



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

**ANALOGIE LOMOVÉHO CHOVÁNÍ TRHLIN
A OSTRÝCH VRUBŮ**

Jan Klusák, Zdeněk Knésl¹

Abstrakt:

V příspěvku jsou prezentovány výsledky lineární elastické lomové mechaniky V-vrubů. Jsou formulovány obecné podmínky stability V-vrubů a diskutována jejich použitelnost. V tomto přístupu je trhlina považována za speciální případ V-vrubu s nulovým úhlem otevření. Na základě získaných výsledků je provedeno srovnání lomového chování V-vrubů a trhlín. Odvozené postupy a získané výsledky mají obecnou platnost a lze je použít při studiu lomového chování obecných singulárních koncentrátorů napětí.

Klíčová slova:

Lomová mechanika, singulární koncentrátor napětí, trhlina, V-vrub, kritérium stability

1. Úvod

Klasická lomová mechanika je soustředěna na popis chování těles s trhlínami. V rámci lineární elastické lomové mechaniky (LELM), na kterou se v dalším omezíme, lze jako základní označit výsledek, podle něhož má rozložení napětí v okolí vrcholu trhlíny singulární charakter se singularitou typu $1/\sqrt{r}$ (r je vzdálenost od vrcholu trhlíny). Tato skutečnost byla demonstrována v pracích Williamse [1], [2], Inglise [3], Westergaarda [4], Sneddona [5] a dalších. Williams odvodil pomocí Airyho funkce napětí řešení pro rozložení napětí v okolí vrcholu obecného V-vrubu v rovinné desce a ukázal, že exponent singularity p závisí na úhlu otevření V-vrubu. Z tohoto hlediska lze V-vrub definovat jako obecný singulární koncentrátor napětí s exponentem singularity $0 < p \leq 1/2$. Trhlina je pak speciálním případem s exponentem singularity $p = 1/2$.

V dalším se omezíme pouze na rovinný případ V-vrubu za podmínek kombinovaného normálového a smykového namáhání. Poznamenejme, že některé aspekty a výsledky prostorového řešení jsou uvedeny např. v [6].

Na rozdíl od většiny prací zabývajících se lomovým chováním vrubů, kde je těžiště problematiky soustředěno na vliv tvaru vrcholu trhlíny (charakterizovaného poloměrem zaoblení vrcholu ρ), viz např. [7], je v tomto příspěvku studován vliv velikosti úhlu otevření V-vrubu.

V příspěvku je provedeno srovnání lomového chování trhlín a V-vrubů z hlediska lineární lomové mechaniky. Oba typy defektů jsou chápány jako singulární koncentrátoři napětí s exponentem singularity napětí ležícím v intervalu $(0, 1/2)$. V rámci

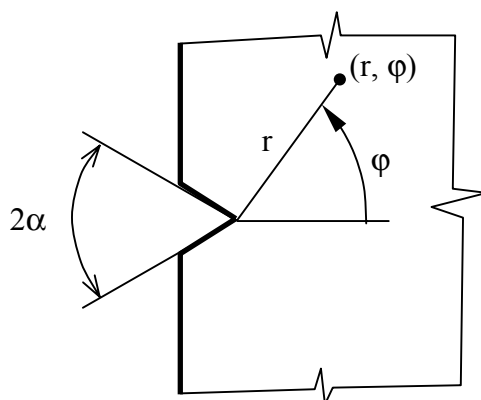
¹ Ing. Jan Klusák Ústav fyziky materiálů AVČR, Brno, klusak@ipm.cz

Prof. RNDr. Zdeněk Knésl CSc., Ústav fyziky materiálů AVČR, Brno, knesl@ipm.cz

předpokladů klasické teorie pružnosti je nejprve odvozeno rozdělení napětí v okolí kořene vrubu. Trhlina je popsána jako speciální případ tohoto řešení, tj. V-vrub s nulovým úhlem otevření. V dalším jsou formulovány základní předpoklady lineární lomové mechaniky V-vrubů, zejména pak kriteria stability, která umožňují rozhodnout, za jakých podmínek se bude z vrubu šířit trhlina. Presentované formulace kriterií stability jsou obecné a lze je snadno aplikovat i na jiné singulární koncentrátory napětí. Jednotný popis V-vrubů a trhlin umožňuje srovnání jejich lomové mechanických vlastností a to zejména s ohledem na velikost otevření vrubu.

2. Základní vztahy

V této kapitole jsou uvedeny základní vztahy umožňující výpočet napětí v okolí kořene vrubu v homogenním a isotropním tělese při normálovém a smykovém namáhání. Je naznačeno řešení pomocí Airyho funkce napětí, např.[1], [2] a jsou uvedeny pouze napěťové singulární členy. Označení a použitý souřadný systém je uveden na obr.1.



Obr.1: V-vrub s úhlem otevření 2α a příslušný polární souřadný systém

Řešení Airyho funkce napětí vychází z podmínky (1)

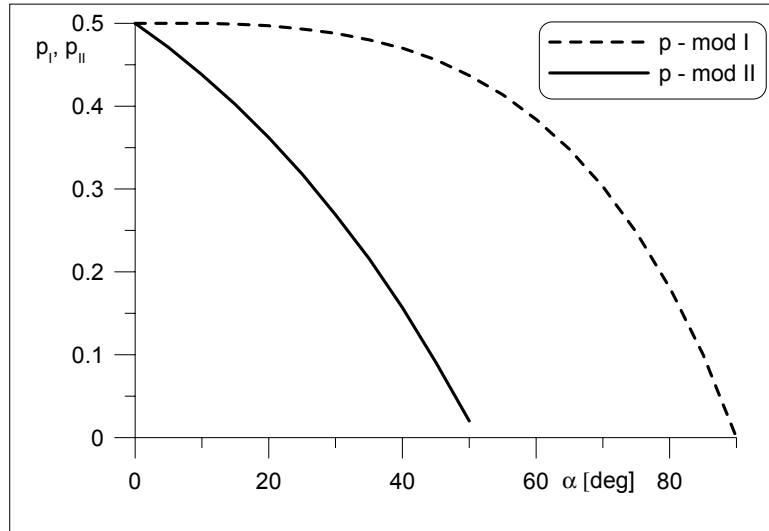
$$\Delta\Delta\Phi = 0 \quad (1)$$

a pro kombinaci normálového a smykového módu namáhání je předpokládáno ve tvaru (2) a (3).

$$\Phi_I(r, \varphi) = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} r^{2-p_I} f_I(\varphi) \quad (2)$$

$$\Phi_{II}(r, \varphi) = \frac{H_{II}}{\sqrt{2\pi}} r^{2-p_{II}} f_{II}(\varphi), \quad (3)$$

kde $p_I(\alpha)$ a $p_{II}(\alpha)$ jsou exponenty singularity napětí pro normálový a smykový mód namáhání. Jejich závislost na úhlu otevření vrubu je uvedena na obr.2.



Obr. 2: Exponent singularity napětí V-vrubu v závislosti na úhlu otevření α pro zatěžovací mód I a II

2.1 Rozdělení napětí v okolí vrcholu V-vrubu

Složky napětí (jejich singulární členy) lze pro zatěžovací mód I zapsat v následujícím tvaru

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^I &= \frac{H_I}{\sqrt{2\pi r}^{p_I}} \left((2 - p_I - p_I^2) \cos(p_I \varphi) - q_I (2 - 3p_I + p_I^2) \cos((2 - p_I) \varphi) \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi}^I &= \frac{H_I}{\sqrt{2\pi r}^{p_I}} \left((2 - 3p_I + p_I^2) \cos(p_I \varphi) + q_I (2 - 3p_I + p_I^2) \cos((2 - p_I) \varphi) \right), \\ \sigma_{r\varphi}^I &= \frac{H_I}{\sqrt{2\pi r}^{p_I}} \left(p_I (1 - p_I) \sin(p_I \varphi) + q_I (2 - 3p_I + p_I^2) \sin((2 - p_I) \varphi) \right), \\ \text{a } \sigma_{zz}^I &= \frac{-2\sqrt{2\nu}H_I}{\sqrt{\pi r}^{p_I}} \cos(p_I \varphi) (p_I - 1) \quad \text{pro rovinovou deformaci.}\end{aligned}\tag{4}$$

Analogicky, pro mód II

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{II} &= \frac{H_{II}}{\sqrt{2\pi r}^{p_{II}}} \left(-(2 - p_{II} - p_{II}^2) \sin(p_{II} \varphi) + q_{II} (2 - 3p_{II} + p_{II}^2) \sin((2 - p_{II}) \varphi) \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{II} &= \frac{H_{II}}{\sqrt{2\pi r}^{p_{II}}} \left(-(2 - 3p_{II} + p_{II}^2) \sin(p_{II} \varphi) - q_{II} (2 - 3p_{II} + p_{II}^2) \sin((2 - p_{II}) \varphi) \right), \\ \sigma_{r\varphi}^{II} &= \frac{H_{II}}{\sqrt{2\pi r}^{p_{II}}} \left(p_{II} (1 - p_{II}) \cos(p_{II} \varphi) + q_{II} (2 - 3p_{II} + p_{II}^2) \cos((2 - p_{II}) \varphi) \right), \\ \text{a } \sigma_{zz}^{II} &= \frac{2\sqrt{2\nu}H_{II}}{\sqrt{\pi r}^{p_{II}}} \sin(p_{II} \varphi) (p_{II} - 1) \quad \text{pro rovinovou deformaci.}\end{aligned}\tag{5}$$

Veličiny H_I , H_{II} jsou zobecněné (vrubové) faktory intenzity napětí a q_I , q_{II} jsou parametry závislé na úhlu otevření V-vrubu.

2.2 Srovnání pole napětí v okolí vrcholu V-vrubu a trhliny

V této části jsou formálně srovnány výrazy pro rozdělení napětí v okolí V-vrubu s úhlem otevření 2α a klasickou trhlinou. Přitom se omezíme na napěťové singulární členy a tedy vycházíme z rovnic (4) a (5). Vztahy pro rozdělení napětí v okolí vrcholu trhliny zde explicitně neuvádíme, lze je snadno získat dosazením hodnot (získaných pro nulový úhel otevření vrubu, tj. pro $2\alpha = 0$) $p_I = p_{II} = 1/2$ a $q_I = 1/3$, $q_{II} = 1,0$. Z tohoto formálního srovnání plynou následující závěry.

- Oba dva typy koncentrátorů jsou charakterizované singulárním rozdělení napětí v okolí svých vrcholů, tj. v obou případech platí $\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij} \rightarrow \infty$. V obou případech je v jednoparametrové reprezentaci pro popis napětí v okolí koncentrátoru postačující hodnota (zobecněného, vrubového) faktoru intenzity napětí H_I (resp. H_{II}), který je úměrný hodnotě koeficientu u singulárního členu.
- V obou případech normálového i smykového namáhání představuje trhlina nejnebezpečnější koncentrátor s exponentem singularity $1/2$. V případě V-vrubu klesá pro oba typy namáhání velikost exponentu singularity k nule. Pro normálové namáhání je $p_I = 0$ pro úhel otevření $2\alpha = \pi$, pro smykový mód pak pro $2\alpha \approx 0,61\pi$, viz Obr.2. Dále je pro V-vrub $p_I > p_{II}$, což ukazuje, že smykový mód namáhání je z hlediska lomové mechaniky méně nebezpečný než normálové namáhání.
- V případě trhliny je rozměr faktoru intenzity napětí $\text{MPa m}^{1/2}$ pro oba módy namáhání. V případě V-vrubu závisí rozměry zobecněného (vrubového) faktoru intenzity napětí na úhlu otevření. Pro oba módy namáhání jsou rozměry typu MPa.m^{p_I} resp. $\text{MPa.m}^{p_{II}}$. Tato skutečnost zneprůjemňuje případně znemožňuje přímé aplikace kritérií stability lineární elastické lomové mechaniky na V-vrubby.
- Analogicky jako pro napětí lze provést analýzu posunutí. Uveďme pouze, že na rozdíl od trhliny, kde jsou posunutí úměrná odmocnině vzdálenosti od vrcholu, tj. $u_i \sim \sqrt{r}$, bude v případě V-vrubu $u_i \sim r^{1-p_I}$ resp. $u_i \sim r^{1-p_{II}}$.

3. Formulace kritérií stability

Základním kritériem LELM umožňující rozhodnout, zda se za daných podmínek bude či nebude trhlina šířit je K_{IC} kritérium, které má pro normálový mód namáhání tvar

$$K_I(\sigma_{\text{appl}}, a) < K_{IC} \quad , \quad (6)$$

kde $K_I(\sigma_{\text{appl}}, a)$ je hodnota faktoru intenzity napětí odpovídající aplikovanému napětí σ_{appl} , pro trhlinu charakterizovanou veličinou a (obvykle délkou). K_{IC} je lomová houževnatost daného materiálu. Ekvivalentně lze toto kritérium formulovat pomocí hnací síly trhliny G v analogickém tvaru, případně lze použít pro formulaci kritéria stability jiné lomově mechanické veličiny (např. otevření trhliny, hustotu deformační energie). V rámci LELM trhlín dávají všechna tato kritéria v podstatě stejné výsledky.

V případě V-vrubu rozumíme pod pojmem kritéria stability podmínky, které nám dovolují stanovit, zda se z daného vrubu bude či nebude šířit trhlina. Přitom předpokládáme, že mechanismus porušování je v obou případech (tj. trhlina-trhlina a vrub-trhlina) stejný. Tento předpoklad je přijatelný: v obou případech se jedná o singulární koncentrátoři napětí a o šíření trhlín rozhodují spíše než lokální hodnoty napětí určené v jediném bodě střední hodnoty napětí stanovené před čelem koncentrátoru v určitém délkovém intervalu.

Jedním ze základních vztahů LELM je pak relace mezi hodnotou faktoru intenzity napětí K a velikostí hnací síly G , např. [8]. Lze ukázat, že pro trhlinu iniciující se z vrcholu trhliny je hodnota hnací síly $G = 0$. Tento výsledek platí obecně pro libovolný singulární koncentrátor napětí s exponentem singularity p v intervalu $0 < p < \frac{1}{2}$. Poznamenejme, že pro koncentrátory napětí pro které je $\frac{1}{2} < p < 1$ (např. bimateriálový V-vrub) bude $G \rightarrow \infty$.

Přímé zobecnění kritérií LELM trhlín na V-vrubu tedy není možné. Jednak rozměry zobecněných faktorů intenzity napětí závisí na úhlu otevření a jsou odlišné od rozměru lomové houževnatosti K_{IC} a jednak nelze zobecnit pojem hnací síly trhliny na V-vrubu.

Postup, který je použit pro formulaci kritéria stability v tomto případě [11] vychází ze srovnání lomově-mechanických veličin L , které mají jasný fyzikální význam (např. velikost plastické zóny, otevření trhliny, hustota deformační energie, střední hodnota napětí apod.) a jsou jednoznačně určeny hodnotou faktoru intenzity napětí K (v případě trhliny) na jedné straně a velikostí zobecněného faktoru intenzity napětí H (v případě V-vrubu) na straně druhé (pro jednoduchost vynecháváme indexy označující mód namáhání). Kritická hodnota této veličiny, L_C , v případě trhliny odpovídá případu $K = K_C$. Vzhledem k předpokladu o stejném mechanismu porušení můžeme očekávat, že kritické hodnoty veličiny L_C budou stejné v obou případech (trhlina, V-vrub), tj.

$$L_C(\dots K_C, r, \theta, E, \nu, \dots) = L_C(\dots H_C, r, \theta, E, \nu, \alpha, \dots) \quad (7)$$

a tato podmínka nám umožní definovat kritickou hodnotu zobecněného faktoru intenzity napětí H_C , kterou můžeme nazývat zobecněnou (vrubovou) lomovou houževnatostí.

Kritérium stability V-vrubu (8) má pak tvar analogický podmínce (6)

$$H(\sigma_{appl}, \alpha) < H_C(K_C) \quad (8)$$

a umožňuje stanovit kritickou hodnotu aplikovaného napětí pro daný případ a danou velikost úhlu otevření V-vrubu. Podstatným rysem tohoto postupu je, že zobecněná (vrubová) lomová houževnatost H_C je pro dané podmínky určena velikostí lomové houževnatosti určené pro trhlinu. Aplikace těchto kritérií tedy nevyžaduje nová měření kritických veličin a umožňuje využít rozsáhlých již existujících výsledků. Na druhé straně tato kritéria obsahují další volitelný parametr, jehož hodnotu je nutno stanovit na základě podrobnější analýzy mechanismu porušení. Tato nevýhoda je na druhou stranu kompenzována možností zahrnout do kritéria parametry popisující mikrostrukturu materiálu případně jiné veličiny odpovídající mechanismu porušení.

Volba veličiny L závisí na typu porušení. Např. v [10] je jako L použita střední hodnota napětí před vrcholem koncentrátoru. Tento postup je vhodný v případě štěpného porušení a umožňuje zahrnout do kritéria např. velikost zrna materiálu. V případě, že se zajímáme o iniciaci únavové trhliny ve vrcholu trhliny (v rámci vysokocyklové únavy) je vhodné jako veličinu L použít některý parametr charakterizující plastickou zónu a tak uvážit při výpočtu plastické vlastnosti materiálu [11]. V případě kombinovaného namáhání je vhodné použít jako veličinu L hustotu deformační energie zavedenou Sihem [12] pro popis chování trhliny. Tento postup pak umožňuje určit i směr šíření iniciované trhliny z vrcholu V-vrubu [9].

Poznamenejme, že pro případ nulového otevření vrubu přejdou tato kritéria v běžná kritéria stability LELM trhlín. Tato kritéria vytvářejí tedy se vztahy pro rozložení napětí v okolí vrcholu V-vrubu (4) a (5) jednotný lomově mechanický popis V-vrubů a trhlín v rámci lineární elastické lomové mechaniky.

Všechna takto formulovaná kritéria vyžadují znalost hodnot zobecněného faktoru intenzity napětí H_I a H_{II} . Hodnoty faktorů intenzity napětí K_I a K_{II} jsou většinou známé a postupy vedoucí k jejich výpočtům jsou dostatečně vypracovány [13], v případě veličin H_I a H_{II} může být tento výpočet problematický. V práci [14] je použita pro výpočet přímá metoda ve spojení s metodou konečných prvků.

4. Závěr

V příspěvku byla formulována lineární elastická lomová mechanika V-vrubů. Speciálním případem tohoto přístupu jsou trhliny, které jsou definovány jako V-vruby s nulovým úhlem otevření.

Ze skutečnosti, že pro nenulový úhel otevření V-vrubu se mění hodnota exponentu singularity napětí plyne, že ani pro vruby s velmi malým úhlem otevření teoreticky nelze použít postupů klasické lineární lomové mechaniky trhlín. Na druhé straně však, z praktického hlediska a s uvažováním rozptylu v experimentálně stanovených hodnotách lomové houževnatosti, pro úhly otevření vrubu menší než zhruba 45° je hodnota exponentu singularity pro normálový mód namáhání prakticky rovna $\frac{1}{2}$ (viz obr.2) a lze tedy s určitou mírou nepřesnosti takové V-vruby popisovat a chápat jako klasické trhliny. Tento předpoklad neplatí pro smykové namáhání (viz obr.2), kde je pokles exponentu singularity zřejmý již pro V-vruby s malým úhlem otevření. Navíc i v případě smykového namáhání existují vruby s úhlem otevření větším než 110° (obr.2), které nemají singulární charakter.

Fyzikálně je rozdíl mezi lomovým chováním V-vrubu a trhliny je způsoben skutečností, že v případě V-vrubu, ze kterého se začne šířit trhlina se jedná o dva geometricky neidentické koncentrátoři (vrub-trhlina), zatímco v případě kritéria popisující šíření trhliny se jedná o koncentrátoři identické (trhlina-trhlina). Matematickým důsledkem tohoto faktu je skutečnost, že hnací síla trhliny $G = 0$ pro případ, kdy je exponent singularity p v intervale $0 < p < 1/2$ (a $G \rightarrow \infty$ v případě $1/2 < p < 1$).

Uvedené postupy a závěry mají obecný charakter a jejich platnost není omezena na V-vruby. Za předpokladu, že se jedná o stejný mechanismus porušování lze uvedené výsledky aplikovat na libovolné singulární koncentrátoři napětí, tj. pro koncentrátoři, jejichž exponent singularity je v rozsahu $0 < p < 1$.

Poděkování: příspěvek byl vypracován s finanční podporou grantu GA ČR 106/01/0381 a S 2041001.

5. Literatura

- [1] WILLIAMS, M. L.: Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extensions. Journal of Applied Mechanics, 1952, 74, 523 – 528.
- [2] WILLIAMS, M. L.: On the stress distribution at the base of a stationary crack, Journal of Applied Mechanics, 1957, 24, p. 109.
- [3] INGLIS, C. E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners, Paper read at the Spring Meeting of the Fifty-fourth Session of the Institution of Naval Architects, March 14, 1913; Trans. Inst. Naval Architects, London LV, 219 – 230.
- [4] WESTERGAARD, H. M.: Bearing Pressures and Cracks, Journal of Applied Mechanics, 1939, 6, 49 – 53.

- [5] SNEDDON, I. N.: The Distribution of Stress in the Neighbourhood of a Crack in an Elastic Solid. Proceedings, Royal Society of London, 1946, Vol. A – 187, 229 – 260.
- [6] ZHENHUAN, L., WANLIN, G., ZHENBANG, K.: Three-dimensional elastic stress fields near notches in finite thickness plates, International Journal of Solids and Structures, 2000, 37 (15), 7617 – 7632.
- [7] WILSON, C. D., LANDES, J. D.: Fracture Toughness testing with Notched Round Bars, Fatigue and Fracture Mechanics:30th Volume, Kenneth L. Jerina, Paul C. Paris, STP 1360, 2000, Baltimore, 69
- [8] ANDERSON, T. L. Fracture Mechanics fundamentals and Applications, Second Edition, 1995, CRC Press
- [9] KNĚSL, Z. The application of the strain energy density concept to the determination of crack propagation direction initiated at a sharp notch tip. Acta Technica ČSAV, 1993, 38, 221 – 234
- [10] KNĚSL, Z.: A criterion of V-notch stability. International Journal of Fracture, 1991, 48: (4) R79 – R83.
- [11] KLUSÁK, J. Studium velikosti plastickej zóny u kořene V-vrubu, In Sborník konference Aplikovaná mechanika 2000, Liberec, 3 – 6 duben 2000, 167 – 172.
- [12] SIH, GC. - Ho, JW.: Sharp notch fracture strength characterized by critical energy density. In Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1991, 16: (3) 179 – 214.
- [13] OWEN, D. R. J, FAWKES, A. J.: Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications. Pineridge Press Ltd., Swansea 1983
- [14] Klusák, J. – Kněsl, Z. Evaluation of the threshold values for fatigue crack propagation starting at the V-notch. In [CD-ROM] Proceedings of the abstracts VIIIth International conference Numerical Methods in Continuum Mechanics. Kompiš, V. – Žmindák, M. – Maunder, E. A. W. Liptovský Ján, Slovak Republic. September 2000. pdf/014.

Comparison of fracture behaviour of notches and cracks

The theoretical background of linear elastic fracture mechanics of V-notches is presented. A crack is considered as a special case of the V-notch with zero open angle. Conditions for stability of a general singular stress concentrator are formulated. Based on results obtained a fracture behaviour of notches and cracks is compared.