



Doménové dekompozice na heterogenních svazcích počítačů

Jaroslav Kruis¹, Zdeněk Bittnar²

Abstrakt: příspěvek se zabývá využitím jednoho druhu paralelních počítačů—svazků při řešení rozsáhlých úloh mechaniky. Svazky počítačů jsou obvykle heterogenní a to s sebou přináší problémy. Soustavy algebraických rovnic se řeší duální doménovou dekompozicí. Pozornost je zaměřena na rovnoměrné vytížení všech procesorů nutné k dosažení požadovaných zrychlení. Na jednoduchých příkladech dekompozice se studují odchylky od rovnoměrného vytížení procesorů a jsou uvedeny alternativní návrhy dekompozice vedoucí k lepším výsledkům pro studovaný příklad.

Klíčová slova: doménové dekompozice, svazky počítačů, heterogenní paralelní počítače, rovnoměrné vytížení.

1 Úvod

Metody doménové dekompozice se stávají běžným, někdy i jediným možným, nástrojem řešení rozsáhlých soustav lineárních algebraických rovnic získaných zejména z metody konečných prvků. Ačkoliv je myšlenka rozložení oblasti na menší podoblasti stará více než sto let, její praktické používání je spjato nedílně s paralelními počítači. Ty se během své poměrně krátké doby existence výrazně mění. V počátečních obdobích výskytu paralelních počítačů se pod pojmem paralelní počítač rozuměl tzv. masivní stroj, tedy několik procesorů spojených v různých konfiguracích. Postupem času se stále více prosazují tzv. cluster—svazky počítačů. Jejich hlavní předností je nesrovnatelně nižší cena a tím velká dostupnost pro širokou odbornou veřejnost. Další značnou výhodou je snadné sestavení svazku ze stávajících počítačů.

Na druhou stranu je třeba zmínit nevýhody svazků proti masivním počítačům. První nevýhodou je pomalejší komunikace mezi jednotlivými procesory, protože je spojení zajištěno obyčejným nebo rychlým Ethernetem, který je pochopitelně pomalejší než různé high a super-performace přepínače (switch). Mnohem větší problémy ale způsobuje heterogenita svazků, která je dána různě velkými paměťmi

¹Ing. Jaroslav Kruis, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Stavební fakulta ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6; tel. +420 2 2435 4369, e-mail: jk@cml.fsv.cvut.cz

²Prof. Ing. Zdeněk Bittnar, DrSc., Katedra stavební mechaniky, Stavební fakulta ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6; tel. +420 2 2435 3869, e-mail: bittnar@fsv.cvut.cz

a různě rychlými procesory. Masivní paralelní počítače jsou obvykle homogenní, tedy všechny procesory jsou stejné. Heterogenita svazků obvykle vyplývá z jejich postupného sestavování, novější procesory jsou rychlejší a mají větší paměti.

Heterogenita paralelního počítače je nevýhodná pro dosažení rovnoměrného vytížení (load-balancing). Na homogenních počítačích stačí rozdělit oblast na stejné podoblasti a rovnoměrného vytížení je dosaženo. V případě heterogenního počítače se situace výrazně komplikuje, protože původní oblast je třeba rozdělit na podoblasti s ohledem na rychlost jednotlivých procesorů a jejich operační paměti. Již samotné určení rychlostí procesorů v paralelním počítači je obtížné.

2 Duální doménová dekompozice (FETI)

2.1 Úvod

V současné době jsou k dispozici dvě základní varianty metody doménové dekompozice. První z nich, označovaná jako metoda Schurových doplňků, pracuje stále s primárními neznámými a je popsána např. v [2, 5, 12, 6, 7, 8, 9]. Druhá varianta, označovaná jako FETI nebo duální doménová dekompozice, byla formulována později, ale stala se populárnější díky svým dobrým vlastnostem [1, 2, 12, 13, 6, 7, 8, 9]. Kromě toho se velmi osvědčila i v různých speciálních oblastech [10, 11, 3, 4]. Označení duální se odvíjí od neznámých, které vystupují ve výsledné soustavě rovnic. Zkratka FETI pochází z anglického názvu Finite Element Tearing and Interconnecting.

V kapitole zabývající se FETI budou indexy r a s považovány za sčítací, tj. na tyto indexy se vztahuje Einsteinova sumační konvence. U ostatních indexů, pokud budou sčítací, bude uveden znak součtu Σ .

2.2 Odvození rovnic

Nechť je dána oblast Ω s hranicí Γ . Nechť oblast Ω reprezentuje pružné těleso zatížené objemovými silami X_r a povrchovými silami p_r . Složky neznámé vektorové funkce posunů jsou označeny u_r . Energetický funkcionál pro takové těleso má tvar

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{rs} \varepsilon_{rs} d\Omega - \int_{\Omega} u_r X_r d\Omega - \int_{\Gamma} u_r p_r d\Gamma. \quad (1)$$

V tomto vyjádření jsou integrály uvažovány přes celou řešenou oblast Ω . Tu lze ovšem rozdělit na m podoblastí vzájemně nespojených. Na každé takové podoblasti jsou definovány všechny veličiny podobně jako na původní oblasti. Je ale třeba zajistit spojitost na hranicích podoblastí, což se projeví v energetickém funkcionálu dalším členem. Problém rozdělení na podoblasti lze popsat takto

$$\Pi = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} \sigma_{rs} \varepsilon_{rs} d\Omega_j - \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_j} u_r X_r d\Omega_j - \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j^e} u_r p_r d\Gamma_j^e + \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j^i} [u_r] \lambda_r d\Gamma_j^i, \quad (2)$$

kde Ω_j je j -tá podoblast, Γ_j je hranice j -té podoblasti. Pro sjednocení oblastí Ω_j platí $\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^m \bar{\Omega}_j$, pro průnik platí $j \neq k : \Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$. Hranice j -té podoblasti Γ_j je

rozdělena na část $\Gamma_j^e = \Gamma \cap \Gamma_j$, tedy na část ležící na hranici celé oblasti a na hranici j -té podoblasti, $\Gamma_j^i = \Gamma_j - \Gamma_j^e$ je část hranice j -té podoblasti vzniklá rozdělením původní oblasti. Toto rozdělení hranice Γ_j je nutné, protože na Γ_j^i budou zavedeny Lagrangeovy multiplikátory a na Γ_j^e je zadáno zatížení. Poslední člen ve funkcionálu (2) zajišťuje spojitost funkce posunutí pomocí Lagrangeových multiplikátorů λ_r ($[u_r]$ je rozdíl posunutí na hranicích podoblastí). Na hranicích podoblastí se získají obecně různé vektory posunů, protože se podoblasti považují za nezávislé. Teprve přítomnost Lagrangeových multiplikátorů zajistí to, že posuny na hranicích budou kompatibilní.

Pro další popis bude zavedeno toto označení

- m - počet podoblastí,
- n_j - počet stupňů volnosti j -té podoblasti,
- $\mathbf{r}^{(j)}(n_j, 1)$ - vektor neznámých v j -té podoblasti,
- n - počet všech Lagrangeových multiplikátorů,
- $\boldsymbol{\lambda}(n, 1)$ - vektor všech Lagrangeových multiplikátorů,
- t_j - počet posunů j -té podoblasti jako tuhého tělesa,
- l - součet všech t_j , tj. $l = \sum_{j=1}^m t_j$.

Kompatibilita na hranicích podoblastí si zaslouží pozornost, protože je východiskem pro získání potřebných rovnic. Na hranici mezi podoblastmi i a j musí platit rovnosti

$$\begin{aligned} & \vdots \\ u_q^{(i)} &= u_p^{(j)}, \\ u_{q+1}^{(i)} &= u_{p+1}^{(j)}, \\ u_{q+2}^{(i)} &= u_{p+2}^{(j)}, \\ & \vdots \end{aligned} \tag{3}$$

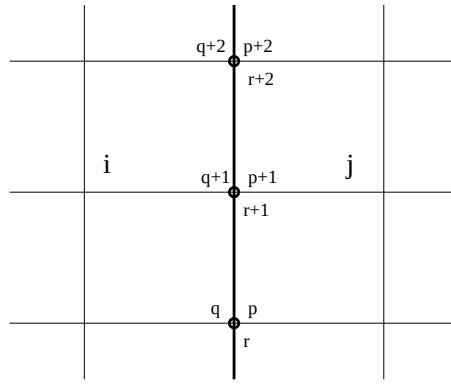
q a p vyjadřují čísla neznámých na jednotlivých podoblastech, r je globální číslování. Situace je znázorněna na obrázku 1. Rovnice (3) se musí objevit ve funkcionálu energie pomocí Lagrangeových multiplikátorů $\lambda_r, \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}$, atd. ve formě

$$\dots + \lambda_r(u_q^{(i)} - u_p^{(j)}) + \lambda_{r+1}(u_{q+1}^{(i)} - u_{p+1}^{(j)}) + \lambda_{r+2}(u_{q+2}^{(i)} - u_{p+2}^{(j)}) + \dots \tag{4}$$

Složky $u_q^{(i)}, u_{q+1}^{(i)}, u_{q+2}^{(i)}, \dots$ lze získat z vektoru $\mathbf{r}^{(i)}$ pomocí lokalizační matice $\mathbf{E}_i$, která má rozměr (n, n_i) . Matice $\mathbf{E}_i$ se nikde nesestavují a slouží jen ke snadnějšímu zápisu. Kompatibilita posunů na hranicích je zajištěna členem $\sum_{j=1}^m \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{E}_j \mathbf{r}^{(j)}$.

Diskretizovaná podoba funkcionálu energie (2) je tedy

$$\Pi = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} (\mathbf{r}^{(j)})^T \mathbf{B}_j^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j \mathbf{r}^{(j)} d\Omega_j -$$



Obr. 1: Situace na hranici podoblastí.

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_j} (\mathbf{r}^{(j)})^T \mathbf{N}_j^T \mathbf{X}^{(j)} d\Omega_j - \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j^e} (\mathbf{r}^{(j)})^T \mathbf{N}_j^T \mathbf{p}^{(j)} d\Gamma_j^e + \\
& + \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{E}_j \mathbf{r}^{(j)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

V energetickém funkcionálu (5) je $m + 1$ neznámých ($m + 1$ neznámých vektorů; jsou to $\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \dots, \mathbf{r}^{(m)}, \boldsymbol{\lambda}$). Proto je při hledání extrému nutné derivovat funkcionál podle těchto proměnných a tím se získají soustavy rovnic, které je třeba řešit zároveň. Derivace funkcionálu (5) podle jednotlivých proměnných mají tvar

$$\begin{aligned}
\text{Pro } j &= 1, 2, \dots, m \\
\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}^{(j)}} &= \int_{\Omega_j} \mathbf{B}_j^T D\mathbf{B}_j \mathbf{r}^{(j)} d\Omega_j - \\
& - \int_{\Omega_j} \mathbf{N}_j^T \mathbf{X}^{(j)} d\Omega_j - \int_{\Gamma_j^e} \mathbf{N}_j^T \mathbf{p}^{(j)} d\Gamma_j^e + \\
& + \mathbf{E}_j^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{O},
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \sum_{j=1}^m \mathbf{E}_j \mathbf{r}^{(j)} = \mathbf{O}. \tag{7}$$

S obvyklým označením

$$\mathbf{K}_j = \int_{\Omega_j} \mathbf{B}_j^T D\mathbf{B}_j d\Omega_j \tag{8}$$

pro matici tuhosti (v tomto případě matice tuhosti podoblasti) a

$$\mathbf{f}^{(j)} = \int_{\Omega_j} \mathbf{N}_j^T \mathbf{X}^{(j)} d\Omega_j + \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j^e} \mathbf{N}_j^T \mathbf{p}^{(j)} d\Gamma_j^e \tag{9}$$

pro vektor zatížení má výsledná soustava lineárních algebraických rovnic tvar

$$\text{Pro } j = 1, \dots, m \quad \mathbf{K}_j \mathbf{r}^{(j)} = \mathbf{f}^{(j)} - \mathbf{E}_j^T \boldsymbol{\lambda}, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{E}_j \mathbf{r}^{(j)} = \mathbf{O}. \tag{11}$$

Řešení soustav rovnic (10) a (11) je třeba věnovat pozornost. Je to proto, že matice $\mathbf{K}_j$ nejsou obecně regulární, neboť některé podoblasti mohou vykazovat posuny jako tuhá tělesa. Není tedy možné obecně psát

$$\mathbf{r}^{(j)} = \mathbf{K}_j^{-1} (\mathbf{f}^{(j)} - \mathbf{E}_j^T \boldsymbol{\lambda}), \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{E}_j \mathbf{K}_j^{-1} \mathbf{E}_j^T \boldsymbol{\lambda} = \sum_{j=1}^m \mathbf{E}_j \mathbf{K}_j^{-1} \mathbf{f}^{(j)}, \quad (13)$$

protože matice $\mathbf{K}_j^{-1}$ obecně neexistují. Proto se zavádí zobecněná inverzní matice $\mathbf{K}^+$ k matici $\mathbf{K}$ vztahem

$$\mathbf{K} \mathbf{K}^+ \mathbf{K} = \mathbf{K}. \quad (14)$$

Řešitelnost soustavy (10) je zaručena, pokud platí podmínka

$$(\mathbf{f}^{(j)} - \mathbf{E}_j^T \boldsymbol{\lambda}) \perp \ker \mathbf{K}_j, \quad (15)$$

kde $\ker \mathbf{K}_j$ označuje jádro matice, pro které platí

$$\ker \mathbf{K}_j = \{\mathbf{x} \in R^{n_j} : \mathbf{K}_j \mathbf{x} = \mathbf{O}\}. \quad (16)$$

S využitím zobecněné inverzní matice a s přihlédnutím k podmínce (15) je možné psát řešení soustavy rovnic (10) ve tvaru

$$\mathbf{r}^{(j)} = \mathbf{K}_j^+ (\mathbf{f}^{(j)} - \mathbf{E}_j^T \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{R}_j \boldsymbol{\gamma}^{(j)}, \quad (17)$$

kde matice $\mathbf{R}_j$ obsahuje sloupce, které jsou tvořeny vektory posunutí podoblasti jako tuhého tělesa, nebo což je totéž, $\mathbf{R}_j$ je tvořena bázovými vektory prostoru $\ker \mathbf{K}_j$. Rozměr matice $\mathbf{R}_j$ je (n_j, t_j) . Vektor $\boldsymbol{\gamma}^{(j)}$ obsahuje koeficienty lineární kombinace.

Spojením vztahů (17) a (11) vychází

$$\sum_{j=1}^m \mathbf{E}_j \mathbf{K}_j^+ \mathbf{E}_j^T \boldsymbol{\lambda} = \sum_{j=1}^m (\mathbf{E}_j \mathbf{K}_j^+ \mathbf{f}^{(j)} + \mathbf{E}_j \mathbf{R}_j \boldsymbol{\gamma}^{(j)}). \quad (18)$$

Podmínku řešitelnosti (15) je nyní možné vyjádřit pomocí matic $\mathbf{R}_j$ takto

$$\text{Pro } j = 1, \dots, m : \mathbf{R}_j^T (\mathbf{f}^{(j)} - \mathbf{E}_j^T \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{O}. \quad (19)$$

Pro další úvahy bude zavedeno toto označení:

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^m \mathbf{E}_j \mathbf{K}_j^+ \mathbf{E}_j^T, \quad (20)$$

$$\mathbf{H} = (-\mathbf{E}_1 \mathbf{R}_1, -\mathbf{E}_2 \mathbf{R}_2, \dots, -\mathbf{E}_m \mathbf{R}_m), \quad (21)$$

$$\mathbf{f} = \sum_{j=1}^m \mathbf{E}_j \mathbf{K}_j^+ \mathbf{f}^{(j)}, \quad (22)$$

$$\mathbf{q}^T = ((-\mathbf{R}_1^T \mathbf{f}^{(1)})^T, (-\mathbf{R}_2^T \mathbf{f}^{(2)})^T, \dots, (-\mathbf{R}_m^T \mathbf{f}^{(m)})^T), \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^T = ((\boldsymbol{\gamma}^{(1)})^T, (\boldsymbol{\gamma}^{(2)})^T, \dots, (\boldsymbol{\gamma}^{(m)})^T). \quad (24)$$

Se symboly zavedenými v rovnicích (20), (21), (22), (23) a (24) je možné zapsat soustavu rovnic (18) a (19) přehledně v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Soustava rovnic (25) se řeší modifikovanou metodou sdružených gradientů, ze které se získá vektor neznámých Lagrangeových multiplikátorů $\boldsymbol{\lambda}$. Pro výpočet posunů na jednotlivých podoblastech je ale zapotřebí ještě vektor $\boldsymbol{\gamma}$ obsahující koeficienty lineárních kombinací. Ten se vypočte z první rovnice (25). Ta má po roznásobení tvar

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{H}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{f}. \quad (26)$$

Protože matice $\mathbf{H}$ není čtvercová, není možné provádět přímo inverzi. Rovnice (26) se přenásobí zleva maticí $\mathbf{H}^T$. Tím se na levé straně objeví čtvercová matice a lze vypočítat vektor koeficientů lineárních kombinací podle vztahu

$$\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{f} - \mathbf{K}\boldsymbol{\lambda}). \quad (27)$$

Jsou-li vypočteny vektory $\boldsymbol{\lambda}$ a $\boldsymbol{\gamma}$ je možné přistoupit k výpočtu výsledných posunů. Ty se vypočtou ze vztahu (17). Vektor $\mathbf{r}^{(j)}$ se skládá ze dvou částí. První příspěvek je

$$\mathbf{r}_{\infty}^{(j)} = \mathbf{K}_j^+ (\mathbf{f}^{(j)} - \mathbf{E}_j^T \boldsymbol{\lambda}), \quad (28)$$

druhý příspěvek je tvořen posuny podoblasti jako tuhého tělesa

$$\mathbf{r}_{\text{ker}}^{(j)} = \mathbf{R}_j \boldsymbol{\gamma}^{(j)}. \quad (29)$$

Pochopitelně, že pro podoblast, která nevykazuje díky podporám posuny jako tuhé těleso, je vektor $\mathbf{r}_{\text{ker}}^{(j)}$ nulový. Výsledný vektor posunutí má tedy tvar

$$\mathbf{r}^{(j)} = \mathbf{r}_{\infty}^{(j)} + \mathbf{r}_{\text{ker}}^{(j)}. \quad (30)$$

3 Numerické příklady

Numerický příklad slouží k demonstraci chování heterogenního svazku. Svazek je sestaven z osobních počítačů DELL, které jsou buď jednoprocessorové nebo dvouprocessorové. Jednotlivé charakteristiky jsou uvedeny v tabulce 1. Spojení mezi počítači je zajištěno 100 MBitovým Ethernetem.

Kapitola 2 byla věnována popisu metody FETI a je z ní patrné, že metoda obsahuje následující základní úkony: výpočet posunů podoblastí jako tuhých těles, výpočet matice $(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$ a modifikovaná metoda sdružených gradientů.

S ohledem na snadné zpracování dat a generování sítí konečných prvků byla uvažována obdélníková oblast, která byla dělena na menší obdélníkové podoblasti. Při pravidelném dělení jednoduché oblasti bylo možné docílit zcela totožných podoblastí a tím zcela totožných požadavků na paměti počítačů a totožných počtů aritmetických operací.

typ počítače	procesor	paměť
Z1, Z2	400 MHz	512 MB
Z3, Z4, Z5	450 MHz	512 MB
Z6	450 MHz	1024 MB
Z7	1700 MHz	1024 MB
Z8	1000 MHz	2048 MB
Z9	2000 MHz	256 MB
CML	600 MHz	512 MB
SPI	1000 MHz	512 MB

Tab. 1: Parametry počítačů tvořících svazek.

typ poč.	doba výp. RBM	doba výp. $(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$	doba výp. mod. sdr. grad.
Z1	97	12	115
Z2	91	17	115
Z3	88	20	115
Z5	86	23	115
Z6	108	1	114
Z7	30	79	115
Z9	32	78	115
CML	93	16	115
SPI	77	32	115

Tab. 2: Doby jednotlivých fází v metodě FETI pro totožné podoblasti.

V prvním kroku byla původní oblast rozdělena na 10 totožných podoblastí. Každá podoblast obsahovala 140x140 konečných prvků. V tabulce 2 jsou uvedeny doby potřebné k provedení základních úkonů v metodě FETI. Ve shodě z očekáváním se doby potřebné k výpočtu posunů jako tuhých těles výrazně liší. Kritický je počítač Z6, který dokončil výpočet jako poslední a všechny ostatní počítače na něj čekaly.

V druhém kroku byla upravena dekompozice tak, aby se pokud možno vyrovnaly výpočetní časy. V tabulce 3 jsou uvedeny doby řešení úlohy obsahující stejný počet konečných prvků jako v předcházejícím kroku, ale s rozdílnou dekompozicí na podoblasti. Počty prvků na podoblastech jsou patrné z posledního sloupce tabulky.

Uvedený příklad má pouze ilustrační charakter. Dekompozice byla upravena ručně, což je pro systematické výpočty nepřijatelné. V současnosti se pracuje na automatizaci rovnoměrného vytížení procesorů. To se zajišťuje pomocí dekompozice oblasti na velké množství podoblastí (v současnosti je počet podoblastí roven počtu procesorů), které jsou potom rozesílány na procesory. Tento postup ale může vést k velkému množství neznámých v redukovaném problému, což snižuje jeho účinnost.

Poděkování

Tato práce byla podporována grantovým projektem Grantové agentury České republiky číslo 103/01/0400.

typ poč.	dobu výp. RBM	dobu výp. $(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$	dobu výp. mod. sdr. grad.	sít prvků
Z1	66	22	106	140x95
Z2	64	24	106	140x95
Z3	60	28	106	140x95
Z5	86	2	106	140x140
Z6	72	16	106	140x95
Z7	54	33	106	140x240
Z9	50	38	106	140x240
CML	85	3	106	130x140
SPI	77	11	106	140x140

Tab. 3: Doby jednotlivých fází v metodě FETI pro různé podoblasti.

Literatura

- [1] Farhat Ch., Roux F.X.: A Method of Finite Element Tearing and Interconnecting and its Parallel Solution Algorithm. Int. Journal for Num. Methods in Eng., vol. 32, 1205-1227, 1991.
- [2] Farhat Ch., Roux F.X.: Implicit parallel processing in structural mechanics. Computational Mechanics Advances 2, pp. 1-124, 1994.
- [3] Farhat Ch., Mandel J.: The Two-Level FETI Method for Static and Dynamic Plate Problems - Part I: An Optimal Iterative Solver for Biharmonic Systems.
- [4] Farhat Ch., Mandel J., Roux F.X.: The Two-Level FETI Method - Part II: Extension to Shell Problems, Parallel Implementation and Performance Results. Computer Meth. in Applied Mechanics and Engineering.
- [5] Hackbusch W.: Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations. Applied Mathematical Sciences, Vol. 95, Springer-Verlag, 1994.
- [6] J. Kruis, Z. Bittnar: The Application of Parallel Technologies for the Implicit Solution of Large Linear Systems in Structural Mechanics. Contributions to Computational Mechanics in Civil engineering, pp. 161-175, CTU Reports Vol. 3, No. 4/1999, Prague, 1999.
- [7] J. Kruis, Z. Bittnar: Domain Decomposition Methods in Structural Mechanics. J. Náprstek, J. Minster eds. Engineering mechanics 2000, pp. 105-110, 2000.
- [8] J. Kruis, Z. Bittnar: Advantages of Parallel Algorithms in Structural Mechanics. B. H. V. Topping eds. Developments in Engineering Computational Technology, pp. 219-227. Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, 2000.
- [9] J. Kruis, Z. Bittnar: Řešení rozsáhlých soustav lineárních rovnic z MKP na paralelních počítačích. J. Plešek, D. Gabriel eds.: Výpočty konstrukcí metodou konečných prvků. Ústav termomechaniky AV ČR, 15. listopadu 2001. pp. 73-84.

- [10] J. Kruis, K. Matouš: Applying FETI to Composite Laminated Plates. Marek, I. ed. Proceeding of the XIIIth Summer School Software and Algorithms of Num. Math., pp. 173-189, 1999.
- [11] J. Kruis, K. Matouš: Domain Decomposition of Composite Laminated Plates. B. H. V. Topping eds. Developments in Engineering Computational Technology, pp. 183-189. Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, 2000.
- [12] Papadrakakis M.: Parallel Solution Methods in Computational Mechanics. John Wiley & sons, 1997.
- [13] Papadrakakis M., Topping B. H. V.: Innovative Computational Methods for Structural Mechanics. Saxe-Coburg Publications, Edinburgh, 1999.