



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

SIMULATION OF THE BLADDER CRASH

J. Křen*

***Summary:** The problem of the interaction between a liquid and flexible continuum occurs very often in practice. In the male urinary tract the interaction between urine and the bladder takes place. The simplified model of the considered interaction problem is presented. During a crash the whole urine-bladder system is kinematically excited by the motion of the bladder foundation (prostate). To solve this model problem we use an uncoupled approach to the interaction problem solution. Both partial problems of interaction – relative urine flow and bladder vibration with respect to the system foundation – are formulated in an incremental form, the numerical realisation is carried out by FEM. Results are the time and spatial distribution of pressure and velocity in urine and the corresponding shape of the bladder during the crash.*

Klíčová slova: Newtonova kapalina, relativní pohyb, močový měchýř, interakce, dynamika.

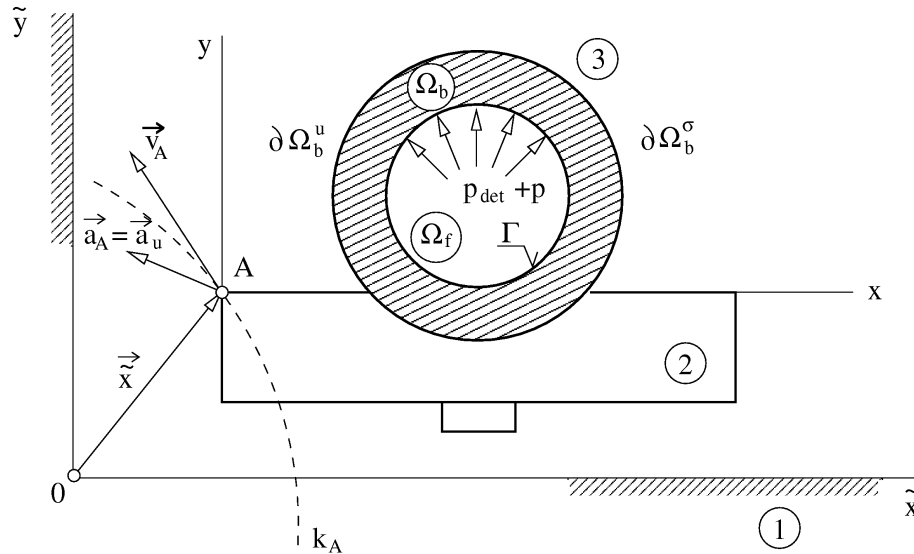
1. ÚVOD

S problémem interakce kapaliny s poddajným tělesem se v praxi setkáváme velmi často. V případě močového ústrojí muže se např. jedná o interakci moče se stěnou močového měchýře, a to jak ve statickém, tak i v dynamickém stavu močového traktu. Řešení tohoto silně vázaného problému interakce kapaliny s poddajným tělesem reprezentuje velmi složitou úlohu mechaniky kontinua, při které se s časem mění poloha společné hranice interakce obou kontinuí. Uvažovaný zjednodušený model interakce moče s močovým měchýřem je schematicky znázorněn na obr. 1. Celý systém uvažované části močového traktu nechť je při nárazu (např. automobilu) kinematicky buzen unášivým pohybem fundamentu močového měchýře (prostor 2 – prostata).

Při řešení této modelové úlohy interakce přijmeme následující předpoklady: močový měchýř je před nárazem zdeformován intravezikálním tlakem (cca 20 cm $H_2O \approx 2000 \text{ N}$),

* Prof. Ing. Jiří Křen, CSc., Katedra mechaniky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, e-mail: kren@kme.zcu.cz

moč splňuje předpoklady Newtonova modelu kapaliny (oblast Ω_f), její proudění je nestacionární laminární a izotermické, poddajná tkáň stěny močového měchýře (oblast Ω_b) je izotropní materiál se známým konstitutivním vztahem, tkáň stěny vykazuje velké posuvy a je podrobena velkým přetvořením. Vlastní úloha interakce moče s močovým měchýřem je řešena nesdruženou metodou (relativně samostatné řešení pohybu obou kontinuí), relativní pohyb moče a močového měchýře je formulován v přírůstkové formě.



Obr. 1. Fyzikální model interakce

2. RELATIVNÍ POHYB MOČE V MĚCHÝŘI

Počáteční a okrajová úloha hydromechaniky je popsána Navierovou-Stokesovou rovnicí, rovnicí kontuity a příslušnými okrajovými a počátečními podmínkami. Při řešení relativního pohybu moče vůči měchýři (pohyb v prostoru 2) vyjdeme ze základního rozkladu obecného pohybu tělesa. Pro složky rychlosti a zrychlení libovolné částice kapaliny platí

$$v_i = v_{irel} + v_{iu}, \quad \text{resp.} \quad a_i = a_{irel} + a_{iu}. \quad (1)$$

Při odvození Navierovy-Stokesovy rovnice relativního proudění Newtonovy kapaliny vyjdeme z 1. impulsové věty pro soustavu hmotných bodů, která musí platit i v rámci newtonovské mechaniky kontinua. Platí tedy (materiálová derivace, $\Delta\Omega \subset \Omega_f$)

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Delta\Omega} \rho v_i dV = F_i, \quad (2)$$

kde ρ je měrná hmotnost kapaliny a F_i jsou složky vektoru výslednice vnějších sil působících na příslušný objem kapaliny V (objemové a povrchové síly). Za předpokladu, že element hmotnosti $dm = \rho dV$ nezávisí na čase, můžeme levou strany rovnice (2) vyjádřit ve tvaru

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Delta\Omega} \rho v_i dV = \int_{\Delta\Omega} \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV = \int_{\Delta\Omega} \rho a_i dV, \quad (3)$$

kde a_i je složka vektoru výsledného (absolutního) zrychlení elementu dm kapaliny. Vnější síly kontinua můžeme dále vyjádřit ve tvaru (objemové a povrchové síly)

$$F_i = \int_{\Delta\Omega} \rho f_i dV + \int_{\partial\Delta\Omega} \tau_{ij} n_j dS. \quad (4)$$

Zde f_i jsou složky měrné objemové síly, τ_{ij} Cauchyův tenzor napjatosti a n_j jsou složky vektoru vnější normály k hranici $\partial\Delta\Omega$ (lipschitzovská hranice). Budeme-li dále na druhý člen rovnice (4) aplikovat Gaussovu-Ostrogradského větu, můžeme pohybovou rovnici (2) vyjádřit ve tvaru

$$\int_{\Delta\Omega} \rho a_i dV = \int_{\Delta\Omega} \rho f_i dV + \int_{\Delta\Omega} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV. \quad (5)$$

Tato rovnice platí pro libovolnou oblast $\Delta\Omega$. Zavedeme-li dále do ní absolutní zrychlení a_i , dostaneme základní tvar pohybové rovnice kapaliny. Platí

$$\rho a_{irel} + \rho a_{iu} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (6)$$

Zrychlení a_{iu} unášivého pohybu předpokládáme, že je dáno. Pro zrychlení relativního pohybu a_{irel} v Eulerovo popisu kontinua potom platí

$$a_{irel} = \frac{Dv_{irel}}{Dt} = \frac{\partial v_{irel}}{\partial t} + v_{jrel} \frac{\partial v_{irel}}{\partial x_j}. \quad (7)$$

Vzhledem k tomu, že již dále nemůže dojít k omylu, označíme pro jednodušší zápis relativní rychlost v_{irel} kapaliny (pohyb kapaliny vůči prostoru 2, $a_{iu} = \ddot{x}_i$, viz obr. 1) jako v_i a pohybová rovnice (6) přejde na tvar

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\rho \ddot{x}_i + \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (8)$$

Kontinuum musí dále splňovat zákon zachování hmotnosti (rovnici kontinuity) a ten platí jak v základním prostoru, tak i v prostoru 2. Obecně tedy platí ($v_i \approx v_{irel}$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0. \quad (9)$$

Zohledníme-li dále v rovnicích (8) a (9) předpoklady Newtonova modelu kapaliny (např. [5]) a omezíme-li se na nestlačitelnou a izotropní kapalinu ($\rho = konst.$, $\mu = konst.$ - dynamická

viskozita), bude relativní pohyb moče v prostoru 2 popsán následujícím systémem rovnic a podmínek. Platí

Navierova-Stokesova rovnice

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j^* \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \rho \tilde{\tilde{x}}_i + \rho f_i; \quad t \in (0, T), x \in \Omega_f. \quad (10)$$

Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0; \quad t \in (0, T), x \in \Omega_f. \quad (11)$$

Okrajové podmínky

$$\begin{aligned} v_i(x, t) &= \hat{q}_i(x, t); & t \in (0, T), x \in \partial\Omega_{f1}, \\ v_i(x, t) &= 0; & t \in (0, T), x \in \partial\Omega_{f11}, \\ \tau_{ij} n_j(x, t) &= \hat{\sigma}_i(x, t); & t \in (0, T), x \in \partial\Omega_{f2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Počáteční podmínky

$$\begin{aligned} v_i(x, 0) &= \hat{v}_i^0(x); & t = 0, x \in \Omega_f, \\ p_{\det}(x, 0) &= p_{\det}(x, t) = \hat{p}_{\det} = konst.; & t < 0, T, x \in \Omega_f. \end{aligned} \quad (13)$$

Za předpokladu, že známe složky vektoru rychlosti $\hat{q}_i$ stěny močového měchýře, tak neznámé v takto formulované úloze jsou $\{v_i(x, t), p(x, t)\}$ s tím, že pro výsledný tlak v moči při nárazu platí $p_{celk} = \hat{p}_{\det} + p$.

Použijeme-li dále pro odvození slabého řešení relativního proudění moče Galerkinovu metodu, dostaneme integrální identity tohoto proudění ve tvaru [1] (při odvození předpokládáme v_j^* jako známé)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \delta v_i dx + \int_{\Omega_f} \rho v_j^* \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta v_i dx - \int_{\Omega_f} p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega_f} \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx = \\ = \int_{\Omega_f} \rho f_i \delta v_i dx - \int_{\Omega_f} \rho \tilde{\tilde{x}}_i \delta v_i dx - \int_{\Omega_f} \hat{\sigma}_i \delta v_i dx; \quad \int_{\Omega_f} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p dx = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

které řešíme na časoprostorovém válci $\bar{D} = \bar{\Omega}_f \times [0, T]$, $x \in \bar{\Omega}_f$, $\bar{\Omega}_f = \Omega_f \cup \partial\Omega_f$, $\partial\Omega_f = \partial\Omega_{f1} \cup \partial\Omega_{f11} \cup \partial\Omega_{f2}$ za současného splnění okrajových podmínek na $\partial\Omega_b$ (stěna močového měchýře).

Po provedení prostorové diskretizace problému pomocí metody konečných prvků dávají rovnice (14) čtyři maticové vztahy, které při označení $v_1 = u, v_2 = v, v_3 = w$ mají tvar (nelineární rovnice [5])

$$\mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_1(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \mathbf{w}^*) \mathbf{u} + \mathbf{D}_1 \mathbf{u} + \mathbf{C}_1 \mathbf{p} = \mathbf{E}_1,$$

$$\mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{B}_1(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \mathbf{w}^*) \mathbf{v} + \mathbf{D}_1 \mathbf{u} + \mathbf{C}_2 \mathbf{p} = \mathbf{E}_2,$$

$$\mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{B}_1(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \mathbf{w}^*) \mathbf{w} + \mathbf{D}_1 \mathbf{w} + \mathbf{C}_3 \mathbf{p} = \mathbf{E}_3, \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{u} + \mathbf{K}_2 \mathbf{v} + \mathbf{K}_3 \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Vyjádříme-li dále časovou změnu složek vektoru rychlosti kapaliny pomocí dopředného diferenčního schématu, tj. platí

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}; \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t}; \quad \dot{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n}{\Delta t}, \quad (16)$$

můžeme systém rovnic (15) zapsat v blokovém maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{n+1} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}^{n+1} = \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{n+1} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^n, \quad (17)$$

resp. zapíšeme tuto soustavu nelineárních algebraických rovnic v jednoduchém komprimovaném tvaru (n - časová hladina, Δt - časový krok řešení při aplikaci numerické metody, $\mathbf{x}$ - neznámé řešené úlohy)

$$\mathbf{K}^{(n+1)} \mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{f}^{(n)}. \quad (18)$$

Zde podotkněme, že vnější zatížení kontinua na časové hladině $n+1$ známe (sloupcové matice $\mathbf{E}_i^{n+1}$) a rovněž tak známe hodnoty složek vektoru rychlosti a tlaku na n -té časové hladině, tj. známe vektory $\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n, \mathbf{w}^n, \mathbf{p}^n$ - určují sloupcové matice $\mathbf{F}_i^n$.

Pro numerické řešení soustavy rovnic (18) budeme nyní aplikovat iterační postup Newtonovy-Raphsonovy metody, který je při přechodu na $(n+1)$ -ní časovou hladinu řízen vztahy

$$\mathbf{x}^{(n+1),(r+1)} = \mathbf{x}^{(n+1),(r)} - \mathbf{J}_{(n+1),(r)}^{-1} \mathbf{R}^{(n+1),(r);(n),(r)}, \quad (19)$$

kde pro reziduální vektor v průběhu iteračního procesu platí

$$\mathbf{R}^{(n+1),(r);(n),(r)} = \mathbf{K}^{(n+1),(r)} \mathbf{x}^{(n+1),(r)} - \mathbf{f}^{(n),(0)}. \quad (20)$$

Zde r je iterační krok na aktuální časové hladině a zápis $\mathbf{f}^{(n),(0)}$ vyjadřuje skutečnost, že rychlosti a tlak kapaliny, které se v tomto vektoru vyskytují, jsou „konstanty“ napočtené na předchozí časové hladině a v průběhu iterace na aktuální časové hladině se nemění. Tím máme v přírůstkové formě definováno a řešeno relativní proudění moče v močovém měchýři při uvažované modelové úloze interakce.

3. DYNAMICKÉ ŘEŠENÍ MOČOVÉHO MĚCHÝŘE

Při řešení dynamiky močového měchýře vyjdeme z řešení nelineární úlohy elastostatiky kontinua v přírůstkové formě a omezíme se na *totální Lagrangeovu formulaci* (dále TL formulace, např. [3], [5])

Uvažujme tedy obecně pohyb pružného obecného tělesa v nehybném kartézském souřadnicovém systému. Necht' těleso vykazuje velké zobecněné posuvy, je podrobeno velkým přetvořením a má nelineární materiálové vlastnosti. V čase $t = 0$ se těleso nachází v počáteční nezdeformované konfiguraci 0C (jsou zadány okrajové a počáteční podmínky tohoto kontinua), za čas t se zdeformuje a přejde do okamžité, zdeformované konfigurace tC . V případě nelineárního kontinua je nutno uvedený proces řešit v diskrétních časových okamžicích $\Delta t, 2\Delta t, \dots, t, t + \Delta t, \dots, T$, kde Δt je časový krok metody. Cílem řešení je určit rovnovážné polohy pružného kontinua v těchto časových okamžicích a při řešení se předpokládá, že změny konfigurace a silového zatížení kontinua mezi časovými okamžiky t a $t + \Delta t$ jsou malé.

Pro vytvoření strategie řešení budeme předpokládat, že známe rovnovážné polohy kontinua v diskrétních časových okamžicích na intervalu $\langle 0, t \rangle$, tj. známe všechny veličiny kontinua při přechodu z konfigurace 0C do konfigurace tC . Potom typickým krokem dalšího řešení je přechod z konfigurace tC na další konfiguraci ${}^{t+\Delta t}C$ kontinua. Při řešení sledujeme pohyb všech částic kontinua, tj. uvažujeme Lagrangeovu (materiálovou) formulaci nelineárního problému elastostatiky kontinua.

Pro určení rovnovážné polohy kontinua v čase $t + \Delta t$ vyjdeme z principu virtuálních prací [3], [5]

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij}^A {}^{t+\Delta t}dV = \delta {}^{t+\Delta t}W, \quad (21)$$

kde ${}^{t+\Delta t}\tau_{ij}$ je Cauchyův tenzor napjatosti, ${}^{t+\Delta t}e_{ij}^A$ je lineární část Almansiova tenzoru přetvoření. Levá část této rovnice vyjadřuje virtuální práci vnitřních sil kontinua. Virtuální práce vnějších sil je potom definována vztahem

$$\delta {}^{t+\Delta t}W = \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t}f_i^V \delta u_i {}^{t+\Delta t}dV + \int_{t+\Delta t A} {}^{t+\Delta t}f_i^P \delta u_i^P {}^{t+\Delta t}dA, \quad (22)$$

kde u_i jsou složky vektoru posunutí materiálového bodu kontinua a první, resp. druhý člen pravé strany této rovnice vyjadřuje virtuální práci objemových sil (včetně dynamických sil), resp. sil plošných.

Vzhledem k tomu, že princip virtuálních prací (21) však nelze přímo použít (neznáme dopředu stav kontinua v konfiguraci ${}^{t+\Delta t}C$, napjatost, přetvoření, objem, povrch) volí TL formulace za základní (referenční) konfiguraci počáteční konfiguraci 0C kontinua a opírá se o platnost vztahu [3], [5]

$$\int_{{}^0V} {}^tS_{ij} \delta {}^t\varepsilon_{ij} d{}^0V = \int_{{}^tV} {}^t\tau_{mn} \delta {}^te_{mn}^A d{}^tV, \quad (23)$$

${}^tS_{ij}$ je 2. Piolův-Kirchhoffův tenzor napjatosti (dále Kirchhoffův tenzor) a ${}^t\varepsilon_{ij}$ je Greenův tenzor přetvoření. Při použití tohoto vztahu můžeme základní princip virtuálních prací TL formulace (21) vyjádřit ve tvaru (princip platí v kterékoliv fázi pohybu kontinua, tedy i na konci přírůstku zatížení)

$$\int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} d{}^0V = \delta {}^{t+\Delta t}W = \delta ({}^tW + \Delta W). \quad (24)$$

Chceme-li najít přibližné řešení této rovnice, musíme ji vhodně linearizovat, tj. musíme ji formulovat ve vhodném přírůstkovém (inkrementálním) tvaru. Pro veličiny kontinua v čase t a v čase $t + \Delta t$ kontinua můžeme psát:

- na počátku přírůstku zatížení $u_i, {}^t_0\epsilon_{ij}, {}^t_0S_{ij}$ (určují konfiguraci tC),
- na konci přírůstku zatížení $u_i + \Delta u_i, {}^{t+\Delta t}_0\epsilon_{ij}, {}^{t+\Delta t}_0S_{ij}$ (určují konfiguraci ${}^{t+\Delta t}C$).

Protože však Kirchhoffův tenzor napjatosti ${}^{t+\Delta t}_0S_{ij}$ a Greenův tenzor přetvoření ${}^{t+\Delta t}_0\epsilon_{ij}$ v konfiguraci ${}^{t+\Delta t}C$ neznáme, použijeme pro jejich vyjádření přírůstkovou dekompozici ve tvaru [3]

$${}^{t+\Delta t}_0S_{ij} = {}^t_0S_{ij} + \Delta_0^t S_{ij}; \quad {}^{t+\Delta t}_0\epsilon_{ij} = {}^t_0\epsilon_{ij} + \Delta_0^t \epsilon_{ij}; \quad \delta {}^{t+\Delta t}_0\epsilon_{ij} = \delta(\Delta_0^t \epsilon_{ij}) \quad (25)$$

a přírůstek Greenova tenzoru přetvoření vyjádříme ve tvaru (lineární a nelineární část [3], [5])

$$\Delta_0^t \epsilon_{ij} = (\Delta_0^t \epsilon_{ij})_L + (\Delta_0^t \epsilon_{ij})_{NL}. \quad (26)$$

Budeme-li dále přírůstek $\Delta_0^t S_{ij}$ Kirchhoffova tenzoru napjatosti aproximovat vztahem (${}^tE_{ijkl}$ je materiálový tenzor příslušný konfiguraci tC a vztažený na konfiguraci 0C)

$$\Delta_0^t S_{ij} = {}^tE_{ijkl} (\Delta_0^t \epsilon_{kl})_L \quad (27)$$

a zanedbáme-li u virtuální změny přírůstku Greenova tenzoru přetvoření jeho nelineární část, tj. platí

$$\delta(\Delta_0^t \epsilon_{ij}) = \delta(\Delta_0^t \epsilon_{ij})_L, \quad (28)$$

má základní rovnice (pohybová rovnice, resp. podmínka rovnováhy kontinua) přírůstkové TL formulace pro řešení nelineárních úloh mechaniky kontinua tvar

$$\begin{aligned} \int_{{}^0V} \delta(\Delta_0^t \epsilon_{ij})_L {}^tE_{ijkl} (\Delta_0^t \epsilon_{kl})_L d^0V + \int_{{}^0V} {}^tS_{ij} \delta(\Delta_0^t \epsilon_{ij})_{NL} d^0V - \delta(\Delta W) = \\ = \delta W - \int_{{}^0V} {}^tS_{ij} \delta(\Delta_0^t \epsilon_{ij})_L d^0V. \end{aligned} \quad (29)$$

Zde podotkneme, že pravá strana této rovnice vyjadřuje nerovnováhu vnějších a vnitřních sil kontinua v konfiguraci tC , která je důsledkem přijatých linearizací v průběhu řešení uvažované nelineární úlohy. Tuto nerovnováhu v rámci daného přírůstku zatížení odstraníme iteračním postupem. Z matematického pohledu tato rovnice představuje nelineární rovnici pro výpočet přírůstku Δu_i složek vektoru posunutí kontinua v konfiguraci tC .

Vhodný iterační proces pro zpřesnění řešení rovnovážné polohy kontinua při aplikaci TL formulace můžeme potom vyjádřit ve tvaru [3], [5]

$$\int_{{}^0V} \delta(\Delta_0^t \epsilon_{ij}^{(k)})_L {}^tE_{ijrs} (\Delta_0^t \epsilon_{rs}^{(k)})_L d^0V + \int_{{}^0V} {}^tS_{ij} \delta(\Delta_0^t \epsilon_{ij}^{(k)})_{NL} d^0V =$$

$$= \delta^{t+\Delta t} W - \int_{^0V} {}^{t+\Delta t} S_{ij}^{(k-1)} \delta \left(\Delta_0^t \varepsilon_{ij}^{(k-1)} \right) d^0V, \quad (30)$$

kde k je krok iterační metody a složky vektoru posunutí kontinua se mění podle předpisu

$${}^{t+\Delta t} u_i^{(k)} = {}^{t+\Delta t} u_i^{(k-1)} + \Delta u_i^{(k)}; \quad {}^{t+\Delta t} u_i^{(0)} = {}^t u_i, \quad (31)$$

resp. iterační proces pro výpočet nelineárních úloh mechaniky kontinua při přechodu z konfigurace tC do konfigurace ${}^{t+\Delta t}C$ je řízen vztahy (modifikovaná Newtonova-Raphsonova metoda, po provedení prostorové diskretizace problému)

$$[K_1 + K_2(q) + K_\sigma] \Delta q^{(k)} = {}^{t+\Delta t} Q - {}^{t+\Delta t} R^{(k-1)}; \quad (32)$$

$$K_t \Delta q^{(k)} = {}^{t+\Delta t} Q - {}^{t+\Delta t} R^{(k-1)}; \quad (33)$$

$${}^{t+\Delta t} q^{(k)} = {}^{t+\Delta t} q^{(k-1)} + \Delta q^{(k)}; \quad {}^{t+\Delta t} q^{(0)} = {}^t q; \quad {}^{t+\Delta t} R^{(0)} = {}^t R. \quad (34)$$

Zde K_t je matice tangenciální (tečnové) tuhosti, která sestává z lineární matice tuhosti K_1 , matice počáteční deformace $K_2(q)$ a matice počáteční napjatosti K_σ . Q je vektor zobecněných vnějších sil kontinua, R je vektor zobecněných vnitřních sil kontinua a q je vektor zobecněných posuvů uzlů konečných prvků kontinua. Tím je kompletně vyřešena nelineární úloha elastostatiky kontinua. Nutným předpokladem tohoto řešení je však znalost konstitutivního vztahu (27).

Pro vlastní řešení *dynamiky relativního pohybu močového měchýře* (v prostoru 2) potřebujeme do vztahů (30), resp. (32) zavést odpovídající dynamické účinky. Tyto účinky zavedeme do vektoru objemových sil vnějšího zatížení kontinua a pro jejich vyjádření použijeme základní rozklad obecného pohybu tělesa a D'Alembertův princip. Složky vektoru měrné objemové síly f_i^V v konfiguraci ${}^{t+\Delta t}C$ kontinua můžeme tudíž vyjádřit ve tvaru

$${}^{t+\Delta t} f_i^V = {}^{t+\Delta t} f_{irel}^V + {}^{t+\Delta t} f_{iu}^V, \quad (35)$$

kde pro relativní a unášivou složku této síly platí ($\rho_b = konst.$, měrná hmotnost tkáně stěny močového měchýře)

$${}^{t+\Delta t} f_{irel}^V = -\rho_b {}^{t+\Delta t} \ddot{q}_i; \quad {}^{t+\Delta t} f_{iu}^V = -\rho_b {}^{t+\Delta t} \ddot{\tilde{x}}_i. \quad (36)$$

Zohledníme-li tyto dva vztahy v podmínce rovnováhy kontinua (30), přejde rovnice (32), resp. (33), na tvar

$$M {}^{t+\Delta t} \ddot{q}^{(k)} + K_t \Delta q^{(k)} = {}^{t+\Delta t} Q - {}^{t+\Delta t} R^{(k-1)} - M {}^{t+\Delta t} \ddot{\tilde{x}}. \quad (37)$$

Pro další řešení potřebujeme ve vhodném tvaru vyjádřit vektor zrychlení ${}^{t+\Delta t} \ddot{q}^{(k)}$ posuvu uzlů konečných prvků jako funkci Δt , polohy ${}^t q$, rychlosti ${}^t \dot{q}$ a zrychlení ${}^t \ddot{q}$ v konfiguraci tC kontinua. Budeme-li skutečné zrychlení posuvu uzlů uvnitř časového kroku Δt aproximovat lineární funkcí, můžeme posunutí a rychlosti uzlů v čase $t + \Delta t$ vyjádřit ve tvaru

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{q} = {}^t\mathbf{q} + {}^t\dot{\mathbf{q}} \cdot \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{6} (2 {}^t\ddot{\mathbf{q}} + {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{q}}), \quad (38)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{q}} = {}^t\dot{\mathbf{q}} + \frac{\Delta t}{2} ({}^t\ddot{\mathbf{q}} + {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{q}}). \quad (39)$$

Pro hledaný vektor zrychlení ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{q}}^{(k)}$ potom ze vztahů (34) a (38) vyplývá

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{q}}^{(k-1)} = \frac{6}{(\Delta t)^2} [{}^{t+\Delta t}\mathbf{q}^{(k-1)} - {}^t\mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}^{(k)}] - \frac{6}{\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{q}} - 2 {}^t\ddot{\mathbf{q}}. \quad (40)$$

Dosazením tohoto vztahu do řídicí rovnice iteračního procesu (38) dostaneme výsledný tvar pohybové rovnice pružného kontinua (stěny močového měchýře) v přírůstkové formě v konfiguraci ${}^{t+\Delta t}C$ kontinua. Platí

$${}^t\widehat{\mathbf{K}} \Delta \mathbf{q}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(k-1)} - \mathbf{M} \left\{ \frac{6}{(\Delta t)^2} [{}^{t+\Delta t}\mathbf{q}^{(k-1)} - {}^t\mathbf{q}] - \frac{6}{\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{q}} - 2 {}^t\ddot{\mathbf{q}} + {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{x}} \right\}, \quad (41)$$

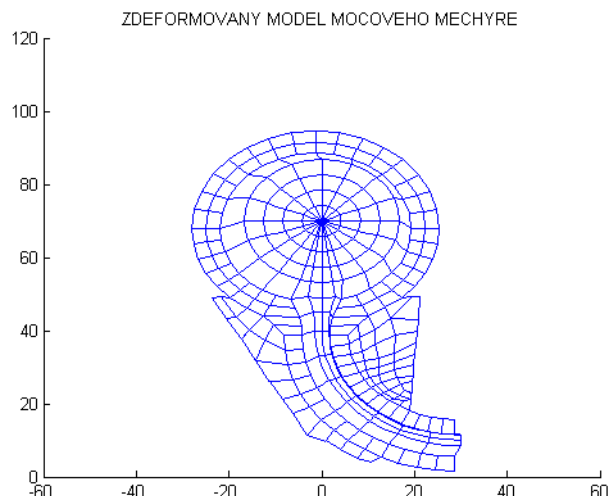
kde

$${}^t\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_t + \frac{6}{(\Delta t)^2} \mathbf{M}. \quad (42)$$

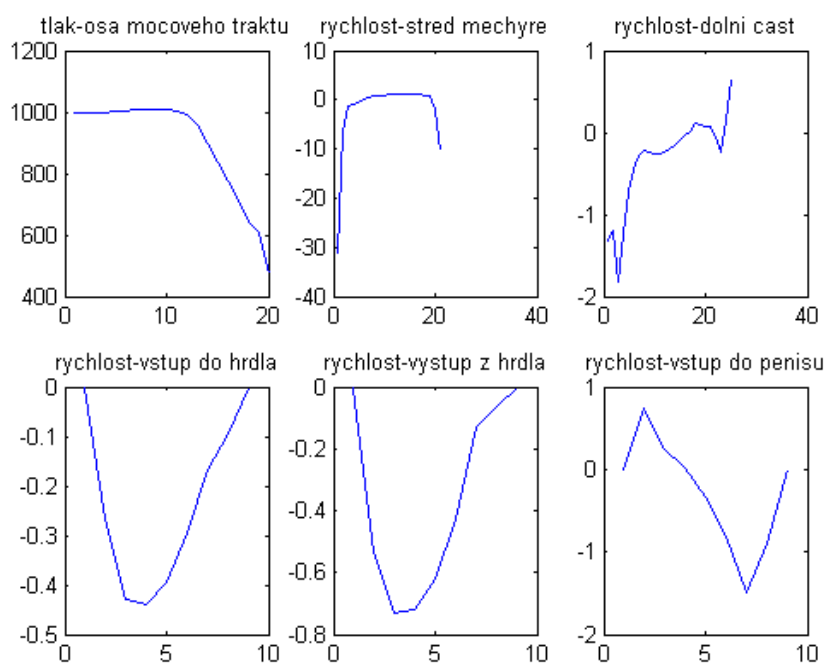
Vztah (41) představuje stejný typ rovnice jako nelineární vztah (32). Tudíž i rovnici (41) řešíme numericky pomocí modifikované Newtonovy-Raphsonovy metody. Tím je kompletně vyřešena dynamika relativního pohybu močového měchýře vůči jeho fundamentu (pohyb v prostoru 2 – obr. 1).

4. ŘEŠENÍ PROBLÉMU INTERAKCE

Vlastní problém interakce moče se stěnou močového měchýře řešíme v souladu s nesdruženou metodou. Měchýř nejdříve zdeformujeme staticky intravezikálním tlakem p_{det} (tvar měchýře před nárazem). Potom řešíme relativní pohyb moče při nárazu v tomto “tuhém” měchýři, a tím získáme rozložení tlaku ($p_{\text{det}} + p$) v měchýři. Tímto tlakem zatížíme měchýř a deformaci jeho stěny řešíme dynamicky přírůstkovou TL formulací. Tím se změní oblast pro proudění moče a předchozí výpočet proudění moče musí být opraven. Tento iterační proces opakujeme až do splnění předepsané podmínky přesnosti řešení. Stejný postup potom opakujeme na vhodně zvolených časových hladinách a uvnitř každé této hladiny aplikujeme výše uvedený iterační postup. Numerické výsledky pro rovinný problém interakce moče s měchýřem na vybrané časové hladině jsou demonstrovány na obr. 2 a na obr. 3.



Obr. 2. Tvar močového měchýře při nárazu



Obr. 3. Charakter proudění moče při nárazu

ZÁVĚR

Uvedená metoda řešení umožňuje získat na každé časové hladině rozložení tlaku a rychlosti v moči a odpovídající tvar močového měchýře při uvažovaném dynamickém ději. Výše uvedený iterační proces vhodně aplikujeme na vybraných časových hladinách řešeného modelového problému interakce.

Příspěvek je součástí řešení grantu GA ČR č. 106/00/1733 „Modelování tkání a orgánů pánevní oblasti se zaměřením na močové ústrojí“.

LITERATURA

1. Křen J. – Zát'ura F. – Rosenberg M.: Mathematical model of the male urethra. Proceedings of 3rd International Conference EAHE. Prague 1999.
2. Bathe K. J.: Finite-Elemente-Methoden (Deutsche Übersetzung von P. Zimmermann). Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag 1990.
3. Křen J.: MKP v nelineární mechanice kontinua I. Výzkumná zpráva č. 102-09-97. Plzeň, ZČU, FAV, Katedra mechaniky 1997.
4. Křen J.: Dynamics of the non-linear continuum. Zeszyty Naukowe, No. 11, Politechnika Slaska, Gliwice 1999.
5. Křen J. a kol.: Biomechanika dolní části močového traktu. Závěrečná zpráva grantového projektu GA ČR č. 106/97/0397. Plzeň, ZČU, FAV, Katedra mechaniky 1999.