



Národní konference s mezinárodní účastí  
**INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002**

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

**INTENZIVNÍ KMITÁNÍ NOSNÍKU  
POD RYCHLE JEDOUcí SOUSTAVOU SIL**

L. Frýba, C. Fischer <sup>1</sup>

*Nosník zatížený pohybující se soustavou sil byl řešen metodou integrálních transformací a výsledek je vyjádřen v kompaktní formě. Výpočet průhybu, ohybového momentu a svislého zrychlení byl proveden pro betonové a ocelové mosty o rozpětí 5 až 50 m za působení tří vysokorychlostních vlaků při rychlostech 5 až 500 km/h. Ohybové momenty byly roztříděny metodou rain-flow. V práci se ukazuje vliv některých parametrů na dynamické přírůstky průhybů a spektra napětí železničních mostů.*

Klíčová slova : kmitání, nosník, pohybující se zatížení

## **1 Úvod**

Železniční mosty na vysokorychlostních tratích trpí intenzivním kmitáním, které je způsobeno dlouhým sledem nápravových sil. Někdy se toto kmitání blíží rezonanci, která má dosti vážné následky ve formě destabilizace šterkového lože. To může vést ke snížení bezpečnosti proti vykolejení, zhoršení jízdního pohodlí a ke zvýšeným nákladům na údržbu.

Proto se nejdříve hledaly oblasti rezonančního kmitání [1] a odhadovala se maxima výchylek, napětí a svislého zrychlení [2]. Časový průběh těchto veličin byl vypočten v [3] a z nich se odvodily dynamické přírůstky statistickými metodami [4].

Účelem této práce je podat přehled o problému a ukázat vliv některých parametrů, které jsou důležité pro návrh mostních konstrukcí na vysokorychlostních tratích.

---

<sup>1</sup>Prof. Ing. Ladislav Frýba, DrSc., Mgr. Cyril Fischer, Ústav teoretické a aplikované mechaniky AV ČR, Prosecká 76, 190 00 Praha 9, tel / fax : 02-83881646, E-mail : fryba@itam.cas.cz

## 2 Jednoduchý teoretický model

Nejjednodušším teoretickým modelem v dynamice mostů, [5], je Bernoulliho-Eulerův nosník délky  $l$  zatížený soustavou sil  $F_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ , která se pohybuje po nosníku rychlostí  $c$ ,  $N$  je počet náprav ve vlaku. Rovnice nosníku je

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + 2\mu\omega_d \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n(t) \delta(x - x_n) F_n, \quad (1)$$

kde znamená :

$v(x, t)$  = průhyb nosníku v místě  $x$  a čase  $t$ ,

$E$  = modul pružnosti nosníku,

$I$  = konstantní moment setrvačnosti příčného řezu nosníku,

$\mu$  = konstantní hmotnost nosníku na jednotku délky,

$\omega_d$  = kruhová frekvence útlumu,

$\vartheta = \omega_d / f_1$  = logaritmický dekrement útlumu,

$$\varepsilon_n(t) = h(t - t_n) - h(t - T_n), \quad (2)$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ 1 & \text{pro } t \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

= Heavisidova jednotková funkce,

$t_n = d_n / c$  = okamžik, kdy  $n$ -tá síla vjíždí na nosník,

$T_n = (l + d_n) / c$  = okamžik, kdy  $n$ -tá síla opouští nosník,

$\delta(x)$  = Diracova funkce,

$x_n = ct - d_n$ ,

$d_n$  = vzdálenost  $n$ -té síly od první,  $d_1 = 0$ .

Fourierova a Laplaceova-Carsonova integrální transformace s vhodným použitím Heavisidovy a Diracovy funkce, [5], vede pro prostě uložený nosník s nulovými počátečními podmínkami k řešení [2] :

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N v_0 \frac{F_n}{F} j \omega \omega_1^2 \left[ f(t - t_n) h(t - t_n) - (-1)^j f(t - T_n) h(t - T_n) \right] \sin \frac{j \pi x}{l}, \quad (4)$$

kde :

$$\omega_j^2 = \frac{j^4 \pi^4 EI}{l^4 \mu}, \quad f_j = \frac{\omega_j}{2\pi}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (5)$$

$$\omega = \frac{\pi c}{l}, \quad \omega_j'^2 = \omega_j^2 - \omega_d^2, \quad (6), (7)$$

$$v_0 = \frac{2F}{\mu l \omega_1^2} = \frac{2F l^3}{\pi^4 E I} \approx \frac{F l^3}{48 E I}, \quad (8)$$

$$f(t) = \frac{1}{\omega_j' D} \left[ \frac{\omega_j'}{j \omega} \sin(j \omega t + \lambda) + \exp^{-\omega_d t} \sin(\omega_j' t + \varphi) \right], \quad (9)$$

$$D^2 = (\omega_j^2 - j^2 \omega^2)^2 + 4 j^2 \omega^2 \omega_d^2, \quad (10)$$

$$\lambda = \arctan \frac{-2 j \omega \omega_d}{\omega_j^2 - j^2 \omega^2}, \quad (11)$$

$$\varphi = \arctan \frac{2 \omega_d \omega_j'}{\omega_d^2 - \omega_j'^2 + j^2 \omega^2}. \quad (12)$$

Rovnice (4) dává ohybový moment a svislé zrychlení nosníku :

$$\begin{aligned} M(x, t) &= -EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N M_0 \frac{F_n}{F} j^3 \omega \omega_1^2 \left[ f(t - t_n) h(t - t_n) - (-1)^j f(t - T_n) h(t - T_n) \right] \sin \frac{j \pi x}{l}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} a(x, t) &= \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N v_0 \frac{F_n}{F} j \omega \omega_1^2 \left[ \ddot{f}(t - t_n) h(t - t_n) - (-1)^j \ddot{f}(t - T_n) h(t - T_n) \right] \sin \frac{j \pi x}{l}, \end{aligned} \quad (14)$$

kde :

$$M_0 = \frac{2F l}{\pi^2} \approx \frac{F l}{4}, \quad (15)$$

$$\ddot{f}(t) = -\frac{\omega_j'^2 - \omega_d^2}{\omega_j' D} \left[ \frac{j \omega \omega_j'}{\omega_j'^2 - \omega_d^2} \sin(j \omega t + \lambda) + \exp^{-\omega_d t} \sin(\omega_j' t + \varphi') \right], \quad (16)$$

$$\varphi' = \varphi + \arctan \frac{2 \omega_d \omega_j'}{\omega_j'^2 - \omega_d^2}. \quad (17)$$

Vhodné užití Heavisidovy funkce způsobuje, že rovnice (4), (13) a (14) platí pro vynucené i volné kmitání a to v době, kdy  $n$ -tá síla se nachází na nosníku, tak i v době, kdy ho již opustila.

### 3 Numerické výpočty

Rovnice (4), (13) a (14) byly naprogramovány pro počítač a jejich hodnoty se počítaly v každém časovém kroku  $\Delta t = \min[0,001, 1/(20f_5)]$  ve středu nosníku  $x = l/2$ . Výpočet končí, když  $N$ -tá síla opustí nosník a po dalších 20 volných tlumených kmitcích,  $T_N + 20/f_1$ . Při výpočtu se uvažovalo 5 tvarů vlastního kmitání (pro  $x = l/2 \rightarrow j = 1, 3, 5$ ).

Časové průběhy ohybových momentů se kromě toho třídily metodou stékající vody (rain-flow) podle algoritmu, [6] :

$$A(i-1) \leq A(i+1) < A(i) \leq A(i+2), \quad (18)$$

nebo

$$A(i-1) \geq A(i+1) > A(i) \geq A(i+2), \quad (19)$$

kde  $A(i)$  znamená  $i$ -tý lokální vrchol.

Tato procedura dává po přepočtu ohybových momentů na napětí tzv. spektra napětí, tj. počet absorbovaných cyklů v každé třídě napětí. To je důležité pro únavové výpočty (stanovení intervalů inspekčních prohlídek, odhady únavové životnosti apod.).

Časové průběhy průhybu, ohybového momentu a svislého zrychlení včetně spektra ohybových momentů byly vypočteny pro tyto případy :

(a,b) betonové a ocelové mosty o rozpětí 5, 10, 15, 20, 30 a 50 m,

(c) vysokorychlostní vlaky ICE 2, Eurostar (TGV) a Talgo AV 2,

(d) rychlosti 5, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450 a 500 km/h.

Je to celkem  $2 \times 6 \times 3 \times 11 = 396$  případů.

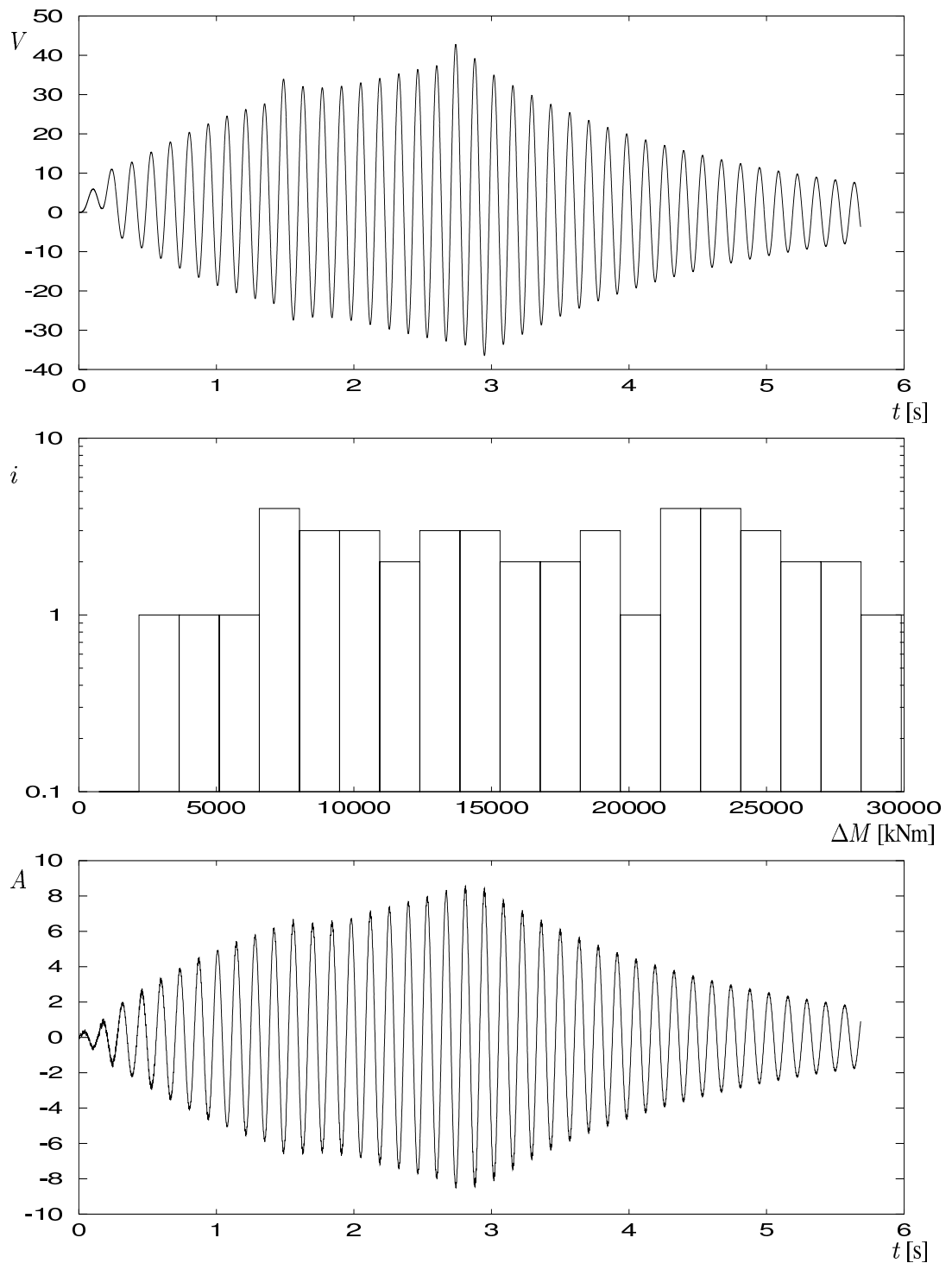
Mosty se odlišují rozpětím  $l$ , vlastní frekvencí  $f_1$ , logaritmickým dekrementem útlumu  $\vartheta$  a vlastní tíhou  $G$ . Jejich empirické hodnoty byly převzaty z [6]. Hlavními uvažovanými charakteristikami vysokorychlostních vlaků je nápravová síla  $F$ , počet náprav  $N$  a délka  $d$  převažujících vagónů.

Rychlost 5 km/h představuje kvazistatický případ, ke kterému byly ostatní případy porovnávány. Vysokorychlostní tratě jsou v současné době navrhovány na rychlost 350 km/h s 20 % spolehlivostí, což dává 420 km/h. Nezbytná extrapolace pak vede k rychlosti 500 km/h.

# STEEL BRIDGE, $l = 20$ m, Eurostar, $c = 500$ km/h

$N=48$ ,  $\Delta t=2.76 \times 10^{-4}$  s,  $j=5$ ,  $T_N + 20/f_1 = 5.69$  s,  $\Delta M=1460$  kNm

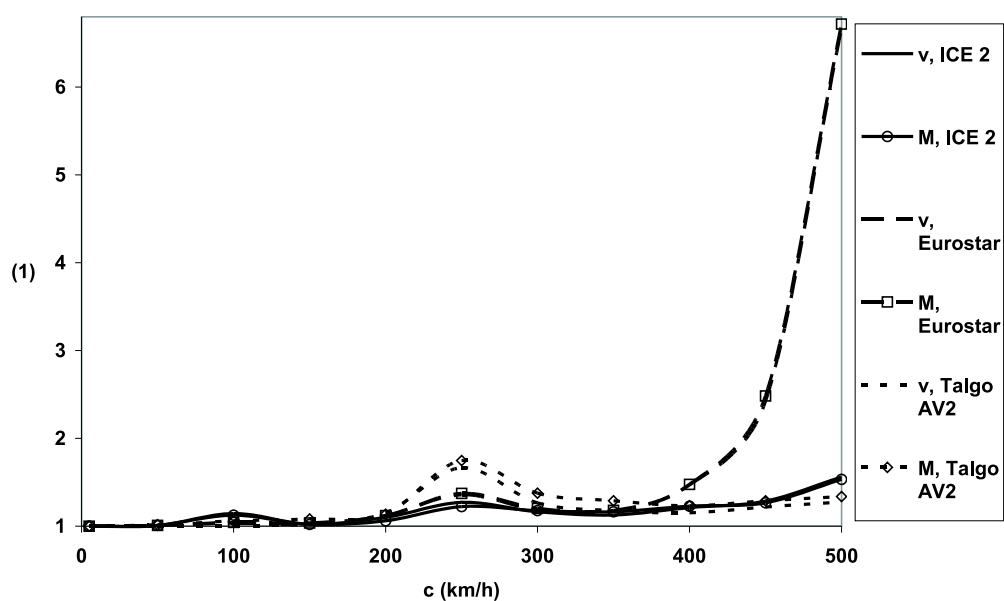
$f_1 = 7.25$  Hz,  $\vartheta = 0.08$ ,  $G = 800$  kN



$$\max \frac{v(l/2, t)}{v_0 R} = 42.75 \quad \max M(l/2, t) = 15762.16 \text{ kNm} \quad \sum i = 41 \quad \max \frac{a(l/2, t)}{g} = 8.6$$

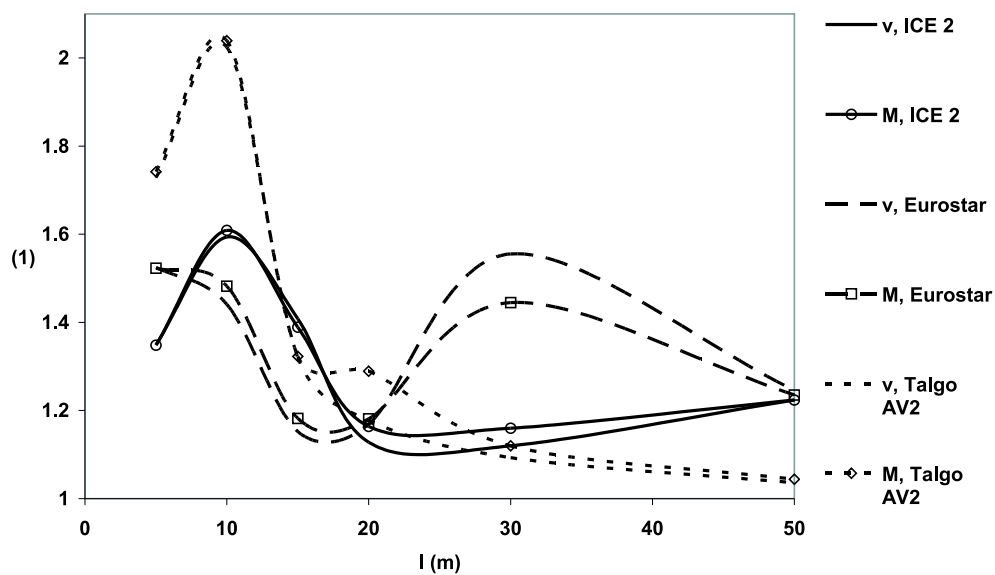
Obr. 1. Časový průběh průhybu  $V$ , svislého zrychlení  $A$  a spektrum ohybových momentů  $\Delta M$ . Ocelový most,  $l = 20$  m, Eurostar,  $c = 500$  km/h.

Dynamic increments of a steel bridge,  $l = 20$  m, for various trains

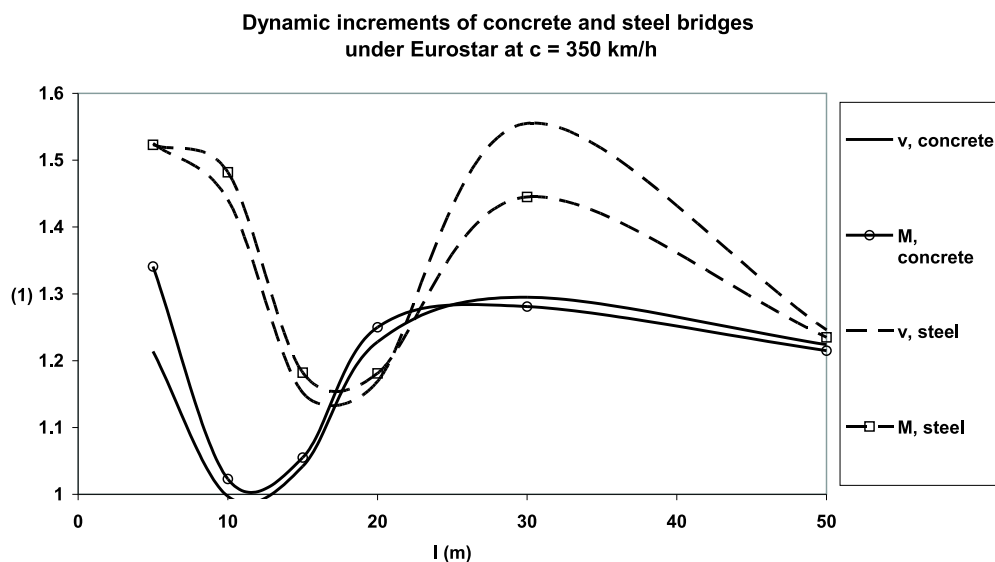


Obr. 2. Dynamické přírůstky ocelového mostu,  $l = 20$  m, v závislosti na rychlosti  $c$  různých vlaků,  $v$  - průhyb,  $M$  - ohybový moment.

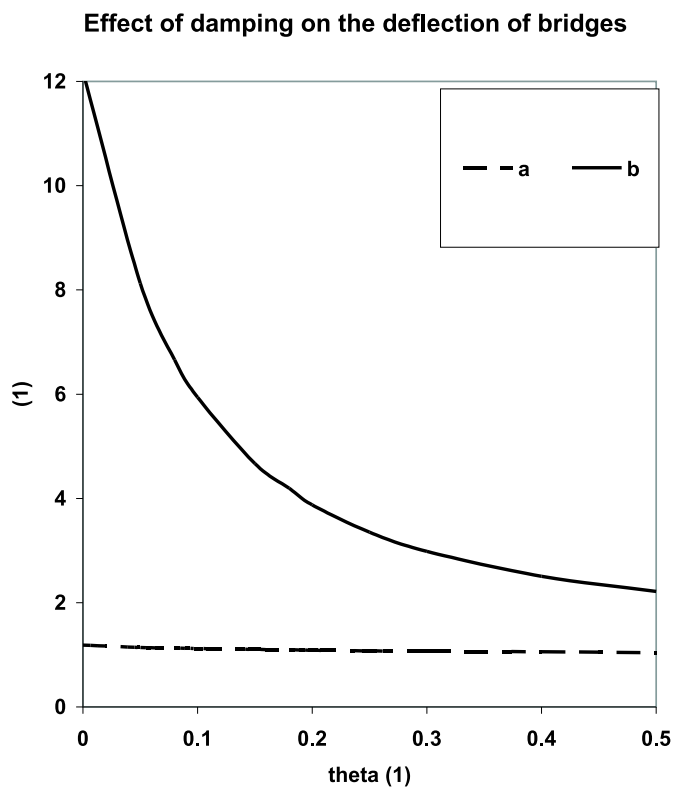
Dynamic increments of steel bridges under high speed trains  
at  $c = 350$  km/h



Obr. 3. Dynamické přírůstky ocelových mostů v závislosti na rozpětí  $l$  různých vlaků o rychlosti 350 km/h,  $v$  - průhyb,  $M$  - ohybový moment.



Obr. 4. Dynamické přírůstky betonových a ocelových mostů v závislosti na rozpětí  $l$  různých vlaků o rychlosti 350 km/h,  $v$  - průhyb,  $M$  - ohybový moment.



Obr. 5. Dynamické přírůstky v závislosti na logaritmickém dekrementu útlumu  $\vartheta$  : a) betonový most  $l = 20$  m, ICE 2,  $c = 350$  km/h mimo rezonanci, b) ocelový most  $l = 20$  m, Eurostar,  $c = 500$  km/h v rezonanci.

## 4 Výsledky

Ukázkou výpočtů je obr. 1, kde je časový průběh průhybu  $V = v(l/2, t)/v_0$ ,  $i$  = počet kmitů,  $\Delta M$  = třída ohybových momentů při třídění metodou rain-flow,  $A = a(l/2, t)/g$  = svislé zrychlení středu rozpětí mostu,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  = zemské zrychlení. Obr. 1 platí pro ocelový most o rozpětí 20 m, zatížení vlakem Eurostar, rychlost 500 km/h. Obr.1 je příkladem rezonančního kmitání.

Obr. 2 ukazuje závislost dynamických přírůstků průhybů ( $v$ ) a ohybových momentů ( $M$ ) na rychlosti  $c$  pro tři vysokorychlostní vlaky.

Obr. 3 dává přehled dynamických přírůstků ocelových mostů v závislosti na rozpětí  $l$  při rychlostech 350 km/h.

Porovnání betonových a ocelových mostů různých rozpětí  $l$  ukazuje obr. 4 pro rychlost 350 km/h vlaku Eurostar.

Závislost dynamického přírůstku na útlumu  $\vartheta$  znázorňuje obr. 5, kde jsou porovnávány dva případy : a) betonový most,  $l = 20 \text{ m}$ , ICE 2,  $c = 350 \text{ km/h}$ , b) ocelový most,  $l = 20 \text{ m}$ , Eurostar,  $c = 500 \text{ km/h}$ . Příklad  $a$  je mimorezananční,  $b$  je v rezonanci.

## 5 Závěry

Výpočty ukázaly, že za vysokých rychlostí nad 200 km/h se skutečně může objevit rezonanční kmitání. Je způsobeno dlouhým sledem nápravových sil za určitých rychlostních a frekvenčních podmínek. Rezonance je ovšem poměrně vzácný jev, protože vzdálenosti náprav nejsou přesně stejné v celém vlaku a každá nepravidelnost kmitání ruší. Buzení přitom trvá poměrně krátkou dobu, ve které nemohou amplitudy vlivem útlumu příliš vzrůstat.

Dynamické účinky na mostním nosníku zhruba stoupají se stoupající rychlostí soustavy sil. V této závislosti se vyskytuje několik vrcholů, jejichž velikost a poloha závisí na dynamické soustavě most + vlak.

Dynamické přírůstky ohybového momentu jsou obvykle o něco vyšší než tytéž hodnoty průhybů.

Útlum podstatně snižuje vrcholy při rezonančním kmitání, ale mimo rezonanci jen velmi málo ovlivňuje velikost amplitud.

Svislá zrychlení mostů se stávají omezujícím činitelem při návrhu vysokorychlostních tratí, protože mohou překročit limitní hodnoty. U zrychlení zbývá ovšem ještě mnoho problémů jak při experimentech (filtrace) tak i při teoretických výpočtech (počet harmonických).

Spektra napětí jsou chudá při malých rychlostech, ale rozkmity napětí dosahují vysokých hodnot při vysokých rychlostech, neboť metoda rain-flow vyhodnocuje i kmity, které zasahují do záporných hodnot.

## Poděkování

Příspěvek vznikl za podpory grantů GA AV ČR A 207 1103 a GA ČR 103/01/0243.

## Literatura

- [1] L. Frýba, J. Náprstek : Appearance of resonance vibration on railway bridges. In : B.H.V. Topping : Advances in Civil and Structural Engineering Computing for Practice. Civil-Comp Press, Edinburgh, 1998, str. 377-382.
- [2] L. Frýba : A rough assessment of railway bridges for high speed trains. Engineering Structures, 23 (2001), č. 5, str. 548-556.
- [3] L. Frýba, C. Fischer, S. Pospíšil : Dynamic effects of high speed trains on bridges. In : H. Grundmann : Structural Dynamics. Balkema, Rotterdam, 2002, v tisku.
- [4] L. Frýba : Dynamické přírůstky napětí a zrychlení mostů při vysokých rychlostech. Konference Mosty 2002, Brno, v tisku.
- [5] L. Frýba : Kmitání těles a konstrukcí způsobené pohybujícím se zatížením. 2. vydání, Academia, Praha, 1989.
- [6] L. Frýba : Dynamika železničních mostů. Academia, Praha, 1992.