



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

**ELASTOMERY: KONSTITUTIVNÍ MODELOVÁNÍ, IDENTIFIKACE
MATERIÁLOVÝCH PARAMETRŮ A POROVNÁNÍ
S EXPERIMENTEM**

Alena Poživilová, Jiří Plešek

Abstrakt: *V příspěvku je porovnána logaritmická formulace pro modelování pryžových materiálů s klasickými materiálovými modely. Na příkladu jednoosé napjatosti a čistého smyku jsou ukázány rozdíly obou formulací. Dále jsou obě použité metody použity pro numerické simulování experimentální tahové a tlakové zkoušky a smyku. Je ukázáno, že logaritmická formulace vystihuje v měřené oblasti stejně dobře nebo i lépe, než klasický neo-Hookeův a Rivlinův-Mooneyův materiálový model. Výhodou logaritmické formulace oproti Rivlinova-Mooneyova modelu je potřeba identifikovat z experimentů pouze jeden materiálový parametr.*

Klíčová slova: *hyperelasticita, logaritmická formulace*

1 Úvod

Elastomery se vyznačují schopností dosahovat velmi velkých vratných deformací. Takovéto chování se obvykle nazývá hyperelasticita. Při popisu konstitutivního chování se předpokládá existence funkce deformační energie, která z dosažené deformace jednoznačně určuje napětí v tělese. Existuje několik různých druhů funkce deformační energie pro popis mechanického chování pryže. Obecně je možno tuto deformační energii vyjádřit jako funkci tří hlavních invariantů nebo jako funkci tří hlavních prodloužení.

Historicky první funkce deformační energie navrhl pro nestlačitelné hyperelastické materiály Mooney [5]. Tato funkce deformační energie je funkce prvních dvou invariantů Cauchy-Greenova tensoru přetvoření $\mathbf{C}$. Další významná dodnes hojně používaná funkce deformační energie je Ogdenova (viz [6] a [7]), vyjádřená pomocí hlavních prodloužení.

¹Ing. Alena Poživilová, Ing. Jiří Plešek, CSc., Ústav termomechaniky AV ČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8. e-mail: alena@it.cas.cz, plesek@it.cas.cz

Nicméně pro popis chování pryže při jednoosé napjatosti, tzn. v tahu a tlaku, navrhl již ve třicátých letech minulého století Hencky [4], že je možné použít logaritmické prodloužení spolu s lineárními konstitutivními vztahy. Rozšířit tuto metodu na tří-rozměrné výpočty umožňuje zavedení logaritmického tenzoru přetvoření. Jeho výhody a nevýhody popsal ve svém článku Bažant [1]. Mezi významné nevýhody patří komplikovaný tvar tenzoru napětí, které je s logaritmickým tenzorem přetvoření energeticky konjugované (tzn. jejich skalární součin je roven deformační energii). Jak autoři ukázali v [8], pro isotropní materiály je možné z konstitutivních vztahů počítat přímo zpětně rotovaný Kirchhoffův tenzor napětí a tato nevýhoda použití logaritmického tenzoru přetvoření odpadá.

V příspěvku je mimo jiné uvedeno řešení jednoduchých homogenních příkladů napjatosti, na kterých jsou ukázány základní vlastnosti použitého materiálového modelu. Tyto příklady a jejich výsledné zátěžové charakteristiky slouží ke zjišťování materiálových parametrů pro jednotlivé materiálové modely u konkrétní pryže.

2 Přehled použitých materiálových modelů

Logaritmická formulace, která je v tomto příspěvku porovnávána s klasickými modely pro hyperelastické materiály, vychází z použití logaritmického tenzoru přetvoření a lineárních konstitutivních vztahů. Výsledkem je funkce deformační energie ψ ve tvaru

$$\psi = \mu \sum_{A=1}^3 (\ln \lambda_A)^2 + \frac{1}{2} \Lambda (\ln J)^2 \quad (1)$$

kde μ a Λ jsou Lamého konstanty a J je determinant deformačního gradientu.

Tato formulace byla srovnána s klasickými modely pro pryžové materiály. Nejjednodušší je neo-Hookeův materiálový model (viz [12]) s funkcí deformační energie

$$\psi = \frac{1}{2} \mu (I_1 - 3) \quad (2)$$

s jedním materiálovým parametrem μ . I_1 je první hlavní invariant Cauchyova-Greenova tenzoru deformace. Dva materiálové parametry obsahuje Mooney-Rivlinův [5], [11] materiálový model, který je založen na předpokladu lineárního vztahu mezi silou a deformací při čistém smyku a obsahuje dvě materiálové konstanty μ a f . Funkce deformační energie Mooney-Rivlinova modelu je

$$\psi = \frac{1}{2} \mu (I_1 - 3) + f (I_2 - 3) \quad (3)$$

I zde je I_1 první a I_2 je druhý hlavní invariant Cauchyova-Greenova tenzoru deformace. Pro větší deformace (prodloužení kolem 500 %) lépe vystihuje chování pryže Ogdenův materiálový model (viz [6] pro nestlačitelné a [7] pro stlačitelné materiály). Jeho funkce deformační energie, vyjádřená jako funkce hlavních prodloužení λ_A , je

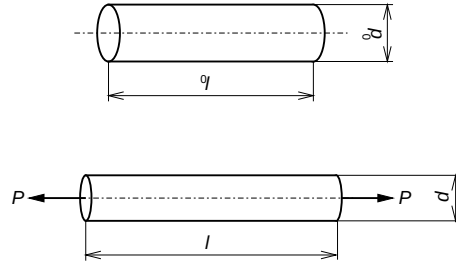
$$\psi = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu_r}{\alpha_r} (\lambda_1^{\alpha_r} + \lambda_2^{\alpha_r} + \lambda_3^{\alpha_r} - 3) \quad (4)$$

obsahuje několik dvojic reálných materiálových parametrů μ_r a α_r . Nevýhodou tohoto modelu je však nutnost určit experimentálně několik materiálových parametrů, jejichž volba není náhodná.

3 Jednoduché příklady homogenních deformací

Nejjednoduší srovnání jednotlivých formulací nabízí řešení některých druhů homogenní napjatosti, jako je například jednoosá napjatost a smyk.

3.1 Jednoosá napjatost



Obrázek 1:

Deformační gradient, popisující jednoosou napjatost nestlačitelného materiálu z obr. 1 je

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \quad (5)$$

kde λ a $\sqrt{\lambda}$ jsou hlavní přetvoření v axiálním a radiálním směru.

Obrázek 2: Teoretické bezrozměrné závislosti zatížení na protažení při jednoosé napjatosti nestlačitelného materiálu pro logaritmickou formulaci, neo-Hookeův materiál a Rivlinův-Mooneyův materiál (pro 3 různé poměry dvou materiálových parametrů f a μ)

Pro tuto deformaci je charakteristika závislosti síly na přetvoření při Mooney-Rivlinově formulaci (viz [5])

$$P = 2^0 A \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left(\mu + \frac{f}{\lambda} \right) \quad (6)$$

Neo-Hookeův materiál je speciálním případem Mooneyova-Rivlinova materiálu pro $f = 0$

$$P = 2\mu^0 A \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (7)$$

Pro logaritmickou formulaci je teoretická závislost síly na prodloužení

$$P = E^0 A \left(\frac{l}{l_0} \right)^{-1} \ln \left(\frac{l}{l_0} \right) \quad (8)$$

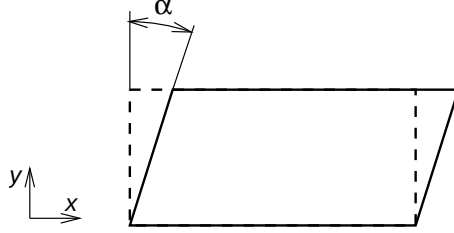
Tyto teoretické křivky jsou uvedeny na obr. 2.

3.2 Čistý smyk

Pro posouzení vhodnosti hyperelastického materiálového modelu je důležité i posouzení výsledných zátěžových charakteristik při čistém smyku. Čistý smyk v rovině, zobrazený na obrázku 3 je popsáný deformačním gradientem

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

kde skos $\gamma = \tan \alpha$.



Obrázek 3:

Hlavní přetvoření při čistém smyku jsou (viz např. [3], [13]).

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\sqrt{\gamma^2 + 4} + \gamma}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{\sqrt{\gamma^2 + 4} - \gamma}{2} = \frac{1}{\lambda_1} \\ \lambda_3 &= 1 \end{aligned} \quad (10)$$

a jim odpovídající hlavní směry jsou

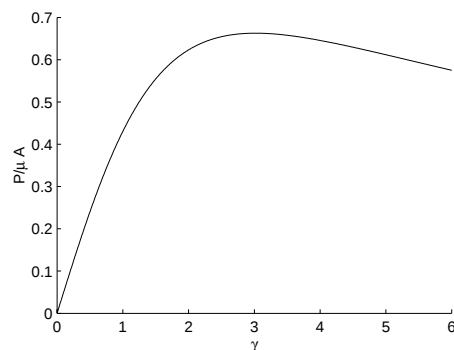
$$\mathbf{N}^{(1)} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\sqrt{\gamma^2 + 4} - \gamma}{2\sqrt{\gamma^2 + 4}}} \\ \sqrt{\frac{\sqrt{\gamma^2 + 4} + \gamma}{2\sqrt{\gamma^2 + 4}}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{\sqrt{\gamma^2 + 4} + \gamma}{2\sqrt{\gamma^2 + 4}}} \\ \sqrt{\frac{\sqrt{\gamma^2 + 4} - \gamma}{2\sqrt{\gamma^2 + 4}}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Potom je výsledná smyková složka Cauchyova tenzoru napětí při logaritmické formulaci rovna (viz [10])

$$\sigma = \frac{4\mu}{\sqrt{4 + \gamma^2}} \ln \left(\frac{\gamma + \sqrt{4 + \gamma^2}}{2} \right) \quad (12)$$

Toto napětí je vykresleno v závislosti na skosu γ v grafu na obrázku 4. Je vidět, že křivka dosahuje svého maxima pro hodnotu skosu přibližně 3,08. Potom velikost smykového napětí pro rostoucí skos klesá.

Předpokladem formulace Mooney-Rivlinova materiálového modelu byla lineární závislost mezi smykovým napětím a skosem. To platí i pro jeho speciální případ neo-Hookeův materiálový model.



Obrázek 4: Teoretická závislost bezrozměrné smykové síly na velikosti skosu při modelování smyku pomocí logaritmické formulace

4 Porovnání s experimenty

Logaritmická formulace pro modelování nestlačitelných elastomerů byla ověřena porovnáním s naměřenými daty z tahové a tlakové zkoušky a s naměřenými daty při smyku válcového vzorku.

Experimenty byly provedeny na dvou různých typech pryže. Tahová a tlaková zkouška byla naměřena na měkké pryži, průběh a výsledky jsou popsány ve zprávě [2]. Tlaková zkouška a měření charakteristiky ve smyku proběhly na pryži s větším obsahem plniv v Rubeně Hradec Králové, a.s. Naměřená data a popis experimentů nám poskytl Ing. František Fridrich.

Logaritmická formulace obsahuje jediný materiálový parametr E . Jeho přibližná velikost byla odhadnuta ze srovnání analytických křivek při tahu a tlaku, upravena byla na základě výpočtu metodou konečných prvků.

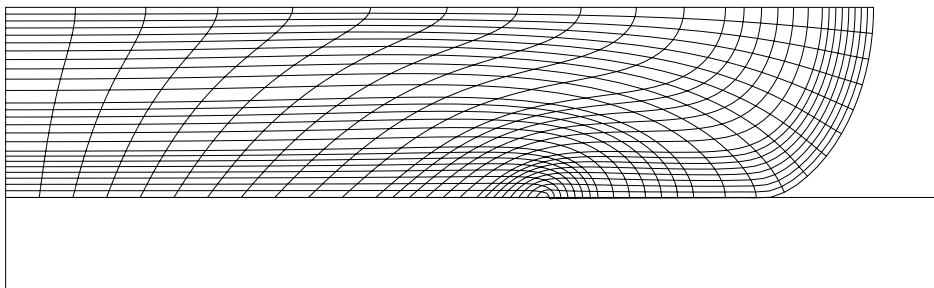
4.1 Tahová zkouška

Při experimentálním měření tahové charakteristiky válcového vzorku je možné dodržet velmi přesně podmínky homogenní jednoosé napjatosti v měřené oblasti. Proto není třeba provádět numerický výpočet, ale je možné přímo porovnat naměřená data s analytickými tahovými charakteristikami. Proto je také tahová křivka vhodná pro identifikaci materiálových parametrů. Metodou nejmenších čtverců z ní byl stanoven nejen modul pružnosti použitý v logaritmické formulaci $E = 3$ MPa, ale také jeden materiálový parametr pro neo-Hookeův materiálový model $\mu = 0,57$ MPa a dva materiálové parametry pro Mooney-Rivlinův materiálový model $\mu = 0,7$ MPa a $f = -0,1$ MPa.

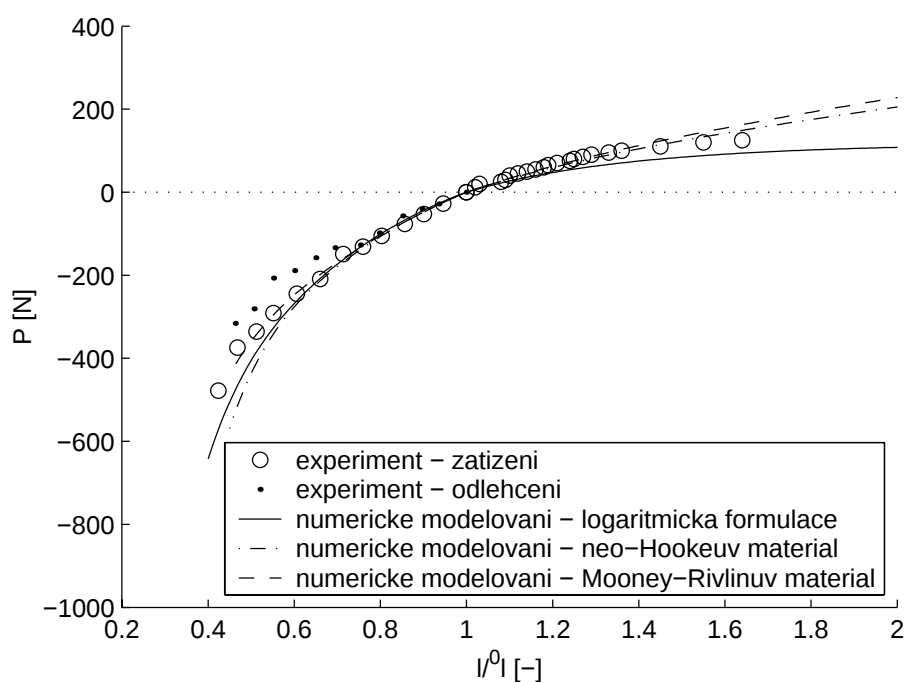
4.2 Tlaková zkouška

Na rozdíl od tahové zkoušky je při tlakové zkoušce pole napjatosti silně nehomogenní, a to z důvodů soudkování válcového vzorku při vyšším stlačení. Proto je také analytické řešení tlakové zkoušky pouze hrubým odhadem a je potřeba použít numerických metod. Byl použit výpočetní systém PMD [9], do kterého byla logaritmická

formulace implementována. Tahová zkouška byla provedena na válcovém vzorku o průměru 10,15 mm a délce 11,5 mm. Z důvodů symetrie byl pro výpočet použit osově symetrický model poloviny válečku. Pro numerický výpočet byla uvažována velikost Poissonova čísla $\nu = 0,49$. Na obrázku 5 je uveden deformovaný tvar vzorku pro stlačení $\lambda_a = 0,4$.



Obrázek 5: Deformovaný tvar vzorku při stlačení na 40 % původní délky



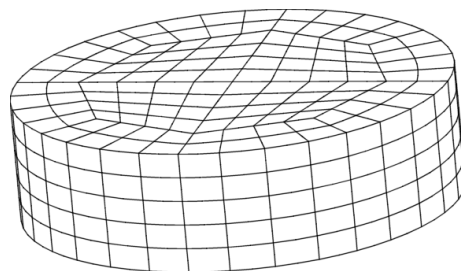
Obrázek 6: Porovnání výsledků experimentu s výsledky výpočtu MKP v tahu a tlaku

4.3 Smyk

Modelováním smyku jsme ověřovali, zda jednotlivé materiálové modely a jejich parametry odvozené z tahové nebo tlakové zkoušky, dobře vystihují chování i při víceosé napjatosti. Smyk byl na válcovém vzorku o průměru 50 mm a výšce 14 mm. Obě podstavy vzorku byly přivulkanizovány ke kovovým přírubám. Materiálový parametr byl stanoven z porovnání analytických křivek s výsledky experimentů při smyku a

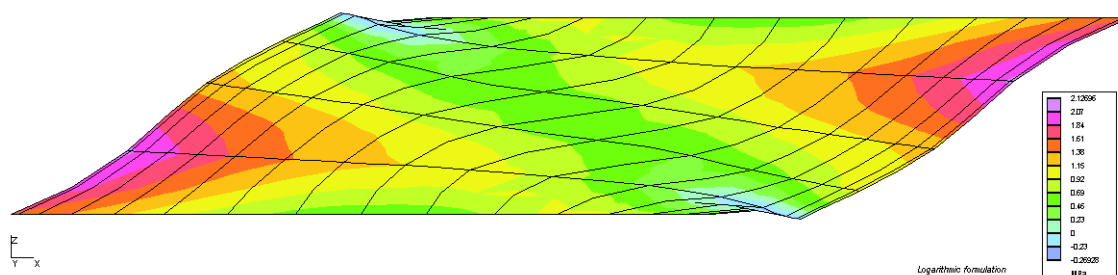
později upraven podle výsledků výpočtů MKP. Je zde uváděn pouze neo-Hookeův materiálový model, protože ve smyku se chová stejně jako Mooneyův-Rivlinův model a rozdíl v numerickém řešení je zanedbatelný.

Protože při smýkání vzorku konečné velikosti není napjatost v tělese homogenní, byla použita metoda konečných prvků na třírozměrném modelu, viz obr. 7



Obrázek 7: Konečněprvkový model použitý pro numerický výpočet smyku

Na obrázku 8 je příklad rozložení smykového napětí na deformovaném vzorku při skosu $\gamma = 0,857$, jak bylo vypočítáno pomocí logaritmické formulace.

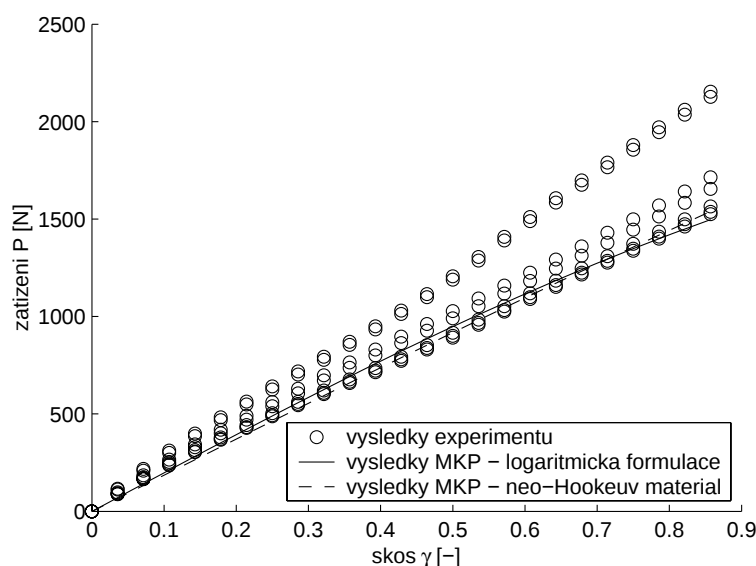


Obrázek 8: Rozložení smykové složky Cauchyova tenzoru napětí na deformovaném vzorku při modelování smyku pomocí logaritmické formulace.

V grafu 9 jsou uvedeny výsledky měření smykové zátěžové křivky na sedmi různých vzorcích ze stejné pryže. Dále jsou v něm uvedeny výsledky výpočtu MKP pomocí logaritmické formulace a pomocí neo-Hookeova materiálového modelu.

5 Závěr

Z grafů na obrázku 6 a 9 je zřejmé, že logaritmická formulace vystihuje materiálové chování nestlačitelných elastomerů stejně dobře nebo dokonce lépe, než Mooney-Rivlinův materiál. Výhodou logaritmické formulace je však potřeba experimentálně identifikovat pouze jeden materiálový parametr.



Obrázek 9: Porovnání výsledků experimentu s výsledky výpočtu MKP při smyku

Reference

- [1] Zdeněk P. Bažant. Easy-to-compute tensors with symmetric inverse approximating hencky finite strain and its rate. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 120: pp. 131–136, April 1998.
- [2] D. Gabriel, J. Beneš, and E. Veselý. Determination of the deformation characteristic of rubber in tension and compression (in czech). Technical Report TZ 39/96, Institute of Thermomechanics, Czech Academy of Sciences, Prague, jan. 1996.
- [3] J. P. Halleux and J. Donea. A discussion of cauch stress formulations for large strain analysis. In *Finite Element Methods for Nonlinear Poblems*, pages pp. 61–74, Trondheim, Norway, 1985.
- [4] H. Hencky. The elastic behaviour of vulcanized rubber. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 1(Num. 2): pp. 45–54, 1933.
- [5] M. Mooney. A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, Vol. 11: pp. 582–592, 1940.
- [6] R. W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proc. R. Soc. Lond.*, A. 326: pp. 565–584, 1972.
- [7] R. W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids. *Proc. R. Soc. Lond.*, A. 328: pp. 567–583, 1972.
- [8] J. Plešek, A. Poživilová, and M. Landa. Application of the logarithmic strain formulation in nonlinear transient dynamic. In Lin Shaopei et al., editor, *CD ROM Proceedings EPMESC’VIII*, Shanghai, 2001. San Lian Publisher.

- [9] PMD. *FEM program*. VAMET s.r.o., 1999. version f77.1.
- [10] A. Poživilová and J. Plešek. Použití logaritmického tenzoru přetvoření při popisu pryžových materiálů. Technical Report 1291/00, Institute of Thermomechanics, Czech Academy of Sciences, Prague, oct. 2000.
- [11] R. S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials iv, further developments of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A 241: pp. 379–397, 1948.
- [12] L. R. G. Treloar. *The Physics of Rubber Elasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [13] H. Xiao, O. T. Bruhns, and A. Meyers. Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate. *Acta Mechanica*, Vol. 124: pp. 89–105, 1997.