



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

**VLIV T-NAPĚTÍ NA PŘEPOČTOVÉ VZTAHY PRO
OTEVŘENÍ V KOŘENÍ TRHLINY A J INTEGRÁLU**

Pavel HUTAŘ ¹ Zdeněk KNĚSL ²

Abstract: *Relations between crack opening displacement (CTOD) and other fracture mechanics parameters are of a great importance in fracture mechanics. The basic aim of this paper is to describe an influence of T-stress on the plastic eta factors, plastic rotation factor and proportional factor, i.e. the factors correlating J-integral and CTOD. Specimens with different values of T-stress (compact tension, three point bend and single edge cracked tension) are analysed by finite element method, the factors are calculated as functions of corresponding crack length and results obtained are discussed from the point of view of two-parameter fracture mechanics.*

Klíčová slova: *Lomová mechanika, Jintegrál, CTOD, proporční faktor, rotační faktor, koeficienty plasticity*

Úvod

Otevření trhliny (COD - crack opening displacement) je jednou z často používaných veličin pro hodnocení predikce chování tělesa s trhlinou zejména v rámci elasticko-plastické lomové mechaniky. Na jejím základě lze pak odvodit lomově-mechanickou veličinu otevření v kořeni trhliny (CTOD - crack tip opening displacement) a za předpokladu, že kritická hodnota této veličiny, $CTOD_C$, je materiálová konstanta má pak odpovídající lomové kritérium tvar $CTOD < CTOD_C$. Na rozdíl od jiných lomově-mechanických veličin používaných pro formulace kritérií stability trhliny (faktor intenzity napětí K, J-integrál) má veličina COD, případně CTOD (bez ohledu na použitou definici), jasný a názorný fyzikální význam a jednotky. Významnou skutečností je možnost přímého a jednoduchého měření otevření trhliny (např. na povrchu tělesa). Rovněž z výpočtového hlediska je stanovení otevření trhliny poměrně jednoduchou záležitostí. Tyto skutečnosti vedly ke snaze o nalezení

¹Ing. Pavel HUTAŘ,

Ústav fyziky materiálů, Akademie věd České republiky, Žitkova 22, 616 63 Brno a
Ústav mechaniky těles, Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno
(tel.: 05/ 4163 6362, e-mail:hutar@ipm.cz)

²Prof. RNDr. Zdeněk KNĚSL, CSc,

Ústav fyziky materiálů, Akademie věd České republiky, Žitkova 22, 616 63 Brno
(tel.: 05/ 4163 6358, e-mail:knesl@ipm.cz)

relací mezi otevřením trhliny a jinými lomově-mechanickými veličinami, zejména pak mezi CTOD a J integrálem.

V příspěvku jsou tyto vztahy diskutovány z hlediska lineární elastické dvouparametrové lomové mechaniky a v jejím rámci jsou nalezeny relace mezi přímo měřitelnými veličinami jako je otevření trhliny na povrchu vzorku (CMOD-crack mouth opening displacement) nebo posuv pod zatížením (LLD-load line displacement) a hodnotou J-integrálu a CTOD. Zvláštní pozornost je věnována relaci mezi otevřením v kořeni trhliny a J-integrálem vyjádřená pomocí proporčního faktoru m . Dále jsou stanoveny velikosti koeficientů plasticity η_{C-L} , η_{C-C} , η_{δ} , η_{pl} , η_{J-C} a rotačního faktoru r_p jako funkce T-napětí. Určení těchto součinitelů je poměrně náročné a jejich aplikace může být sporná, protože nabývají různých hodnot pro různé zkušební vzorky. Je ukázáno, že tyto veličiny nejsou konstantní ani pro jednotlivé vzorky, ale jsou závislé na délce trhliny popř. koeficientu zpevnění daného materiálu.

Výpočty jsou provedeny pomocí metody konečných prvků a jsou určeny velikosti koeficientů plasticity, rotačního a proporčního faktoru pro tříbodový ohyb, na vzorku s boční trhlinou a CT vzorku pro různé délky trhliny. Je diskutována závislost těchto součinitelů na velikosti T napětí.

Teoretický základ

Pokud vycházíme z teorie lineární pružnosti, lze odvodit analytický vztah popisující profil trhliny. Z Williamsova rozvoje [7] plyne následující vztah, který pro zatěžující mod I určuje velikost posuvů:

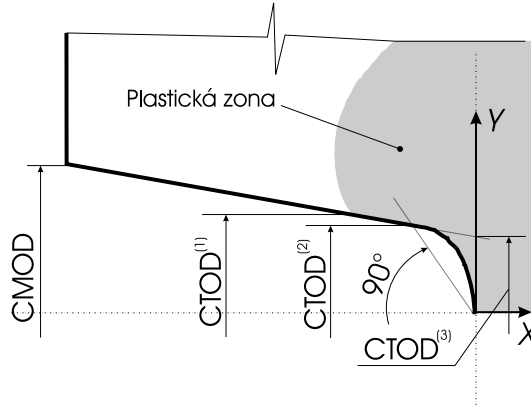
$$u_i = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{r} g_i^{(1)}(\theta) + T r g_i^{(2)}(\theta) + \dots, \quad (1)$$

kde K_I je faktor intenzity napětí, T-napětí popisuje velikost constraintu a $g_i^{(n)}$ jsou známé funkce úhlu θ . V blízkém okolí kořene trhliny je potom otevření trhliny rovno:

$$COD = 2v(\theta = \pi) = \frac{2K_I}{\mu\sqrt{8\pi}} \sqrt{r}(\kappa + 1) \quad (2)$$

kde κ je pro rovinnou deformaci $\kappa = 3 - 4\nu$. Z rovnice (2) je zřejmé že profil trhliny je nezávislý na T-napětí a neměl by být ovlivněn geometrií tělesa. Na druhé straně T-napětí ovlivňuje velikost plastické zóny a ta může zprostředkovaně ovlivnit velikost otevření trhliny.

Nejpoužívanější charakteristikou profilu trhliny je CTOD "crack tip opening displacement", která charakterizuje otevření v kořeni trhliny. Existují různé přístupy k tomu jak otevření v kořeni trhliny definovat jak je vidět na obrázku (1). CTOD⁽¹⁾ je otevření trhliny definované na hranici plastické zóny, CTOD⁽²⁾ je otevření definované přímkou vycházející z kořene trhliny pod úhlem 45° a CTOD⁽³⁾ je definováno jako extrapolace lineární části profilu trhliny do jejího kořene. S výhodou lze použít všechny definice otevření v kořeni trhliny, ale je třeba ve všech případech používat stejnou, protože porovnání hodnot otevření určených pomocí různých definic je obtížné. Dále v textu je všude použita definice otevření na hranici plastické zóny CTOD⁽¹⁾ a bude označována pouze CTOD. Tato hodnota je navíc svázána z velikostí plastické zóny a má proto určitý fyzikální význam. Určovat otevření pomocí druhé definice (CTOD⁽²⁾) je pro daný výpočtový model nevhodné, protože nelze najít průsečík mezi



Obr. 1: Charakteristiky profilu trhliny

profiem trhliny a přímkami pod 45°. $CTOD^{(3)}$ je omezeno jen na určité geometrie např. vzorek s centrální trhlinou lineární část profilu trhliny nemá.

CMOD "crack mouth opening displacement" je otevření na povrchu tělesa to se využívá zejména v experimentální praxi, protože je snadno měřitelné. Z této hodnoty se určuje přepočtem velikost CTOD nebo J integrálu. Mezi otevřením na povrchu a CTOD a J existují přepočtové vztahy, které jsou uvedeny v [5],[6],[3],[4]. Pro otevření v kořeni trhliny vypadají tyto vztahy takto:

$$CTOD = \frac{K^2(1 - \nu^2)}{mE\sigma_0} + \frac{\eta_{C-L}}{Bb\sigma_0} * A_{pl/LLD} \quad (3)$$

$$CTOD = \frac{K^2(1 - \nu^2)}{mE\sigma_0} + \frac{\eta_{C-C}}{Bb\sigma_0} * A_{pl/CMOD} \quad (4)$$

$$CTOD = \frac{K^2(1 - \nu^2)}{mE\sigma_0} + \eta_\delta * CMOD_{pl} \quad (5)$$

kde

$$\eta_\delta = \frac{r_{pl}b}{r_{pl}b + a} \quad (6)$$

Pro J integrál takto:

$$J = \frac{K^2(1 - \nu^2)}{E} + \frac{\eta_{J-C}}{Bb} * A_{pl/CMOD} \quad (7)$$

$$J = \frac{K^2(1 - \nu^2)}{E} + \frac{\eta_{pl}}{Bb} * A_{pl/LLD} \quad (8)$$

kde je:

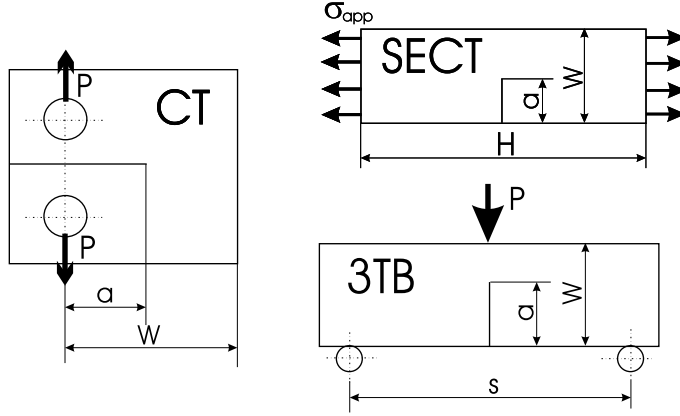
K	faktor intenzity napětí	ν	Poissonovo číslo
m	proporční faktor	E	Yangův modul
σ_0	mez kluzu	B	tloušťka
a	délka trhliny	b	velikost ligamentu
B	tloušťka	$A_{pl/LLD}$	plocha pod křivkou zatížení a LLD_{pl}
r_{pl}	rotační faktor	$CMOD_{pl}$	plastická část CMOD
$A_{pl/CMOD}$	plocha pod křivkou zatížení a $CMOD_{pl}$		
η_{C-L}	eta faktor vycházející ze vztahu $CTOD_{pl} - A_{pl/LLD}$		
η_{L-L}	eta faktor vycházející ze vztahu $CTOD_{pl} - A_{pl/CMOD}$		
η_δ	eta faktor vycházející ze vztahu $CTOD_{pl} - CMOD_{pl}$		
LLD_{pl}	plastická část posuvu pod zatížením		
η_{J-C}	eta faktor vycházející ze vztahu $J_{pl} - A_{pl/CMOD}$		
η_{pl}	eta faktor vycházející ze vztahu $J_{pl} - A_{pl/LLD}$		

Mezi J-integrálem a *CTOD* se obvykle užívá relace:

$$CTOD = \frac{J}{m\sigma_0} \quad (9)$$

Výpočtový model

Numerické výpočty byly provedeny pomocí systému konečných prvků Ansys. Modelovány byly vzorky typu CT-vzorku, vzorku pro tříbodový ohyb a vzorku s boční trhlinou. Jejich základní rozměry je vidět na obrázku (2). Všechny vzorky mají



Obr. 2: Analyzované vzorky

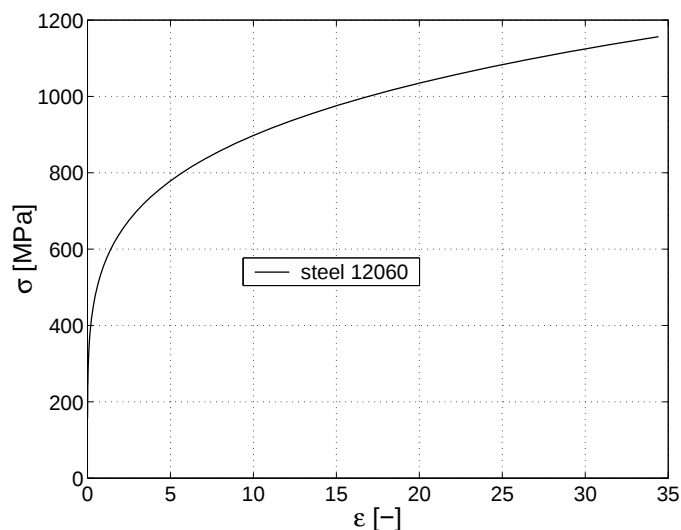
poměr $a/W = 0,3 - 0,7$ kde a je délka trhliny a W je šířka vzorku. Protože jsou všechny vzorky symetrické je modelována pouze jejich polovina. Předpokládáme podmínku rovinné deformace. Síť konečných prvků je tvořena izoparametrickými čtyřúhelníky, které se zhušťují směrem ke kořeni trhliny. Pro porovnání byly výpočty provedeny také metodou modifikované okrajové vrstvy MBLM, která má tvar půlkruhu a je zatížena posuvy danými vztahy:

$$\begin{aligned} u &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right) + \frac{Tr}{8\mu} (\kappa + 1) \cos \theta \\ v &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\left(\kappa + \frac{1}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{2} \sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right) + \frac{Tr}{8\mu} (\kappa - 3) \sin \theta \end{aligned} \quad (10)$$

kde K_I je faktor intenzity napětí, T-napětí charakterizuje constraint, $\kappa = 3 - 4\nu$ pro podmínku rovinné deformace a μ je modul pružnosti ve smyku. Pro elasto-plastickou analýzu byly zvoleny materiálové charakteristiky oceli 12 060, jejíž cyklickou křivku $\sigma - \epsilon$ můžeme vidět v grafu (3). Tento materiál je charakterizován cyklickou mezí kluzu $\sigma_0 = 202$ MPa a koeficientem zpevnění $n = 0.12$. Výše uvedená křivka je získána pomocí Rambergova-Osgoodova vztahu:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_o} = \frac{\sigma}{\sigma_o} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^n, \quad (11)$$

kde σ_o, ϵ_o je napětí a přetvoření na mezi kluzu a α je bezrozměrná materiálová konstanta.

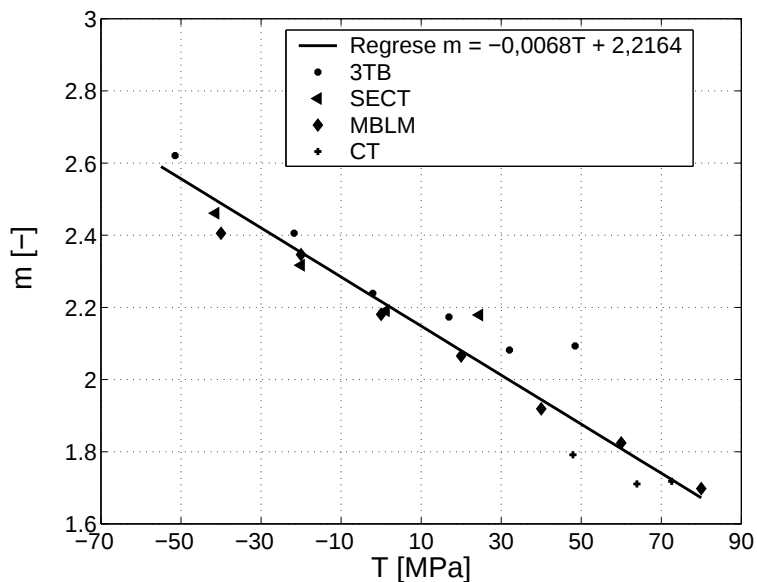


Obr. 3: Materiálová křivka pro ocel 12 060

Výsledky

Na základě elastoplastických výpočtů, které jsou koncipovány tak, aby zatížení ve všech případech odpovídalo stejné hodnotě elastického faktoru intenzity napětí $K_I = 25Nm^{1/2}$, bylo určeno rozdělení napětí u výše uvedených vzorků. Z něj pak byly stanoveny uvažované veličiny. Tyto hodnoty se pak zpětně dosadily do přepočtových vztahů uvedených v druhé kapitole, a sledovala se závislost jednotlivých součinitelů na velikosti T napětí produkovaným různou geometrií vzorků a délkou trhliny.

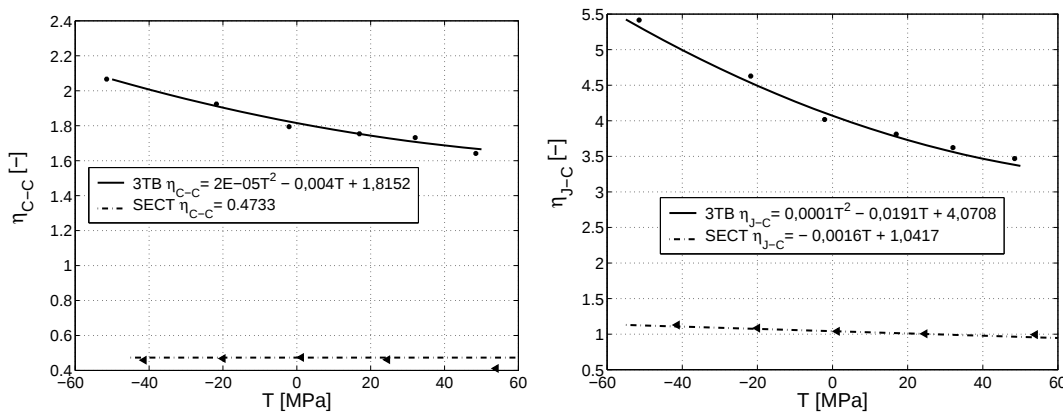
Na obrázku(4) je vidět závislost proporčního součinitele m na T -napětí.



Obr. 4: Závislost proporčního součinitele na T -napětí

m je definováno vztahem (9) jako poměr mezi hodnotou J integrálu a CTOD. Obě tyto veličiny se vztahují k oblasti v okolí kořene trhliny, kterou lze v rámci dvouparametrové lomové mechaniky popsat pomocí prvních dvou členů Williamsova

rozvoje. Hodnota m také vystupuje v elastické části vztahů (3),(4),(5). Jak je vidět na obrázku závislost mezi m a T lze kvalifikovat jako lineární a nahradit přímkou určenou pomocí rovnice uvedené v grafu. Z grafu rovněž plyne že nejpřesněji se přímce blíží body stanovené pomocí metody modifikované okrajové vrstvy. To způsobeno tím, že model odpovídá nekonečnému tělesu a jsou tedy vyloučeny jiné vlivy než vliv T napětí. Naopak nejvíce se odchyľují hodnoty m pro velké poměry a/W pro tělesa pro tříbodový ohyb a pro vzorek s boční trhlinou, protože plastická zóna v kořeni trhliny je ovlivněna plastickou zónou vznikající na povrchu vzorku pod zatížením. V experimentální praxi se takové poměry a/W běžně nepoužívají. Lze tedy říci, že tato lineární závislost by měla platit obecně pro jakékoli těleso s trhlinou. V tomto případě to je demonstrováno na třech vzorcích z různou geometrií, tj. různou velikostí T .

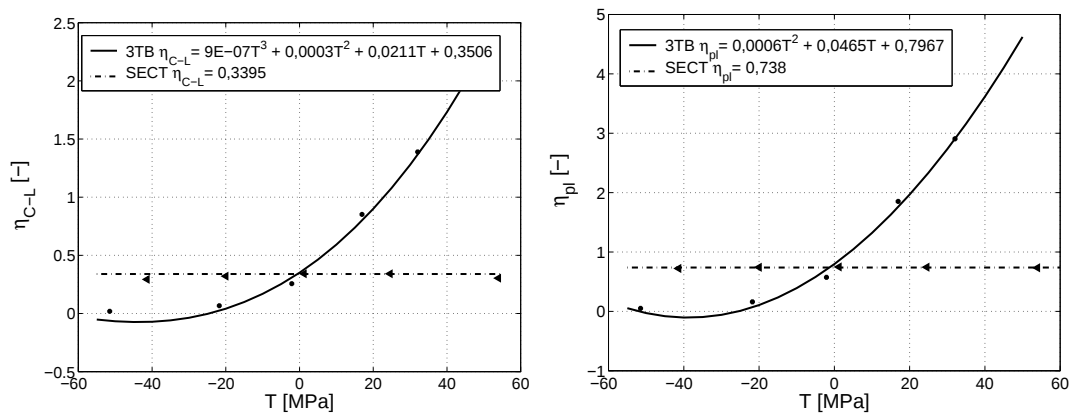


Obr. 5: Závislost koeficientů plasticity η_{C-C} a η_{J-C} na T napětí

Koeficient η_{C-C} je definován jako poměr mezi plastickou částí otevření v kořeni trhliny a plastickou částí plochy pod křivkou danou závislostí zatížení - otevření na povrchu CMOD. Z levého grafu obr.(5) je patrné, že u vzorku pro tříbodový ohyb s rostoucí velikostí T napětí klesá velikost η_{C-C} . Pro vzorek s boční trhlinou lze považovat velikost η_{C-C} za konstantní a tedy invariantní k délce trhliny resp. T napětí. Obě křivky jsou od sebe hodně liší a je zřejmé, že na tento koeficient působí mnoho dalších vlivů a to významněji než velikost T -napětí. Je to způsobeno tím, že ve vztahu (4) vystupuje CMOD což je veličina, která je příliš daleko od kořene trhliny a nelze ji tedy popsat pouze prvními dvěma členy Williamsova rozvoje. Proto je třeba nadále určovat velikost tohoto koeficientu plasticity pro každý případ zvlášť.

Koeficient η_{J-C} je definován podle vztahu (7) jako poměr mezi plastickou částí J integrálu a plastickou částí plochy pod křivkou danou závislostí zatížení - otevření na povrchu CMOD. Opět je vidět pokles η_{J-C} s vlivem T -napětí pro vzorek pro tříbodový ohyb. Slabý pokles vykazuje i hodnota η_{J-C} pro vzorek s boční trhlinou. Stejně jako u η_{C-C} i u η_{J-C} se křivky závislosti na T -napětí značně liší. Ukazuje se tedy že vliv T -napětí nehraje v rozdílnosti hodnot těchto koeficientů pro různou geometrii vzorků významější roli.

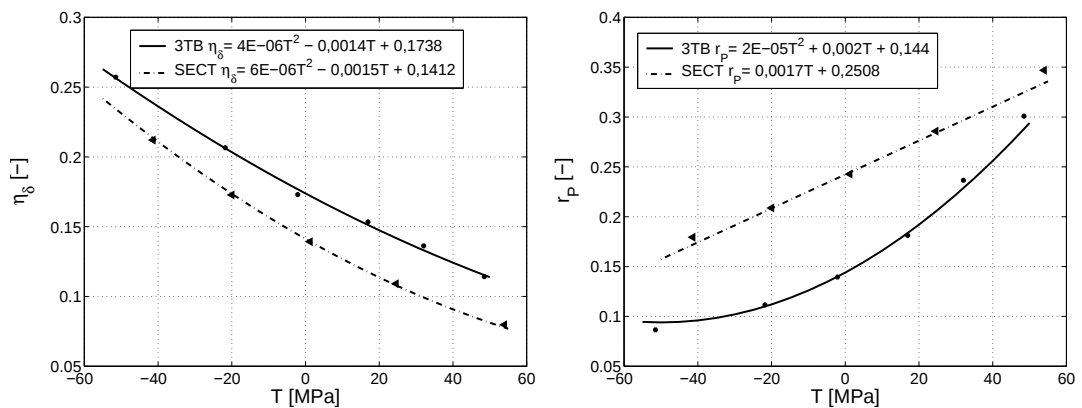
Další sledovanou hodnotou byla velikost koeficientu η_{C-L} , který je definován podle vztahu (3) jako poměr mezi plastickou částí otevření v kořeni trhliny a plastickou částí plochy pod křivkou danou závislostí zatížení - posuv pod zatížením LLD. Závislost na T -napětí je vidět na levém grafu obr.(6). U vzorku pro tříbodový ohyb je tato závislost silně rostoucí, což může být způsobeno plastickou zónou v oblasti



Obr. 6: Závislost koeficientů plasticity η_{C-L} a η_{pl} na T napětí

působení vnějšího zatížení, zřejmě by pro určení posunutí bylo vhodnější jiné místo v elastické oblasti. Např. v [3] se doporučuje vzdálenost 0,6 x velikost ligamentu od čela trhliny. Nicméně závislosti tohoto koeficientu pro 3TB a SECT vzorky si neodpovídají. Zajímavé je, že pro vzorek s boční trhlinou je η_{C-L} konstantní pro různé délky trhliny.

Na pravém grafu obr.(6) je vidět stejná závislost pro η_{pl} . Je v podstatě shodná se závislostí pro η_{C-L} , pouze se liší velikostí hodnot součinitelů. η_{pl} je definováno vztahem (8) jako poměr mezi velikostí plastické části J integrálu a plastickou částí plochy pod křivkou danou závislostí zatížení - posuv pod zatížením. Příčiny takového chování jsou stejné jako u závislosti pro η_{C-L} .



Obr. 7: Závislost η_{δ} a r_p na T napětí

Poslední sledovanou charakteristikou je velikost rotačního faktoru r_p . Ten se určí z velikosti plastického koeficientu η_{δ} za použití geometrických charakteristik vzorku podle vztahu (6). Samotná velikost η_{δ} je dána poměrem plastické části otevření v kořeni trhliny a plastickou částí CMOD. Na pravém grafu obr.(7) je vidět, že jak pro vzorek s boční trhlinou tak pro vzorek 3TB s rostoucí hodnotou T -napětí roste také hodnota rotačního faktoru. Křivky obou závislostí se ale natolik liší, že ani v tomto případě není vliv T - napětí rozhodující.

Na všech grafech jsou uvedeny aproximace pomocí polynomů, které lze použít pro predikci koeficientů plasticity popř. rotačního faktoru pro daný materiál. Tyto závislosti nelze zobecnit. Jak uvádí např.[3] většina koeficientů závisí také na velikosti materiálových charakteristik.

Závěr

Pro materiál ocel 12060 byla provedena elasto-plastická analýza napětí a deformace pomocí metody konečných prvků na modelech vzorků používaných v experimentální praxi. Byly to CT-vzorek, vzorek pro tříbodový ohyb a vzorek s boční trhlinou. Zatížení bylo voleno tak, aby odpovídalo ve všech případech stejné velikosti elastického faktoru intenzity napětí $K_I = 25 \text{ MPa m}^{1/2}$. Pomocí této analýzy v rámci lineárně elastické lomové mechaniky byly stanoveny velikosti koeficientů v přepočtových vztazích mezi charakteristikami trhlín měřenými v experimentální praxi a lomovými charakteristikami jako je otevření v kořeni trhliny a J integrál.

Výsledky ukázaly, že pro koeficienty plasticity korelující plastickou část J integrálu nebo otevření v kořeni trhliny s plastickou částí plochy pod křivkou danou závislostí zatížení - posuv pod zatížením LLD nebo otevření trhliny na povrchu CMOD, neplatí žádná obecná závislost na T -napětí. To je způsobeno experimentálně měřenými charakteristikami CMOD, LLD, které jsou příliš daleko od kořene trhliny a nelze na ně aplikovat popis pomocí prvních dvou členů Williamsova rozvoje. Je však vidět, že zatímco u vzorku pro tříbodový ohyb je závislost všech koeficientů plasticity na velikosti trhliny resp. na T -napětí poměrně velká, u vzorku s boční trhlinou jsou tyto koeficienty kromě (η_δ) konstantní v celém rozsahu sledovaných poměrů a/W . Pro všechny případy je v grafech uvedena regresní závislost koeficientu na T , kterou ovšem nelze zobecňovat. Jak ukazuje např. práce [3] je tato závislost proměnná s materiálovými charakteristikami. Závěrem lze říci, že velikosti koeficientů plasticity je třeba určit pro jednotlivé geometrie odděleně.

Jedinná veličina jejíž proměnnost lze vysvětlit vlivem T napětí je proporční faktor m , který je dán poměrem J integrálu a CTOD. Jeho velikost je závislá pouze na T -napětí, jak bylo mimo jiné ověřeno výpočty pomocí metody modifikované okrajové vrstvy. Odchyłky některých bodů od regresní přímky jsou způsobeny ovlivněním plastické zóny v kořeni trhliny plastickou zónou vznikající na povrchu tělesa v důsledku vnějšího zatěžování. K těmto efektům však dochází pro velké poměry $a/W > 0,7$, které se v praxi nepoužívají. Cílem dalšího výzkumu by mělo být zjištění, zda je tato závislost invariantní vzhledem k materiálovým charakteristikám a různým hladinám zatěžování a jestli lze tuto závislost generalizovat.

Poděkování

Tento článek byl vytvořen za pomoci grantu AV ČR č.K 2076106

Literatura

- [1] Anderson, T.L, *Fracture Mechanics - Fundamentals and Applications*, CRC Press Inc., 1995
- [2] Bílek, Z., Kuna, M., Knésl, Z., *Studium otevření trhliny metodou konečných prvků*, Kovové materiály, Vol. 6, pp. 663–684, 1977

- [3] Kirk, M. T, Dodds, R. H, *J and CTOD estimation equations for shallow cracks in single edge notch bend specimens*, Journal of Testing and Evaluation, Vol. **21**, pp. 228–238, 1993
- [4] Kirk, M. T, Wang, Y. Y, *Wide range CTOD estimation formulae for SE(B) specimens*, Fracture Mechanics, ASTM STP 1256, Vol. **26**, pp. 127–141, 1995
- [5] Morrison, J., Karisallen, K. J, *An experimental comparison of J and CTOD estimation formulas*, Eng. Fracture Mechanics, Vol. **51**, pp. 145–149, 1995
- [6] Panontin, T. L., Makino, A., Williams, J. F, *Crack tip opening displacement estimation formulae for C(T) specimens*, Eng. Fracture Mechanics, Vol. **67**, pp. 293–301, 2000
- [7] Williams, M. L., *On the Stress Distribution at the Base of Stationary Crack*, Journal of Applied Mechanics, Vol. **24**, pp. 109–114, 1957