mu_2<0$), kdy se od rovnovážného stavu odvětví orbitálně stabilní ($b_2<0$) periodické řešení. Podmínka stabilní subkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu lze vyjádřit výrazem

$$Re\,\Psi\,(\,\delta_2,\gamma_2,\delta_3,\gamma_3) < 0\,,$$

který po dosazení a elementárních úpravách přejde v kvadratickou nerovnici v proměnné β_2^Z, jenž má následující tvar

$$(\,\beta_2^Z\,)^2 - \beta_2^M\,\beta_2^Z - \frac{3}{2}\,\tau_M\,I_{red}\,\Omega_{krit}^2\,\beta_3^Z < 0\,,$$

která je splněna tehdy a jen tehdy, pokud absolutní hodnota parametru β_2^M vyhovuje podmínce

$$|\,\beta_2^M\,(\,\omega_0)\,| > \beta_2^Z\,(\,\omega_0) - K\cdot\frac{\beta_3^Z\,(\,\omega_0)}{\beta_2^Z\,(\,\omega_0)}\,, \tag{30}$$

kde konstanta K je dána následujícím výrazem

$$K = \frac{3}{2}\,\tau_M\,I_{red}\,\Omega_{krit}^2 = -\frac{3}{2}\cdot\frac{I_{red} + \tau_M\,\beta_1^M\,(\,\omega_0)}{\tau_M}\,, \tag{31}$$

z něhož je zřejmé, že konstanta K je vždy kladná, tj. $K > 0$.

Znázorníme-li si podmínku stabilní subkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu (30) v souřadnicích $\beta_2^M\,(\,\omega_0) - \beta_2^Z\,(\,\omega_0)$, obdržíme situaci uvedenou na obr.3, kde obr.3a, resp. obr.3b platí pro hodnotu parametru $\beta_3^Z\,(\,\omega_0) < 0$, resp. $\beta_3^Z\,(\,\omega_0) > 0$. Z obr.3 je ihned patrné, že podmínka (30) rozděluje oblast parametrů $\beta_2^M\,(\,\omega_0) - \beta_2^Z\,(\,\omega_0)$ na dvě podoblasti, a to na oblast stabilní subkritické Hopfovy bifurkace (na obr.3 je vyznačena tečkovaně) a na oblast nestabilní superkritické Hopfovy bifurkace, přičemž tyto dvě podoblasti jsou v rovině $\beta_2^M\,(\,\omega_0) - \beta_2^Z\,(\,\omega_0)$ vzájemně od sebe odděleny hraniční křivkou C o rovnici

$$C:\;\; \beta_2^M\,(\,\omega_0) = \beta_2^Z\,(\,\omega_0) - K\cdot\frac{\beta_3^Z\,(\,\omega_0)}{\beta_2^Z\,(\,\omega_0)}\,, \tag{32}$$

která je rovnicí zobecněné hyperboly (na obr.3 je křivka C znázorněna tučnou červenou čárou), jenž má asymptotu ξ danou výrazem*)

$$\xi:\;\; \beta_2^M\,(\,\omega_0) = \beta_2^Z\,(\,\omega_0)\,, \tag{33}$$

který popisuje přímku se sklonem 45^o a procházející počátkem soustavy souřadnic.

Ze znázornění podmínky (30) v souřadnicovém systému $\beta_2^M\,(\,\omega_0) - \beta_2^Z\,(\,\omega_0)$, viz. obr.3, je dále patrné, že kvalitativní i kvantitativní průběh hraniční křivky C, která od sebe vzájemně odděluje oblasti stabilní subkritické a nestabilní superkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu, je velmi výrazně závislý na hodnotě parametru $\beta_3^Z\,(\,\omega_0)$ pracovního stroje :

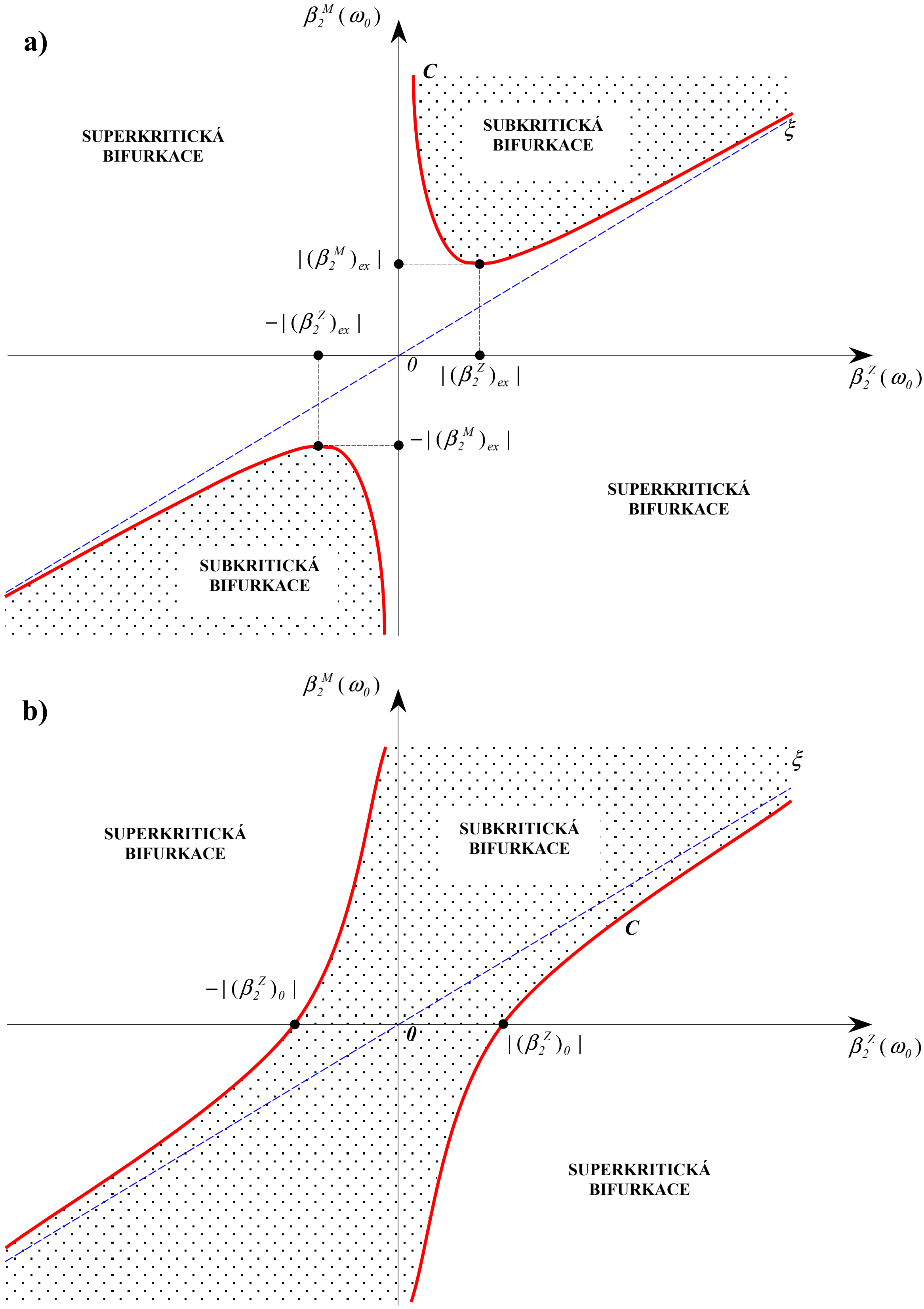
---

*) Obecná rovnice asymptoty je dána výrazem $\xi : \beta_2^M = a\;\beta_2^Z + b$, kde koeficienty *a*, *b* určíme z následujících vztahů

$$a = \lim_{\beta_2^Z\to\pm\infty}\frac{d\beta_2^M}{d\beta_2^Z} = \lim_{\beta_2^Z\to\pm\infty}\left[\,1 + K\cdot\frac{\beta_3^Z}{(\,\beta_2^Z\,)^2}\right],$$

$$b = \lim_{\beta_2^Z\to\pm\infty}\left[\,\frac{d\beta_2^M}{d\beta_2^Z}\cdot\beta_2^Z - \beta_2^M\right] = \lim_{\beta_2^Z\to\pm\infty}\frac{2\,K\,\beta_3^Z}{(\,\beta_2^Z\,)^2}\,.$$

Z těchto vztahů pak po provedení limitních operací pro koeficienty vyplývá, že $a = 1$ a $b = 0$, což po dosazení do obecné rovnice asymptoty dává tento výraz $\xi:\; \beta_2^M\,(\,\omega_0) = \beta_2^Z\,(\,\omega_0)$



Obr.3. Oblasti stabilní subkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu pro $\beta_3^Z < 0$ a), $\beta_3^Z > 0$ b).

- Jestliže parametr $\beta_3^Z(\omega_0)$ vyhovuje podmínce $\beta_3^Z(\omega_0)<0$, pak hraniční křivka C nabývá dvou extrémních hodnot (viz. obr.3a), jejichž polohu stanovíme z podmínky extrému funkce

$$\frac{d\beta_2^M}{d\beta_2^Z} \equiv 1+K\cdot\frac{\beta_3^Z}{(\beta_2^Z)^2}=0\,, \tag{34}$$

jejímž řešením obdržíme

$$|(\beta_2^Z)_{ex}|=\sqrt{-K\,\beta_3^Z}=\sqrt{-\frac{3}{2}\,\tau_M\,I_{red}\,\Omega_{krit}^2\,\beta_3^Z}\;. \tag{35}$$

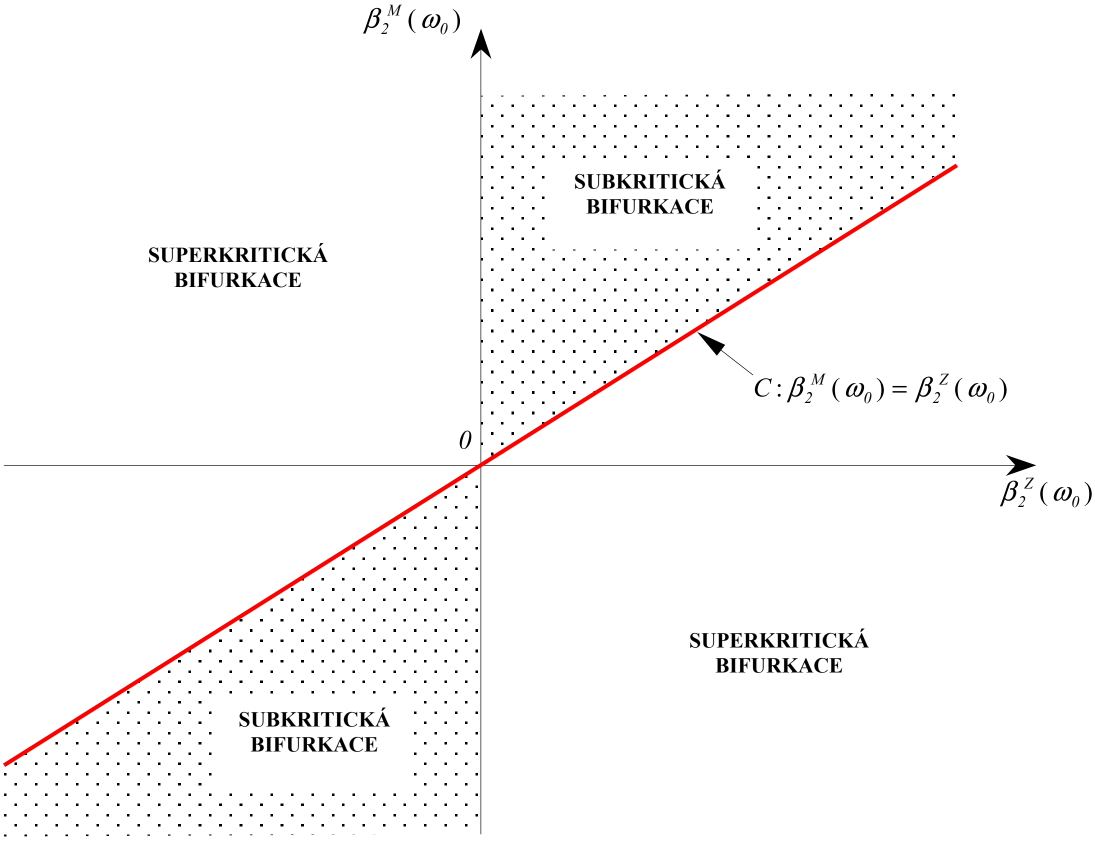
Extrémní hodnoty, kterých nabývá hraniční křivka C v bodech $\pm|(\beta_2^Z)_{ex}|$, pak určíme ze vztahu (32), do kterého dosadíme za parametr $\beta_2^Z(\omega_0)$ výraz (35), tím dostaneme

$$|(\beta_2^M)_{ex}|=2\sqrt{-K\,\beta_3^Z}=\sqrt{-6\,\tau_M\,I_{red}\,\Omega_{krit}^2\,\beta_3^Z}\;. \tag{36}$$

Ze vztahu (32) pro hraniční křivku C, ve kterém položíme její levou stranu rovnu nule,

$$C:\;\; \beta_2^M(\omega_0)\equiv\beta_2^Z(\omega_0)-K\cdot\frac{\beta_3^Z(\omega_0)}{\beta_2^Z(\omega_0)}=0\,, \tag{37}$$

je ihned zřejmé, s ohledem na předpoklad $\beta_3^Z(\omega_0)<0$, že neexistuje reálné řešení dané rovnice vzhledem k proměnné $\beta_2^Z(\omega_0)$. Z toho tedy vyplývá, že hraniční křivka C nemá žádný společný bod se souřadnicovou osou $\beta_2^Z(\omega_0)$, tj. nikde ji neprotíná.



Obr.4. Oblast stabilní subkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu pro $\beta_3^Z=0$.

- Jestliže parametr $\beta_3^Z(\omega_0)$ vyhovuje podmínce $\beta_3^Z(\omega_0) > 0$, potom za vztahu (37) plyne, že existují dvě řešení dané rovnice vzhledem k proměnné $\beta_2^Z(\omega_0)$, které lze zapsat pomocí jediného vztahu takto

$$|(\beta_2^Z)_0| = \sqrt{K\,\beta_3^Z} = \sqrt{\frac{3}{2}\,\tau_M\, I_{red}\,\Omega_{krit}^2\,\beta_3^Z}\ , \qquad (38)$$

což znamená, že hraniční křivka C má dva společné body se souřadnicovou osou $\beta_2^Z(\omega_0)$, tj. protíná ji ve dvou bodech. Z podmínky extrému funkce (34) dále vyplývá, s ohledem na předpoklad $\beta_3^Z(\omega_0) > 0$, že daná rovnice nemá žádné řešení v oboru reálných čísel. To tedy znamená, že výraz na levé straně rovnice (34) nemění pro libovolnou hodnotu parametru $\beta_2^Z(\omega_0)$ svoje znaménko, takže hraniční křivka C má monotónní průběh (tj. nikde nenabývá žádného lokálního extrému), který je patrný z obr.3b.

- Jestliže parametr $\beta_3^Z(\omega_0)$ vyhovuje podmínce $\beta_3^Z(\omega_0) = 0$, potom hraniční křivka C splývá s asymptotou ξ, jak je patrné z porovnání vztahu (32), do kterého dosadíme $\beta_3^Z(\omega_0) = 0$, se vztahem (33). To znamená, že hraniční křivka C je přímkou se sklonem 45^o, jenž prochází počátkem souřadnicové soustavy $\beta_2^M(\omega_0) - \beta_2^Z(\omega_0)$, jak je znázorněno na obr.4.

5. Shrnutí dosažených výsledků

Na základě výše uvedeného podrobného kvalitativního i kvantitativního rozboru vzniku stabilní subkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu na hranici oblasti stability Γ_2 lze konstatovat několik základních skutečností :

a) Jestliže hodnota parametru $\beta_3^Z(\omega_0)$ je záporná, tj. platí-li $\beta_3^Z(\omega_0) < 0$, potom jestliže absolutní hodnota parametru $\beta_2^M(\omega_0)$ vyhovuje následující nerovnici (viz. obr.3a)

$$|(\beta_2^M)_{ex}| < 2\sqrt{-K\,\beta_3^Z} = \sqrt{-6\,\tau_M\, I_{red}\,\Omega_{krit}^2\,\beta_3^Z}\ ,$$

pak na hranici oblasti stability Γ_2 (viz. obr.2) dojde vždy ke vzniku nestabilní superkritické Hopfovy bifurkaci rovnovážného stavu. To tedy znamená, že při překročení hranice oblasti stability Γ_2 se od rovnovážného stavu odvětví periodické řešení, které je však orbitálně nestabilní, takže sebemenší rušivý účinek způsobí přechod soustavy do nějakého jiného i velmi vzdáleného rovnovážného stavu.

b) Tvar a velikost oblasti stabilní subkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu v souřadnicovém systému $\beta_2^M(\omega_0) - \beta_2^Z(\omega_0)$ je velmi výrazně závislý na hodnotě parametru $\beta_3^Z(\omega_0)$ pracovního stroje, jak je patrné z tvarů oblastí jednotlivých typů Hopfovy bifurkace znázorněných na obr.3 a obr.4, přičemž platí :

   - pro danou pohonovou soustavu je při záporné hodnotě parametru $\beta_3^Z(\omega_0)$ oblast stabilní subkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu vždy menší než při kladné hodnotě parametru $\beta_3^Z(\omega_0)$, jak se lze velmi snadno přesvědčit vzájemným porovnáním obr.3a a obr.3b,

- pro danou pohonovou soustavu dochází při rostoucí kladné, resp. klesající záporné hodnotě parametru $\beta_3^Z(\omega_0)$ ke zvětšování, resp. zmenšování oblasti stabilní subkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu.

6. Použitá literatura

[1] Procházka, F.: Stabilita a bifurkace rovnovážných stavů nelineárních dynamických systémů. Disertační práce. VUT FSI Brno, 2001.

[2] Procházka, F.: Vliv dynamických charakteristik motorů na stabilitu rovnovážných stavů nelineárních pohonových soustav. In. Sborník konference Interakce a zpětné vazby´99, Praha, listopad, 1999, str.197-207.

[3] Cole, J.D.; Kevorkian, J.: Perturbation methods in applied mathematics. Applied mathematical sciences, volume 34. Springer-Verlag, New York, 1981.

[4] Fučík, S.; Kufner, A.: Nelineární diferenciální rovnice. SNTL, Praha, 1978.

[5] Glendinning, P.: Stability, instability and chaos. Cambridge university press, New York, 1994.

[6] Hassard, J.E.; Kazarinoff, N.D.; Wan, Y.H.: Theory and applications of Hopf bifurcation. Cambridge university press, 1981.

[7] Thomsen, J.J.: Vibrations and stability. McGraw-Hill, London, 1997.

[8] Verhulst, F.: Nonlinear differential equations and dynamical systems. Springer-Verlag, New York, 1996.

[9] Wiggins, S.: Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Springer-Verlag, New York, 1990.

[10] Zubov, V.I.: Kolebanija i volny. LGU, Leningrad, 1989.

Poděkování : Článek vznikl na základě prací podporovaných GA ČR, č. úkolu 101/00/0225/B a 102/00/1586.