



Národní konference s mezinárodní účastí  
**INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002**

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

## STAVOVÁ ZMĚNA PLYNU PŘI VYPRAZDŇOVÁNÍ TLAKOVÉ NÁDOBY

Jiří Maxa, Vladimír Horák, Dalibor Rozehnal<sup>1</sup>

*Príspevek se zabývá matematickým modelováním termodynamických dějů probíhajících při výtoku plynu z tlakové nádoby. Jsou sestaveny diferenciální rovnice kvazistacionárního řešení pro výpočet stavových veličin zahrnující vliv sdílení tepla a vliv kondenzace obsažené vlhkosti. Soustava čtyř obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu se řeší numericky metodou Runge-Kutta 4. řádu pro řešení úloh s počátečními podmínkami.*

*Bylo provedeno experimentální ověření úlohy při výtoku vzduchu z tlakové nádoby o objemu 3 m<sup>3</sup> do volné atmosféry. Výstupní otvor byl osazen konvergentní dýzou. Průběh teplot vzduchu v tlakové nádobě se měřil termočlánky s využitím měřicího počítače a softwarového vybavení LAB-VIEW. Porovnání výsledků výpočtu a měřených hodnot je uvedeno v grafické formě. Jsou graficky znázorněny průběhy teplot stěny nádoby a dále vlivy sdílení tepla a kondenzace vlhkosti na výpočet teploty plynu.*

**Klíčová slova:** termodynamika, procesní děj, výtok plynu, tlaková nádoba.

### Úvod

Sofistikovaný popis termodynamických dějů spojených s vyprazdňováním a plněním tlakových nádob je jedním z problémů procesního inženýrství. Jedná se především o určení časového průběhu stavových veličin plynu vytékajícího z nádoby a také plynu nacházejícího se uvnitř této termodynamické soustavy. Průběh stavových veličin, kromě toho, že představuje podstatnou informaci při popisu procesních dějů v tlakových soustavách, je také užitečným podkladem při posuzování únavových jevů v interakci s těmito strojními zařízeními.

Klasický analytický popis vyprazdňování tlakové nádoby, např. [4], vychází z nevratné adiabatické expanze. Při konfrontaci s měřením neposkytuje tento přístup dostatečně uspokojivé výsledky a ukazuje se mj., že i při relativně rychlých dějích je vliv přestupu tepla podstatný. Dále bývá často zanedbatelný i vliv kondenzace vlhkosti obsažené v plynu. Např. zanedbáním vlivu vlhkosti, při expanzi vzduchu z tlaku 0,6 MPa a teploty 25 °C na tlak 0,1 MPa, dosahuje odchylka při výpočtu teploty plynu až asi 12 °C. Vlivy sdílení tepla a zanedbání vlhkosti vzduchu na průběh teploty plynu při vyprazdňování tlakové nádoby jsou pro experimentem ověřovaný případ názorně uvedeny na obr. 2.

<sup>1</sup> Doc. Ing. Jiří Maxa, CSc., Doc. Ing. Vladimír Horák, CSc., Ing. Dalibor Rozehnal, Ph.D.: Katedra letadel a motorů, Fakulta letectva a PVO, Vojenská akademie v Brně, Kounicova 65, 612 00 Brno; tel.: +420.5.41182749; E-Mail: jiri.maxa@vabo.cz, vladimir.horak@vabo.cz, dalibor.rozehnal@vabo.cz.

## 1. Základní východiska řešení

Při numerickém řešení úlohy je tedy nutné vyjít z obecných termodynamických zákonitostí. Energetickou bilanci při vyprazdňování nádoby obecně popisuje rovnice prvního zákona termodynamiky. Pro časově neustálený děj v otevřené termodynamické soustavě má diferenciální tvar [1]

$$\frac{dQ}{d\tau} + i \frac{dm}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(m \cdot u) + p \frac{dV}{d\tau}, \quad (1)$$

kde tepelný tok a výtok entalpie látky kontrolní plochou způsobuje časovou změnu vnitřní energie uvnitř soustavy a vykonání objemové práce.

Tepelný tok přiváděný do soustavy je dán přestupem tepla mezi stěnou nádoby o teplotě  $T_s$  mající teplosměnnou plochu  $A$  a plynem o teplotě  $T$  a dále případně i časovou změnou měrné vlhkosti  $x$  vzduchu v důsledku kondenzace, resp. tuhnutí vody, prostřednictvím vztahu

$$\frac{dQ}{d\tau} = \alpha_2 A (T_s - T) + m \frac{dx}{d\tau} q_l, \quad (2)$$

kde  $\alpha_2$  je součinitel přestupu tepla konvekcí uvnitř tlakové nádoby,  $q_l$  je měrné skupenské teplo.

Pro měrné tepelné kapacity plynu definované prostřednictvím měrné vnitřní energie a měrné entalpie platí známé vztahy [1]:

$$c_v = \frac{du}{dT}, \quad c_p = \frac{di}{dT} \quad \text{a} \quad \frac{c_p}{c_v} = \kappa. \quad (3)$$

Pokud je dále možné látku v soustavě považovat za ideální plyn o stavové rovnici

$$p \cdot v = r \cdot T, \quad (4)$$

platí pro závislost mezi měrnou vnitřní energií a měrnou entalpií vztah

$$i = u + p \cdot v = u + r \cdot T. \quad (5)$$

Protože celkový objem nádoby zůstává při jejím vyprazdňování konstantní je při  $V = \text{konst.}$  vykonaná objemová práce nulová a využitím vztahů (2) až (5) je možné rovnici (1) prvního zákona termodynamiky zjednodušit na tvar

$$\alpha_2 A (T_s - T) + m \frac{dx}{dT} q_l \frac{dT}{d\tau} + r \cdot T \frac{dm}{d\tau} = m \cdot c_v \frac{dT}{d\tau}, \quad (6)$$

odkud lze - pro potřebu numerického integrace kvazistacionárního řešení - vyjádřit časovou změnu teploty plynu uvnitř soustavy

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{1 - \frac{dx}{dT} \frac{q_l}{c_v}} \frac{T}{m} \left[ (\kappa - 1) \cdot \frac{dm}{d\tau} + \frac{\alpha_2 \cdot A \cdot (T_s - T)}{c_v \cdot T} \right], \quad (7)$$

kde změna měrné vlhkosti se změnou teploty se určí derivací rovnice pro vzduch nasycený vlhkostí [1]

$$x = 0,622 \frac{p''}{p - p''}. \quad (8)$$

To, že stlačený vzduch bude v tlakové nádobě nasycený vlhkostí, můžeme vzhledem k běžným hodnotám okamžitého tlaku a teploty předpokládat. Závislost tlaku (v MPa) nasycené vodní páry (tj. na mezi sytosti) na teplotě lze vyjádřit aproximační rovnicí [1]

$$\log p'' = -\frac{2892,4}{T} + 15,426 - 2,8927 \log T - 4,937 \cdot 10^{-3} T + 5,607 \cdot 10^{-6} T^2 - 4,6459 \cdot 10^{-9} T^3 + 3,3874 \cdot 10^{-12} T^4 \quad (9)$$

Podobně pro mez sublimace platí vztah

$$\log p'' = -\frac{2462}{T} - 2,6681 + 3,857 \log T - 3,41 \cdot 10^{-3} T + 4,9 \cdot 10^{-8} T^2 \quad (10)$$

Časová změna měrného objemu  $v$  plynu v nádobě o objemu  $V = konst.$ , jako vyjádření zákona zachování hmotnosti, je

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{V}{m} \right) = -\frac{V}{m^2} \frac{dm}{d\tau} = -\frac{v}{m} \frac{dm}{d\tau} \quad (11)$$

a časová změna hmotnosti plynu v nádobě je dána rychlostí vyprazdňování nádoby tj. okamžitým hmotnostním výtokem plynu

$$\frac{dm}{d\tau} = Q_m \quad (12)$$

Hmotnostní tok je, podle znaménkové konvence prvního zákona termodynamiky, u vytékající tekutiny z nádoby záporný.

S pomocí stavové rovnice (4) a časové změny měrného objemu (11) lze z časové změny teploty (7) vyjádřit analogickou časovou změnu tlaku ve tvaru

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{p}{m} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{dx}{dT} \frac{q_l}{c_v}} \left[ (\kappa - 1) \cdot \frac{dm}{d\tau} + \frac{\alpha_2 \cdot A \cdot (T_s - T)}{c_v \cdot T} \right] + \frac{dm}{d\tau} \right\} \quad (13)$$

Uvedené rovnice časových změn (7), (11), (12) a (13) představují soustavu čtyř obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Jejich řešení se provede standardní numerickou metodou pro řešení úloh s počátečními podmínkami Runge-Kutta 4. řádu, jejíž princip je uveden v [2].

## 2. Výtok plynu z nádoby

Rychlost vyprazdňování tlakové nádoby, determinovaná hmotnostním výtokem plynu, je obecně dána okamžitými procesními podmínkami činnosti konkrétního posuzovaného zařízení. Z důvodu minimalizace ztrát a jednoznačného definování tohoto výtoku, při porovnání výše uvedeného řešení s experimentem, byl výstup z tlakové nádoby osazen Vitošinského konvergentní dýzou [3]. Při vyprazdňování nádoby je tedy předpokládán výtok ideálního plynu konvergentní dýzou do volné atmosféry. Pro tlak  $p_{otv}$  ve výstupním průřezu dýzy je plněna okrajová tlaková podmínka  $p_{kr} \leq p_{otv} \leq p_b$ . Pro kritický stav proudění platí [3]

$$\frac{p_{kr}}{p} = \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}, \quad (11)$$

kde  $p$  je celkový tlak plynu v nádobě a  $p_b$  tlak barometrický. Tedy při výtoku plynu je nejprve tlak ve výstupním průřezu dýzy je roven tlaku kritickému  $p_{kr}$  a je vyšší než tlak barometrický. Po dosažení tlaku ve výstupním průřezu dýzy rovného tlaku barometrickému zůstává tento tlak ve výstupním průřezu zachován.

Hmotnostní průtok ideálního plynu výstupním průřezem dýzy o ploše  $A_{otv}$  je z rovnice spojitosti ve tvaru

$$Q_m = \frac{c_{otv} \cdot A_{otv}}{v_{otv}}, \quad (12)$$

kde pro rychlost plynu použijeme rovnici Saint-Venant a Wantzelovu [3]

$$c_{otv} = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} p \cdot v \left[ 1 - \left( \frac{p_{otv}}{p} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]} \quad (13)$$

a měrný objem určíme ze vztahu pro adiabatickou izoentropickou expanzi

$$v_{otv} = v \left( \frac{p}{p_{otv}} \right)^{\frac{1}{\kappa}}. \quad (14)$$

### 3. Sdílení tepla

Při vyprazdňování tlakové nádoby dochází v důsledku probíhající expanze plynu v soustavě k jeho výraznému ochlazení, které je doprovázené poměrně výrazným přestupem tepla vlivem teplotního spádu mezi teplotou plynu v nádobě a teplotou stěny. Tento tepelný tok přiváděný do termodynamické soustavy je z hlediska tepelné bilance tlakové nádoby dán součtem přestupu tepla do vnější stěny nádoby z okolí (index 1) a časovou změnou tepelné kapacity stěny tlakové nádoby (index 2)

$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{dQ_1}{d\tau} + \frac{dQ_2}{d\tau}. \quad (15)$$

Tepelný tok přestupem tepla do vnější stěny nádoby z okolí se určí analogicky s rovnicí (2) vztahem

$$\frac{dQ_1}{d\tau} = \alpha_1 A (T_b - T_s), \quad (16)$$

kde  $\alpha_1$  je součinitel přestupu tepla přirozenou konvekcí z okolí do stěny nádoby.

Tepelný tok vyvolaný časovou změnou tepelné kapacity stěny tlakové nádoby je dán časovou změnou teploty stěny prostřednictvím vztahu

$$\frac{dQ_2}{d\tau} = m_s \cdot c \cdot \frac{dT_s}{d\tau}, \quad (17)$$

kde  $c$  je měrná tepelná kapacita materiálu nádoby (oceli) a  $m_s$  je hmotnost pláště tlakové nádoby.

V uvedené tepelné bilanci (15) je - vzhledem k hmotnosti pláště tlakové nádoby a vzhledem ke změně teploty stěny (obr. 3) - vliv změny tepelné kapacity stěny nádoby (17) ve srovnání s konvekcí z okolí (16) dominantní.

Součinitelé přestupu tepla  $\alpha$  přirozenou konvekcí v rovnicích (2) a (16) se obvykle určují na základě podobnosti. Kriteriační rovnice pro sdílení tepla přirozenou konvekcí má běžný tvar [1]

$$Nu = C (Pr \cdot Gr)^n, \quad (18)$$

kde  $C$  a  $n$  jsou experimentálně stanovené konstanty pro konkrétní případ konvekce, určené z [1].

Prandtlovo číslo vyjadřuje podobnost fyzikálních vlastností tekutiny vztahem

$$Pr = \frac{c_p \cdot \eta}{\lambda}, \quad (19)$$

kde  $c_p$  je měrná tepelná kapacita za stálého tlaku,  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti a  $\eta$  je dynamická viskozita uvažovaného plynu.

Grashofovo číslo vyjadřuje u přirozené konvekce poměr sil vztlakových a třecích

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot L^3 \cdot \Delta T}{\mu^2}, \quad (20)$$

kde  $g$  je gravitační zrychlení;  $L$  je charakteristický rozměr stěny;  $\Delta T$  je teplotní rozdíl stěny a tekutiny;  $\mu$  je kinematická viskozita tekutiny, která se určuje prostřednictvím dynamické viskozity a měrného objemu vztahem  $\mu = \eta \cdot v$ ;  $\beta$  je součinitel objemové rozpínivosti, který se u ideálního plynu určí ze vztahu  $\beta = 1/T_{urč}$ . Jako reprezentativní teplota  $T_{urč}$  pro určování termofyzikálních vlastností tekutiny při sdílení tepla byla zvolena střední teplota stěny a tekutiny.

Prostřednictvím Nusseltova čísla, vyjadřujícího intenzitu tepelného toku v mezní vrstvě, lze pak určit součinitel přestupu tepla z definičního vztahu

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{L}, \quad (21)$$

kde  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti tekutiny v mezní vrstvě.

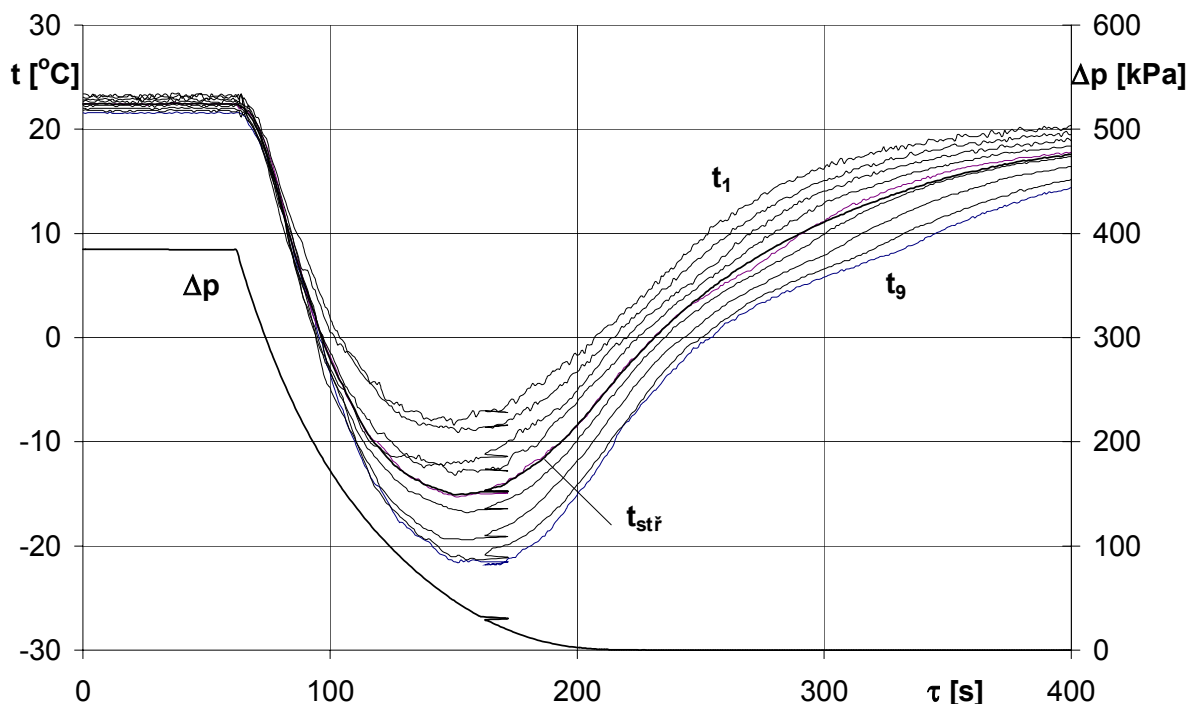
#### 4. Měření průběhu stavových veličin v nádobě

Za účelem experimentálního ověření a posouzení vhodnosti v příspěvku popsaného způsobu řešení úlohy, byla použita tlaková nádoba o objemu 3 m<sup>3</sup>, která je součástí vybavení laboratoře termomechaniky katedry letadel a motorů VA v Brně. Nádoba se plní vzduchem pomocí kompresoru. Výtok vzduchu z tlakové nádoby je ovládán plnopřtokovým kulovým ventilem a výstup do okolní atmosféry byl osazen Vitošinského konvergentní dýzou o vstupním  $\phi$  76,2 mm a výstupním  $\phi$  15,2 mm, jejíž geometrie je uvedena v [3].

Průběh teplot vzduchu v tlakové nádobě se měří pomocí termočlánků NiCr-Ni typu K. Devět termočlánků bylo rozmístěno rovnoměrně po výšce v ose nádoby. Další termočlánky byly umístěny v místě výstupní příruby, poblíž stěny a na stěně tlakové nádoby. Přetlak plynu v nádobě se měří tlakovým převodníkem s analogovým

napětovým výstupem. Výstupní signály od jednotlivých snímačů byly zpracovávány a vyhodnocovány v měřicím počítači s využitím softwarového vybavení LAB-VIEW.

Příklad měřených časových průběhů stavových veličin – tlaku a teplot – je uveden na obr. 1. Průběh hodnot teplot  $t_1$  až  $t_9$  měřených v ose tlakové nádoby v různé vzdálenosti od místa výtoku svědčí o postupně šířící se expanzi do objemu nádoby. Za účelem porovnání naměřených hodnot teploty s uvedeným jednorozměrovým řešením děje byl stanoven střední průběh teploty v tlakové nádobě  $t_{stř}$ .



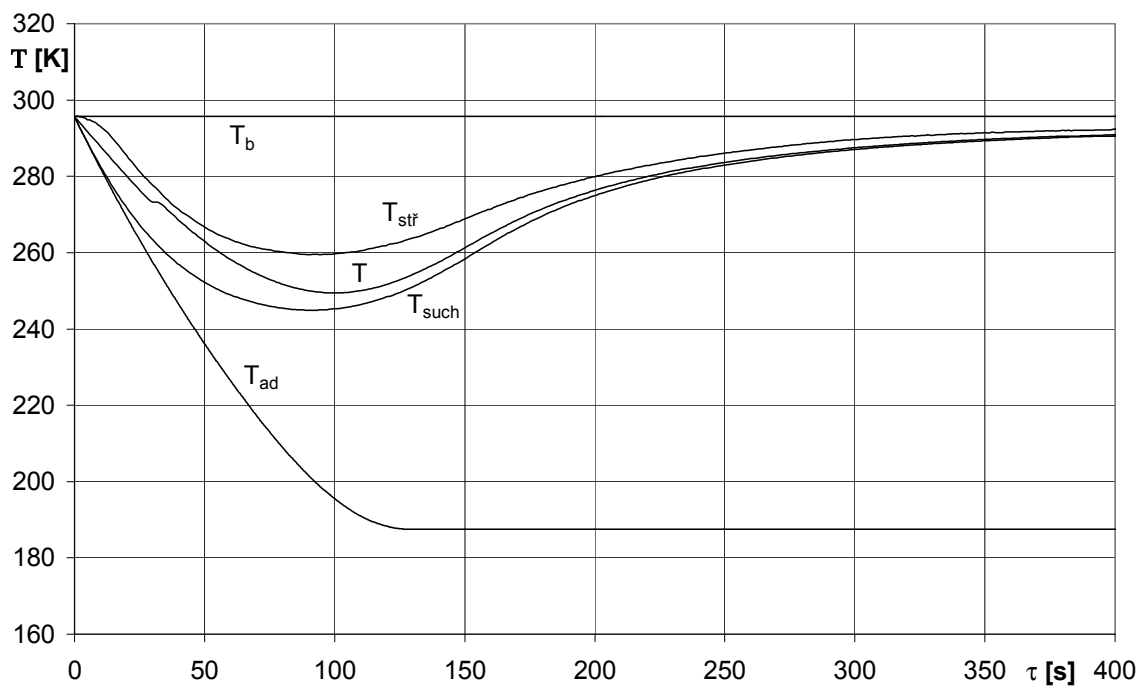
Obr. 1 Měřený průběh teplot a tlaku v nádobě v průběhu výtoku

## 5. Zhodnocení výpočtové metody a dosažených výsledků

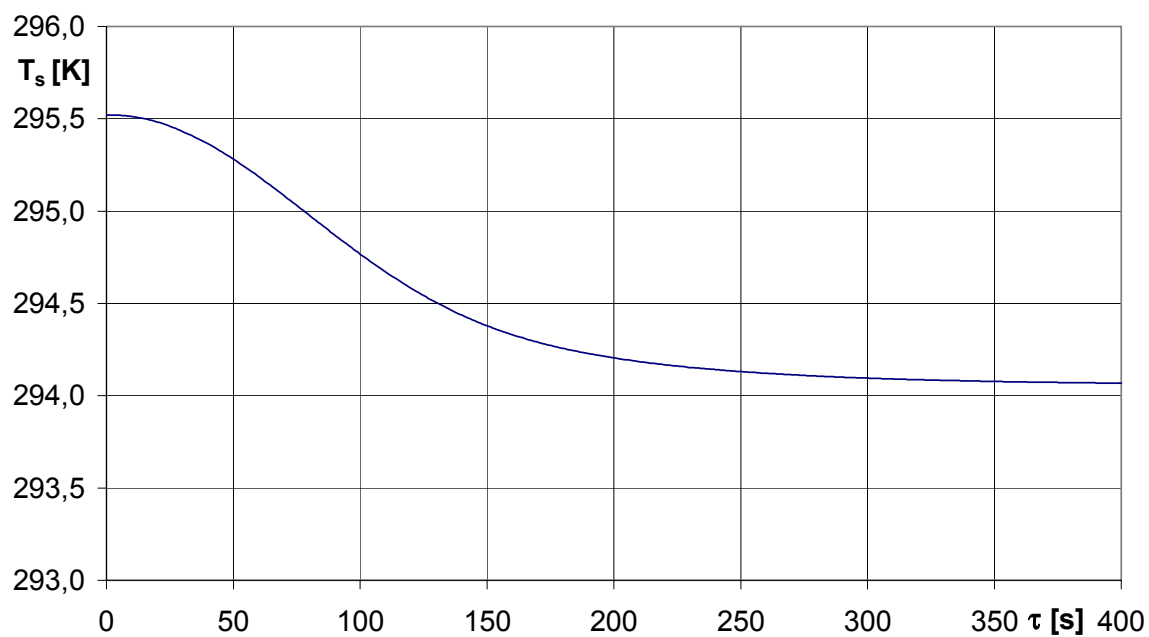
Porovnání výsledků výpočtu stavových veličin vzduchu v tlakové nádobě během vyprazdňování je pro popsaný experiment uvedeno na obr. 2., kde je vyneseno průběh střední měřené teploty  $T_{stř}$  v porovnání s vypočítanými průběhy teplot. Z průběhu veličin na diagramu je patrná poměrně dobrá shoda vypočítaného průběhu teploty  $T$ , kde relativní odchylka nepřesahuje 3,5 %. Tato odchylka je způsobena buď nevhodně stanovenou střední měřenou teplotou (viz obr. 1), nebo pravděpodobněji ne zcela odpovídající volbou podobnosti přirozené konvekce v nádobě, kde bude mj. hrát roli i pohyb tekutiny v průběhu vyprazdňování. V diagramu jsou dále znázorněny důsledky zanedbání vlivu kondenzace vlhkosti při výpočtu (průběh teploty suchého vzduchu  $T_{such}$ ) a zanedbání vlivu sdílení tepla (průběh adiabatické teploty  $T_{ad}$ ). Průběhy měřeného a vypočítaného tlaku nejsou vyneseny, protože vykazují prakticky absolutní shodu.

Vzhledem k poměru tepelných kapacit tělesa tlakové nádoby a v ní obsaženého plynu dochází v průběhu vyprazdňování jen k malé změně teploty stěny. Vypočítaný průběh střední teploty stěny  $T_s$  tlakové nádoby v průběhu výtoku je uveden v diagramu na obr. 3. Samozřejmě, že v oblasti výstupního potrubí z tlakové nádoby bude,

vzhledem k jinému charakteru konvekce, pokles teploty stěny podstatně výraznější, ale jeho určení nebylo předmětem řešení prezentované úlohy.



Obr. 2 Porovnání měřeného a vypočítaného průběhu stavových veličin za různých podmínek řešení.



Obr. 3 Průběh střední teploty stěny tlakové nádoby v průběhu vyprazdňování.

## **Závěr**

Prezentované výsledky potvrzují oprávněnost uvedeného jednorozměrového řešení úlohy, především vzhledem k určení stavu plynu v tlakové nádobě. Avšak s ohledem na charakter jevu a měřené rozložení teploty v nádobě (obr. 1) se nabízí i použití komerčního softwaru pro vícerozměrové řešení úlohy. To se připravuje s použitím programového vybavení ANSYS, přičemž zde asi největším problémem bude implementování vlivu kondenzace vlhkosti plynu do výpočtu.

## **Literatura**

- [1] KRÍŽ, R. - VÁVRA, P. a kol.: Strojírenská příručka. Sv. 4, odd. L. SCIENTIA a SNTL, Praha 1994.
- [2] PŘIKRYL, P.: Numerické metody matematické analýzy. SNTL, Praha 1985.
- [3] DEJČ, M. E.: Technická dynamika plynů. SNTL, Praha 1967.
- [4] ŠUBART, F.: Základy technické termodynamiky. VA, Brno 1963.

## **Summary**

The paper describes the mathematical model of the pressure vessel gas discharge thermodynamic process. There are derived the differential equations of the thermodynamic system state quantities quasi-stationary solution including heat transfer and air moisture condensation influences. The system of four the first-order differential equations is solved by the Runge-Kutta 4<sup>th</sup> order method.

The experimental validation of the theoretical solution was realised by the discharge from the 3 m<sup>3</sup> volume pressure vessel into a free atmosphere. The outlet section was attached with the convergent nozzle. The course of the air temperature in the pressure vessel was measured by thermocouples with help of the measuring computer and LAB-VIEW software. The comparison of the computing results and measured values is presented graphically. Further there are graphically expressed temperature courses of the vessel wall and computational influences of heat transfer and air moisture condensation.