



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

DYNAMIC RESPONSE OF PIPING SYSTEMS DUE TO MOVING LOAD

Ladislav Pečínka, Vladimír Krupa *

Summary: in all power plants (classical and nuclear) are used safety relief valves. After opening of this ones the mass of fluid (gas or steam) begin to move with very high velocity and induce dynamic stresses in piping linked to the valve. The solution of this problem consist of three stages: arrival of the load, moving strip of the load and departure of the load. All this ones are shortly discused on the basis of equation of motion and its solution in analytical form. The recommendations for practical applications are formulated.

Key words: moving load, piping system, critical velocity, amplification factor

Úvod

Odezva konstrukcí na pohyblivá zatížení je na vysoké odborné úrovni rozpracována u železničních a silničních mostů [1]. U potrubních systémů energetických zařízení je obvykle řešena pouze z hlediska stability, výpočtu napětí není zatím věnována dostatečná pozornost. Jako aktuální se tento problém jeví u potrubí, která jsou napojena na impulsní pojišťovací ventily. Po jejich otevření pohybující se sloupec média (obvykle páry) postupně zatěžuje vodorovnou část, což je fáze tzv. nájezdu zatížení. Po úplném zaplnění následuje fáze přejezdu zatížení a po zavření ventilu nastupuje fáze tzv. odjezdu zatížení. V následujícím jsou formulovány tomuto příslušné základní pohybové rovnice, jejich analytické řešení a doporučení pro praktické aplikace.

Nájezd zatížení

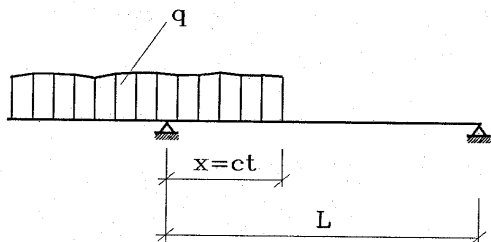
Uvažujeme přímý nosník zatížený dle obr. 1. Pohybová rovnice pak má tvar

$$EJ \frac{\delta^4 v(x,t)}{\delta x^4} + M \frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta t^2} + b \frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta t} = Q[1 - \eta(x - ct)] \quad (1)$$

kde $Q[Nm^{-1}]$ je působící spojitě zatížení a $\eta(x - ct)$ je Heavisideova jednotková funkce splňující podmínky

* Ing. Ladislav Pečínka, CSc., Vladimír Krupa, prom.fyz., Ústav jaderného výzkumu Řež a.s., 250 68 Řež, e-mail: pel@ujv.cz

$$\begin{aligned} \eta(x-ct) = 0 & \quad \text{pro} \quad x-ct < 0 & \eta(x-ct) = 1 & \quad \text{pro} \\ x-ct \geq 0 & \end{aligned} \quad (2)$$



Obr. 1

Řešení rovnice (1) se provede pomocí rozvoje dle vlastních funkcí pro daný typ okrajové podmínky a aplikací konečné zobecněné integrální transformace [2]. Výsledná rovnice pak je

$$\begin{aligned} \ddot{q}_m + 2\xi\omega_m\dot{q}_m + \omega_m^2 q_m = \frac{1}{M} \frac{Q}{(\alpha_m L)} [2 - (\cos \alpha_m ct + ch \alpha_m ct) \\ - \frac{\sin \alpha_m L - sh \alpha_m L}{\cos \alpha_m L - ch \alpha_m L} (\sin \alpha_m ct - sh \alpha_m ct)] \end{aligned} \quad (3)$$

přičemž pro demonstraci byla zvolena okrajová podmínka vetknutí-vetknutí. Uvažujeme-li nulové počáteční podmínky a zanedbáme-li tlumení, což lze učinit vzhledem k vysokým rychlostem c (jinak by nemělo význam se pohyblivým zatížením zabývat), pak pro výsledné řešení platí

$$\begin{aligned} q_m(t) = \frac{Q}{M\omega_m^2} \frac{1}{\alpha_m L} \{ 2(1 - \cos \omega_m t) - \\ - \left[\frac{\cos \alpha_m ct}{1 - \left(\frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right)^2} - \frac{\cos \omega_m t}{1 - \left(\frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right)^2} \right] - \left[\frac{ch \alpha_m ct}{1 + \left(\frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right)^2} - \frac{\cos \omega_m t}{1 + \left(\frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right)^2} \right] - \\ - \frac{\sin \alpha_m L - sh \alpha_m L}{\cos \alpha_m L - ch \alpha_m L} \left[\frac{\sin \alpha_m ct}{1 - \left(\frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right)^2} - \frac{\sin \omega_m t}{1 + \left(\frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right)^2} \frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right] \} \end{aligned} \quad (4)$$

Protože ale $M\omega_m^2 = k_m$, kde ohybová tuhost k_m je dána vztahem

$$k_m = (\alpha_m L)^4 \frac{EJ}{L^3}$$

pak po zpětném dosazení do vztahu (4) dostaneme výraz pro m-tý tvar kmitu

$$v_m(x, t) = \frac{2\bar{v}_{0m}}{(\alpha_m L)} F_m(\alpha_m x) \{ \dots \}_m \quad (5)$$

kde

$$\bar{v}_{0m} = \frac{\bar{Q}}{(\alpha_m L)^4 \frac{EJ}{L^3}} \quad \bar{Q} = QL/2 \quad (6)$$

je statický průhyb nosníku v místě $x = L/2$ zatíženého břemenem $\bar{Q} = QL/2$ (tj. spojitě obťížení do poloviny délky), symbol $\{\dots\}_m$ znamená výraz ve svorkách v rovnici (4) a $\beta_m = c/c_m$, $c_m = 2Lf_m$ je tzv. kritická rychlost břemene příslušná frekvenci f_m daného tvaru kmitu. Výsledný výraz pro průhyb má tudíž tvar

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{m=1}^M v_m(x,t) = \sum_{m=1}^M \frac{2\bar{v}_{0m}}{(\alpha_m L)} F_m(\alpha_m x) \{\dots\}_m \\ &= 2\bar{v}_{01} \left[\frac{F_1(\alpha_1 x)}{(\alpha_1 L)} \{\dots\}_{11} + \frac{(\alpha_1 L)^4}{(\alpha_2 L)^5} F_2(\alpha_2 x) \{\dots\}_{12} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\alpha_1 L)^4}{(\alpha_2 L)^5} F_3(\alpha_3 x) \{\dots\}_{13} + \dots \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Z rovnice (7) vyplývají tyto důležité poznatky

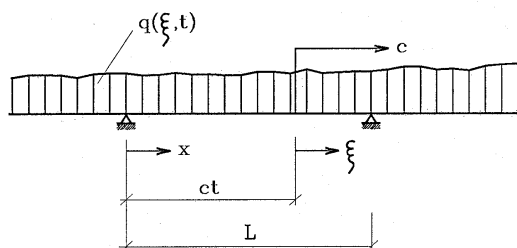
- časová závislost průhybu je dána nejen periodickými členy, ale i členy hyperbolickými, které s časem rostou
- vzhledem k tomu, že doba řešení je omezena dosažením čela zatížení poloviny délky nosníku, pak divergentní členy sh a ch mají svojí horní mez
- u periodických členů sin a cos jmenovatel zlomku zvyšuje odezvu a v případě podmínky $1 - \alpha_m L \beta_m / \pi = 0$ dostáváme singularitu

Pro další úvahy budou členy $\{\dots\}_m$ v rovnici (7) nazývány amplifikačním faktorem pro m-tý tvar kmitu.

Přejezd zatížení

Uvažujeme výpočtové schema dle obr. 2, kdy po nosníku s libovolným typem okrajových podmínek se pohybuje konstantní rychlostí c spojitě zatížení, které vzhledem k pohyblivému souřadnicovému systému má velikost $Q\xi(\xi, t)$ a hmotnost na jednotku délky $\xi = x - ct$,

$$\mu_Q(\xi) = Q(\xi, t)/g \quad (8)$$



Pohybová rovnice pak má tvar

$$EJ \frac{\delta^4 v(x,t)}{\delta x^4} + M \frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta t^2} + b \frac{\delta v(x,t)}{\delta t} = p(x,t) \quad (9)$$

přičemž okrajové podmínky jsou libovolné a počáteční podmínky jsou dány řešením z nájezdu zatížení.

Člen $p(x,t) [Nm^{-1}]$ představuje zatížení nosníku v místě x a čase t na jednotku délky. Pro definovaný problém platí vztah

$$p(x,t) = q(\xi,t) - \mu_Q(\xi) \frac{d^2 v(x,t)}{dt^2} \quad (10)$$

přičemž druhý člen na pravé straně znamená setrvačné působení hmoty $\mu_Q(\xi)$ na přetvořeném nosníku. Vzhledem k tomu, že pro rovnoměrný ohyb platí $d\xi/dt = 0$ a tedy

$$dx = c dt \quad (11)$$

pak pro hledaný totální diterencilát $d^2 v(x,t)/dt^2$ lze odvodit

$$\frac{d^2 v(x,t)}{dt^2} = c^2 \frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta x^2} + 2c \frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta x \delta t} + \frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta t^2} \quad (12)$$

Jednotlivé členy na pravé straně rovnice (12) znamenají vliv zakřivení dráhy (dostředivé zrychlení), Coriolisovo (otáčivé) zrychlení a zrychlení ve směru průhybu $v(x,t)$.

Po dosazení (12) a (10) do (9) dostaneme výslednou rovnici ve tvaru

$$EJ \frac{\delta^4 v(x,t)}{\delta x^4} + \mu_Q c^2 \frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta x^2} + (M + \mu_Q) \frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta t^2} + b \frac{\delta v(x,t)}{\delta t} = Q \quad (13)$$

přičemž vliv Coriolisova zrychlení lze v tomto případě zanedbat.

Řešení se opět provede pomocí rozvoje dle vlastních funkcí pro daný typ okrajové podmínky a aplikací konečné zobecněné integrální transformace [2]. Výsledná rovnice pak má tvar [2]

$$(M + \mu_Q) \ddot{q}_m + b \dot{q}_m + k_m^{red} q_m = \frac{Q}{\int_0^L F_m^2(\alpha_m x) dx} \int_0^L F_m(\alpha_m x) dx \quad (14)$$

kde

$$k_m^{red} = \frac{1}{\int_0^L F_m^2(\alpha_m x) dx} \left[EJ \int_0^L F_m^{IV}(\alpha_m x) F_m(\alpha_m x) dx + \right. \\ \left. + \mu_Q c^2 \int_0^L F_m^{II}(\alpha_m x) F_m(\alpha_m x) dx \right] \quad (14a)$$

představuje zobecněnou tuhost příslušnou m-tému tvaru kmitu. Ta má standardní složku danou geometrií a materiálem nosníku (potrubí) – EJ a rychlostní, úměrnou c^2 . Pro další výpočty upravíme rovnici (14) zavedením následujících označení

$$\kappa = \frac{\mu_Q}{M} \dots \dots \text{hmotnostní poměr} \quad \bar{M} = M + \mu_Q = M(1 + \kappa)$$

$$\omega_m^2 = \frac{k_m^{EJ}}{\bar{M}} = \frac{k_m^{EJ}}{M(1 + \kappa)}; \quad \omega_{0m} \dots \dots m - \text{tá vlastní frekvence bez vlivu zatížení}$$

Tzv. redukovaná frekvence pak bude

$$\begin{aligned} (\omega_m^2)^{red} &= \omega_m^2 + \frac{\mu_Q}{M} c^2 \int_0^L F_m^{II}(\alpha_m x) F_m(\alpha_m x) dx / \int_0^L F_m^2(\alpha_m x) dx = \\ &= \frac{\omega_{0m}^2}{1 + \kappa} (1 + \kappa \beta_m^2) \end{aligned} \quad (15)$$

kde

$$\beta_m^2 = \frac{1}{\omega_{0m}^2} \left[c^2 \int_0^L F_m^{II}(\alpha_m x) F_m(\alpha_m x) dx / \int_0^L F_m^2(\alpha_m x) dx \right]$$

je tzv. rychlostní parametr, který mění vlastní frekvenci nosníku (potrubí) s daným nepohyblivým zatížením (člen $\omega_m^2 / (1 + \kappa)$).

Hodnoty integrálů z vlastních funkcí záleží na daném typu okrajové podmínky. Např. pro vetknutí-vetknutí lze odvodit [2]

$$\beta_m^2 = \left(\frac{c}{c_{krit}} \right)^2 \varepsilon_m \quad (16)$$

kde opět $c_{krit} = 2Lf_m$ je tzv. kritická rychlost břemene. Koeficient ε_m je uveden v následující tabulce T1. Vzhledem k tomu, že je vždy záporný, pak člen β_m^2 zmenšuje vlastní frekvenci ω_m^{red} (viz vztah 15)).

m	ε_m
1	-1.2033677
2	-4.6713869
3	-9.9764752
4	-17.385246
5	-26.748551
> 5	$-\frac{\alpha_m L}{\pi^2} [2 - (\alpha_m L)]$

Tab. T1: hodnoty parametru ε_m

Protože pro zvolený typ okrajové podmínky (vetknutí-vetknutí) platí

$$\int_0^L F_m(\alpha_m x) dx = 2L \frac{\delta_m}{(\alpha_m L)} [1 - (-1)^m] \quad (17)$$

lze rovnici (14) převést do výsledného tvaru

$$\ddot{q}_m + 2\xi\omega_m \dot{q}_m + (\omega_m^2)^{red} q_m = \frac{1}{M} \frac{Q}{1 + \kappa} \frac{2\delta_m}{(\alpha_m L)} [1 - (-1)^m] \quad (18)$$

přičemž hodnoty δ_m jsou tabelovány v [3]. Platí, že $\delta_m \doteq 1$ pro $m = 1, 2, \dots, 5$ a $\delta_m = 1$ pro $m > 5$. Z rovnice (18) je dále zřejmé, že řešení existuje pouze pro tvary kmitu $m = 1, 3, 5, \dots$, pro sudá m je řešení nulové.

Při integraci pohybové rovnice (18) vyjdeme z předpokladu, že zkrácené řešení představuje vlastní kmitání a utlumí se. Partikulární řešení má pak tvar

$$q_m^p = q_m = \frac{1}{(\omega_m^2)^{red}} \frac{1}{M} \frac{Q}{1 + \kappa} \frac{4\delta_m}{(\alpha_m L)} \quad (19)$$

Na základě dalších úprav analogických k nájezdu zatížení obdržíme výsledný výraz pro průhyb

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{m=1,3,\dots} v_m(x) = \\ &= 4v_0 \left[\frac{\delta_1}{(\alpha_1 L)} \frac{1}{1 + \kappa\beta_1^2} F_1(\alpha_1 x) + \delta_3 \frac{(\alpha_1 L)^4}{(\alpha_3 L)^5} \frac{1}{1 + \kappa\beta_3^2} F_3(\alpha_3 x) + \dots \right] \end{aligned} \quad (20)$$

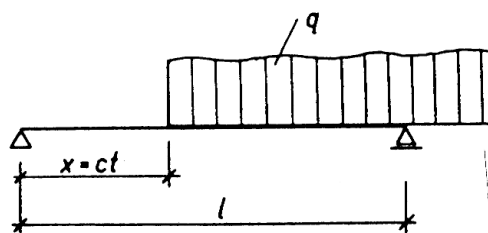
kde v_0 znamená statický průhyb ve středu nosníku od spojitého zatížení Q . Z rovnice (20) vyplývají tyto dva důležité poznatky

- za předpokladu, že vlastní kmitání se utlumí, řešení je nezávislé na čase a na tlumení
- vzhledem k tomu, že β_m^2 je vždy záporné (viz rovnici (16) a tabulku T1), pak člen $(1 + \kappa\beta_m^2)^{-1}$ představuje amplifikační koeficient, který zvyšuje průhyb tím více, čím více se rychlost pohyblivého břemena blíží rychlosti kritické. Singularita nastane v případě, kdy $1 + \kappa\beta_m^2 = 0$

Odjezd zatížení

Výpočtové schéma je uvedeno na obr. 3, pohybová rovnice má v tomto případě tvar

$$EJ \frac{\delta^4 v(x,t)}{\delta x^4} + M \frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta t^2} + b \frac{\delta v(x,t)}{\delta t} = Q\eta(x-ct) \quad (21)$$



Obr. 3

Řešení se provede analogicky k předchozím dvěma případům, pohybová rovnice má tvar

$$\ddot{q}_m + 2\xi\omega_m\dot{q}_m + \omega_m^2 q_m = \frac{1}{M} \frac{QL}{\alpha_m L} [-1 + \cos \alpha_m ct + ch \alpha_m ct + \frac{\sin \alpha_m L - sh \alpha_m L}{\cos \alpha_m L - ch \alpha_m L} (\sin \alpha_m ct - sh \alpha_m ct)] \quad (22)$$

Analogicky k nájezdu zatížení zanedbáme ze stejného důvodu tlumení, takže výsledné řešení lze zapsat takto

$$\begin{aligned} q_m(t) = & \frac{Q}{M\omega_m^2} \frac{1}{(\alpha_m L)} \left\{ -(1 - \cos \omega_m t) + \right. \\ & + \left[\frac{\cos \alpha_m ct}{1 - \left(\frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right)^2} - \frac{\cos \omega_m t}{1 - \left(\frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right)^2} \right] + \left[\frac{ch \alpha_m ct}{1 + \left(\frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right)^2} - \frac{\cos \omega_m t}{1 + \left(\frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right)^2} \right] \\ & + \frac{\sin \alpha_m L - sh \alpha_m L}{\cos \alpha_m L - ch \alpha_m L} \left[\frac{\sin \alpha_m ct}{1 - \left(\frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right)^2} - \frac{\sin \omega_m t}{1 - \left(\frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right)^2} \frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right] \\ & \left. + \frac{\sin \alpha_m L - sh \alpha_m L}{\cos \alpha_m L - ch \alpha_m L} \left[\frac{sh \alpha_m ct}{1 + \left(\frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right)^2} - \frac{\sin \omega_m t}{1 + \left(\frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right)^2} \frac{\alpha_m L}{\pi} \beta_m \right] \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

Pro průhyb pak platí rovnice

$$\begin{aligned} v(x,t) = & \sum_{m=1}^M v_m(x,t) \\ = & 2\bar{v}_{01} \left[\frac{F_1(\alpha_1 x)}{\alpha_1 L} \{ \dots \}_{f_1} + \frac{(\alpha_1 L)^4}{(\alpha_2 L)^5} F_2(\alpha_2 x) \{ \dots \}_{f_2} + \right. \\ & \left. + \frac{(\alpha_1 L)^4}{(\alpha_3 L)^5} F_3(\alpha_3 x) \{ \dots \}_{f_3} + \dots \right] \quad (24) \end{aligned}$$

kde členy $\{ \dots \}_m$ opět znamenají amplifikační součinitele dle vztahu (23) pro m-tý tvar kmitu

Aplikace teorie na potrubní systémy

Vyjdeme z výsledných rovnic pro průhyb nosníku a známých vztahů

$$M_0 = -EJ \frac{d^2 v(x,t)}{dx^2}; \quad \sigma_0 = \frac{M_0}{W_0} \quad (25)$$

Je zřejmé, že druhá derivace dle x zachovává jak násobitele 2 a 4, tak i amplifikační faktory. Výpočtový postup je tudíž následující

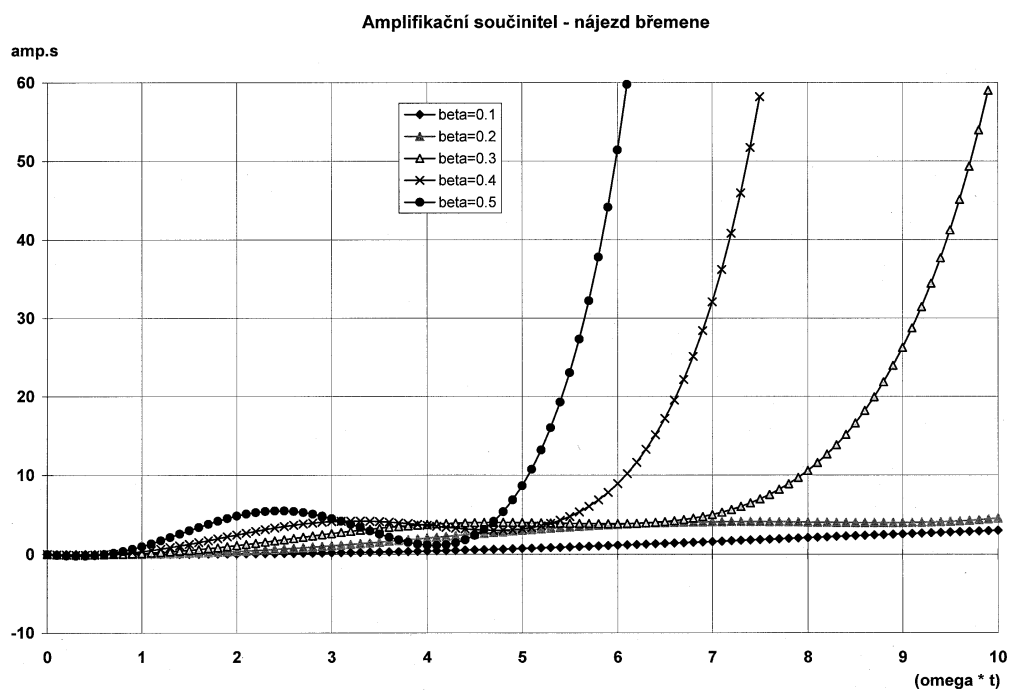
- konkrétní potrubí se staticky zatíží daným médiem buď v plné délce, nebo do poloviny a stanoví se odpovídající napětí. Nutno mít na zřeteli, že nesmí zahrnout vliv vlastní tíhy potrubí
- tato napětí se násobí koeficienty 2, resp. 4 dle typu úlohy (nájezd, přejezd, odjezd) a příslušným amplifikačním faktorem. Na obr. 4., 5. a 6. jsou demonstrovány případy nájezdu a přejezdu
- takto stanovená napětí se vyhodnotí v soulase s příslušnou normou.

Další vývojové práce

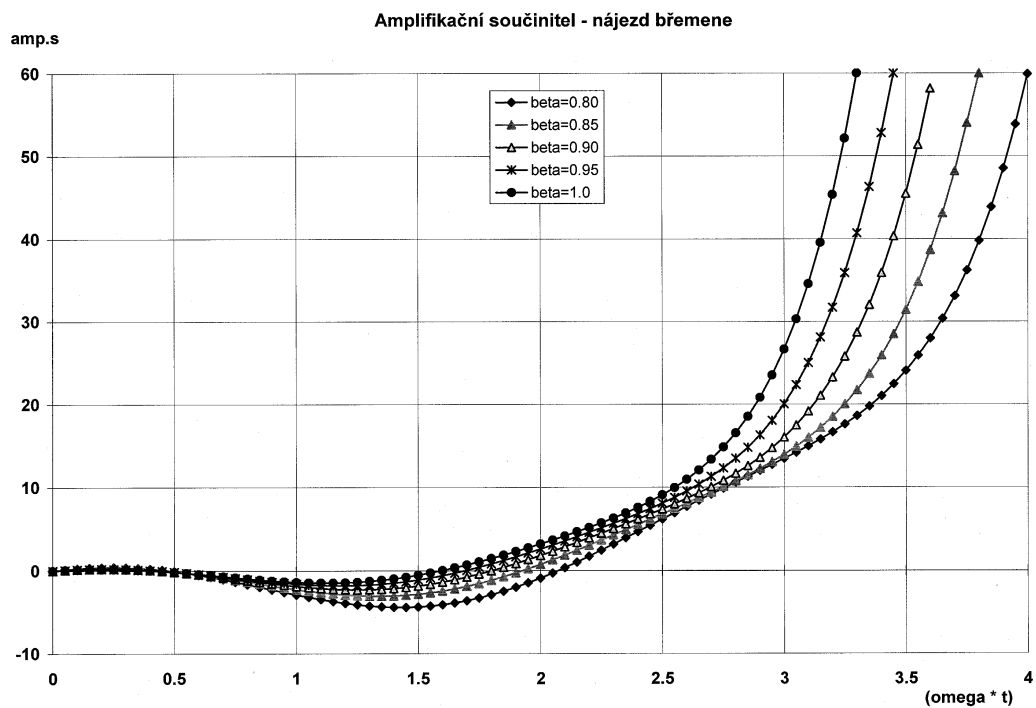
Z uvedeného je zřejmé, že teorie přímého nosníku je aplikována na obecnou dispozici potrubí. Proto se další výzkumné práce budou zabývat pohyblivým zatížením nosníku zakřiveného, což reprezentuje ohyby a kolena a dále pak vlivem časově proměnné rychlosti

Písemnictví

- [1] Frýba L.: Vibration of Solids and Structural under Moving Loads
Academia, Prague 1999
- [2] Pečínka L.: Ocenění integrity potrubí páry v místnostech A820, 826/1,2 ETE
při průniku vody z primárního do sekundárního okruhu
Zpráva ÚJV Řež ev.č.: DITI 300/115, říjen 2001 (omezená distribuce)
- [3] Blevins R.D.: Formulas for Natural Frequency and Mode Shape
Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1979

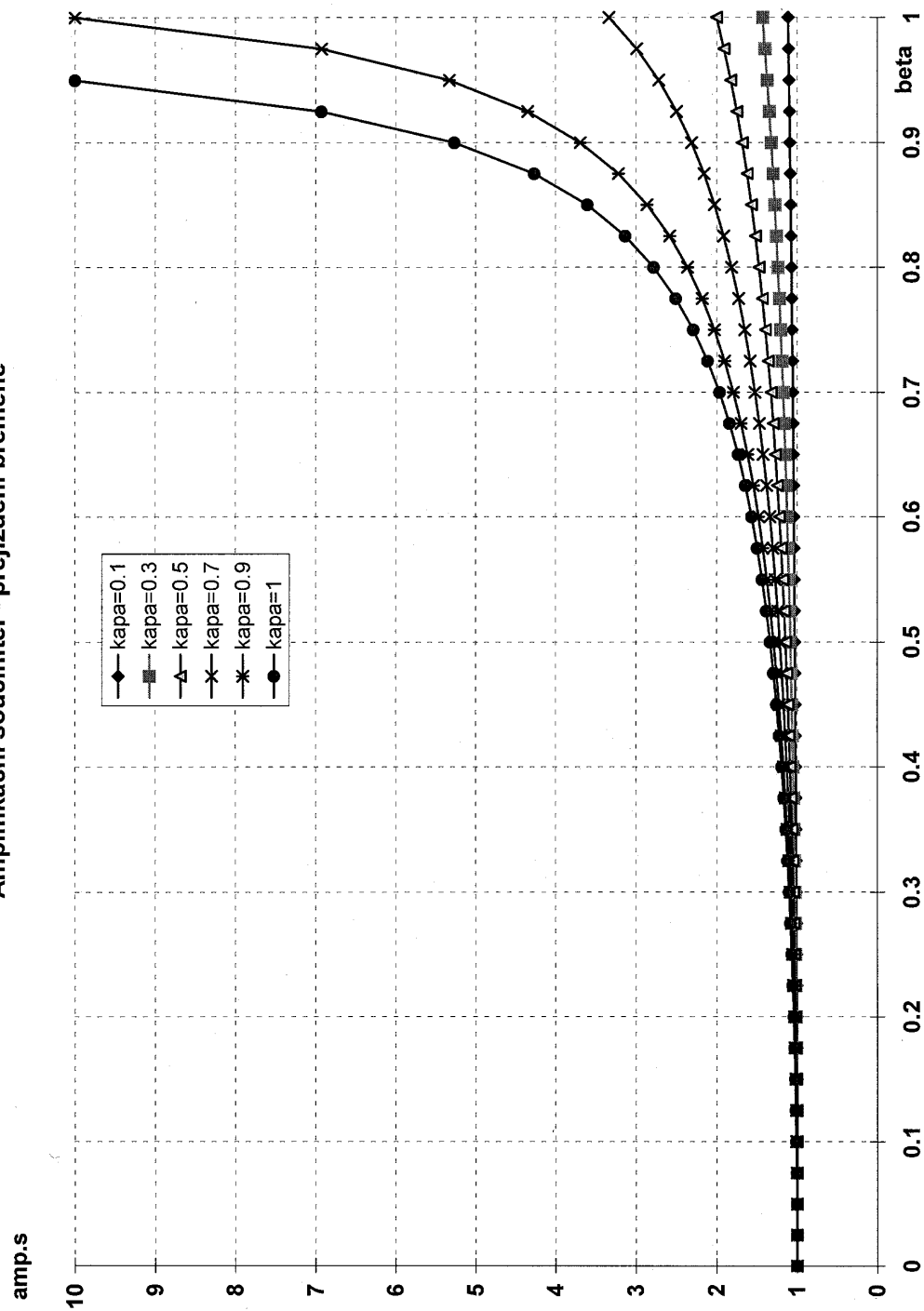


Obr. 4



Obr. 5

Amplifikační součinitel - přejíždění břemene



Obr. 6