



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

Návrh na omezení kmitů štíhlé ocelové zvonice

O. Fischer, M. Pirner¹

Abstrakt: Nově postavená štíhlá ocelová zvonice s jedním zvonom ϕ 0.75 m a hmotě 176 kg, zvonícím 70 úderů za minutu vykazovala při zvonění dobře pozorovatelné torzní kmity. Její ocelová část o výšce 20 m spočívá na betonové spodní stavbě tvaru bloku o výšce 5 m a má příčný řez tvaru pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka s ramenem 2.30 m. Její 3 nárožníky jsou z úhelníků, vodorovné příčky, navzájem vzdálené 2.75 m. Diagonály, které by zajistily dostatečnou torzní tuhost věže, byly vynechány kvůli splnění záměru architekta. Konstrukce je svařovaná.

Výpočet i měření na zvonici ukázaly, že vyšší složka budící síly kývajícího zvonu (1.745 Hz) je blízká jedné vlastní frekvenci věže, právě té, která přísluší torznímu tvaru. K omezení těchto kmitů byla navržena dvojice kulových pohlcovačů umístěných v blízkosti rohů trojúhelníka. Každá z koulí má hmotu 315 kg a je uložena v míse tvaru kulového vrchlíku o poloměru 0.276 m. Navrhovaný tlumící systém je v současné projektován.

Klíčová slova: Kmitání věží, účinek zvonů, pasivní pohlcovač kmitů, kulový pohlcovač

1 Popis konstrukce

Zvonice je koncipována jako ocelová příhradová věž bez diagonál. Nárožníky jsou z úhelníků **L** 200/200/16, vodorovné příčky z **U** profilů 200. Výška věže je 25 m, z čehož 5 m tvoří betonový blok, ocelová část je do něj zakotvena 3 x 3 šrouby M30. V úrovni nejvyšší příčky (19.43 m od vrchu betonového bloku) je připevněn nepohyblivý zvon ϕ 950 mm, pod ním menší zvon ϕ 750 mm o hmotě 176 kg kývající ve svislé rovině rovnoběžné s přeponou příčného řezu (tj. kolem osy půlící pravý úhel vrcholu trojúhelníka) tak, že zvoní 70 úderů za minutu (tj. 0.583 Hz), při čemž se od svislice vychyluje o $\pm 65^\circ$. Zvon je rozhoupáván lidskou silou, s instalací elektrického zvonícího zařízení se nepočítá. Obslužná plošina zvonů ve výšce 16.78 m je tvořena roštem a přístupná po žebříku neseném vodící kolejnicí záchytného zařízení. Celková hmota ocelové konstrukce je 8.0 t, pohled na zvonici je na obr. 1.

V souladu s architektonickým návrhem (velmi nevhodným z konstruktivního hlediska) neobsahuje konstrukce zvonice diagonály, které by jí dodaly potřebnou tuhost pro vodorovné zatížení a pro kroucení. Tím se stalo, že konstrukce sice může vyhovět na statické zatížení větrem či vychýleným zvonom, ale má při tom takovou vlastní frekvenci, která se přiblíží frekvenci budícího zatížení a dojde tak ke zvětšení amplitud rezonančním efektem.

¹ Prof.Ing. Ondřej Fischer, DrSc., prof.Ing. Miroš Pirner, DrSc., Ústav teoretické a aplikované mechaniky AVČR, Prosecká 76, 19000 Praha 9. E-mail: fischer@itam.cas.cz, pirner@itam.cas.cz, tel. 0283882457 fax 0286884634.

2 Chování konstrukce při zvonění

Po zahájení provozu vykazovala zvonice při zvonění viditelné kmity takové velikosti, že vzbuzovaly obavu a proto bylo zvonění na čas zastaveno. Byli jsme požádáni o posouzení tohoto jevu, k čemž nám byl předložen projekt obsahující m.j. výpočet vlastních frekvencí a tvarů kmitání. Kromě toho jsme si vyžádali objektivní změření kmitů, které po dohodě s námi provedli pracovníci Katedry mechaniky Stavební fakulty ČVUT. Výsledky výpočtu a měření kmitů jsou shrnuty v tabulce 1 a 2. Jako buzení se uplatnil slabý vítr (3 – 5 m/s ve výšce 2 m) a volné dokmitávání konstrukce po skončení zvonění, dále byly sledovány kmity při vlastním zvonění.



Obr. 1 – Zvonice u Jákovova žebříku v Praze-Kobylisích

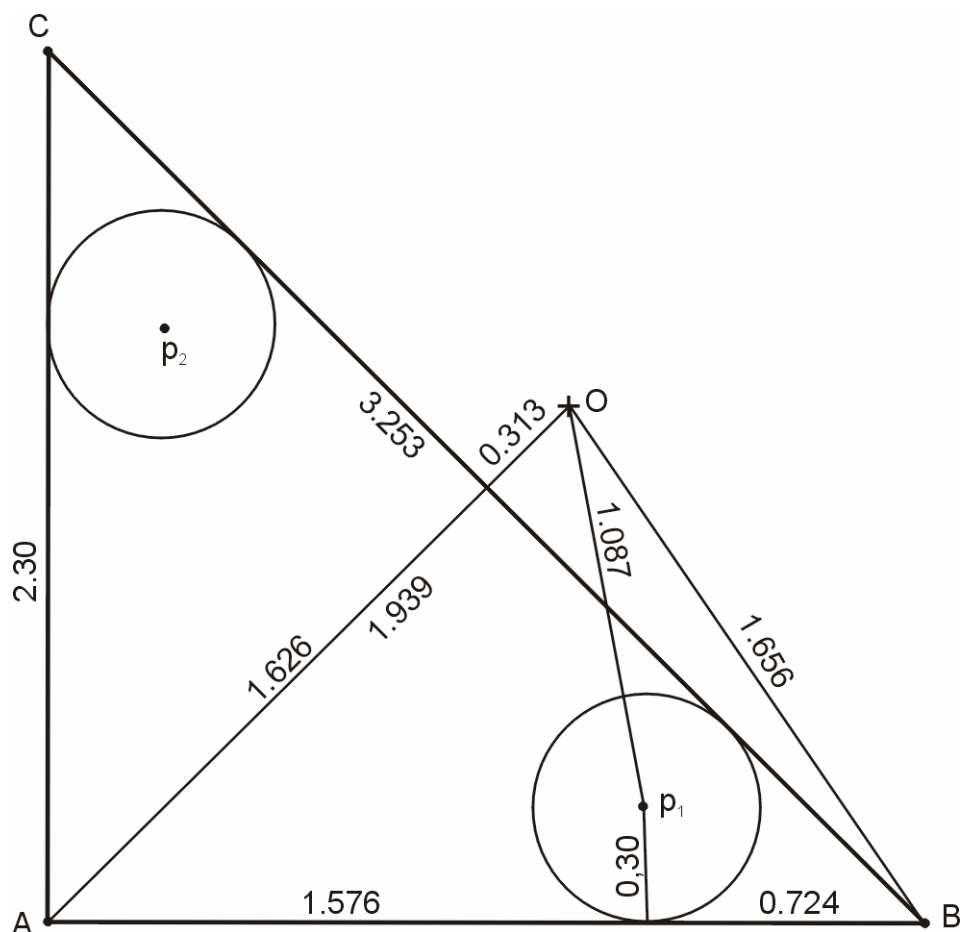
Pohyb byl snímán na plošině pod zvonem 4 snímači rozmístěnými tak, aby bylo možno separovat obě horizontální složky pohybu plošiny i její natáčení kroucením věže. Kinematické schema je na obr. 2, jsou vyznačeny i polohy dále popsanych pohlcovačů.

Tabulka 1 – Vlastní frekvence věže [Hz] a měřený útlum (log. dekrement, větší hodnoty pro amplitudy srovnatelné s amplitudami vybuzenými zvoněním)

vypočtené (Luxemburk 2000)	naměřené (Polák, 2001)	log. dekrement
1.130		
1.249	1.30	0.006 až 0,024
1.531	1.85 až 1.875	0.009 až 0.028
4.487	2.575	

Tabulka 2 – Vynucené kmity věže - převažující frekvence při zvonění

buzení	frekvence [Hz]
místní zvoník	1.675 až 1.775
zvoník-amatér	1.50 až 1.725



Obr. 2 – Kinematické schema pohybu plošiny u zvonů a rozložení hmot

Při zvonění místním zvoníkem věž kmitala nejčastěji frekvencí 1.775 Hz a to tak, že se kroutila okolo středu otáčení ležícího přibližně na ose pravého úhlu vně trojúhelníkového příčného řezu věže, ve vzdálenosti 0.313 m od přepony (viz obr. 2). Největší naměřená amplituda nárožníku v úrovni plošiny pod zvony při tomto pohybu (složka odpovídající frekvenci 1.775 Hz) byla 6.6 mm.

3 Zatížení vyvozené kýváním zvonu

Zvon lze při zanedbání hmoty srdce charakterizovat jako fyzikální kyvadlo a je popsán svou hmotou m , excentricitou zavěšení (vzdálenost osy otáčení a těžiště zvonu) r a rozložením své hmoty kolem těžiště, které je definováno např. poloměrem setrvačnosti zvonu k ose jdoucí těžištěm kolmo k rovině kývání i_s , případně poměrem

$$\kappa = \frac{i_s}{r}.$$

Fyzikální kyvadlo kývající s rozkyvem $\pm\varphi_o$ má při obecné výchylce φ vodorovnou složku reakce v závěsném bodě o velikosti (Pirner et al., 1989)

$$H = \frac{m g}{1 + \kappa^2} (2 \cos \varphi_o - 3 \cos \varphi) \sin \varphi$$

(g – gravitační zrychlení).

Závislost výchylky zvonu na čase pokládáme za harmonickou, což ve skutečnosti platí jen při malých výchylkách, ale pro účely následující analýzy vyhovuje. Bude tedy

$$\varphi(t) = \varphi_o \sin\left(\frac{2\pi}{T_o} t\right)$$

kde T_o znamená dobu kmitu zvonu, tedy dobu pro kyv tam a zpět. Vodorovnou složku reakce pak je možno vyjádřit funkcí času

$$H(t) = \frac{m g}{1 + \kappa^2} \gamma(t),$$

kde bezrozměrná funkce $\gamma(t)$ času plyne spojením obou předcházejících vztahů. Její průběh pro hodnoty odpovídající sledované konstrukci, tedy pro

$$T_o = 2 \frac{60}{70} = 1.72 \text{ s}; \quad \varphi_o = 65^\circ = 1.14 \text{ rad}$$

je znázorněn na obr. 3. Maximální hodnoty, cca 0.95, dosahuje při $t = 0.186, 0.674, 1.046, 1.534 \text{ s} \dots$ atd, což odpovídá polohám zvonu daným výchylkou $\varphi = \pm 39.4^\circ = \pm 0.687 \text{ rad}$.

Funkci $\gamma(t)$ je výhodné rozvést do Fourierovy řady s lichými členy

$$\gamma(t) = b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T_o} t\right) + b_3 \sin\left(\frac{6\pi}{T_o} t\right),$$

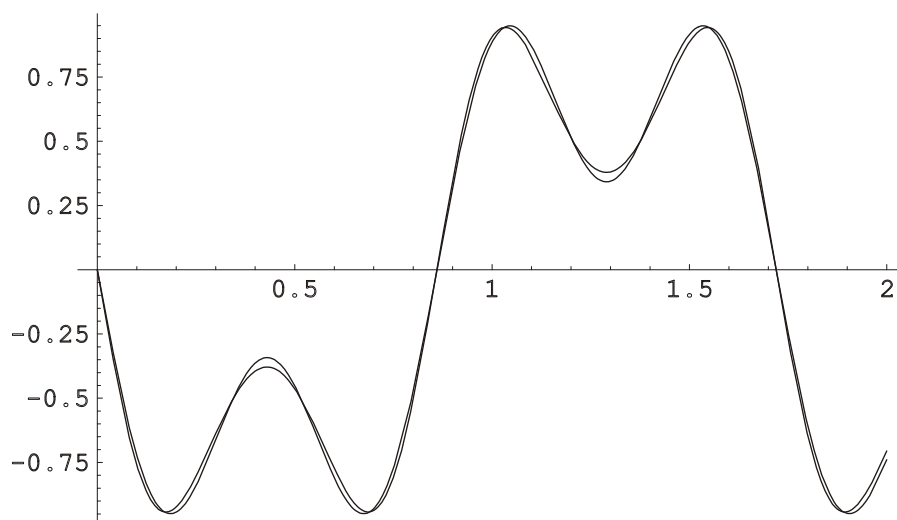
kde

$$b_1 = \frac{2}{T_o} 4 \int_0^{T_o/4} \gamma(t) \sin\left(\frac{2\pi t}{T_o}\right) dt = 0.825; \quad b_3 = \frac{2}{T_o} 4 \int_0^{T_o/4} \gamma(t) \sin\left(\frac{6\pi t}{T_o}\right) dt = 0.483$$

Budící síla při kývání zvonu má tedy dvě výrazné budící frekvence: jedna odpovídá frekvenci kývání zvonu, zde $f_1 = 1 : 1.72 = 0.582 \text{ Hz}$, druhá je trojnásobná, tedy $f_3 = 1.745 \text{ Hz}$. Tato superpozice dvou harmonických složek je znázorněna na tomtéž obr. 3 spolu s původní funkcí. Je zřejmé, že tyto první dvě harmonické složky budící sílu charakterizují dostatečně přesně, což je zřejmé i z velikosti další vyšší složky, která zde vychází více než desetkrát menší, totiž

$$b_5 = 0.038.$$

Dále je zřejmé, že druhá z uvedených frekvencí se výrazně uplatňuje pro buzení pohybu zvonice (srv. tab. 2).



Obr. 3 – Časový průběh vodorovné budící síly zvonu (bezrozměrné funkce $\gamma(t)$) a její náhrada prvními členy řady

K určení číselné hodnoty vodorovné složky budící síly kývajícího zvonu by bylo třeba znát velikost součinitele $\kappa = \frac{i_s}{r}$, tedy rozložení hmoty zvonu. Tu zde můžeme jen odhadovat:

pro matematické kyvadlo délky r (s veškerou hmotou soustředěnou na konci) je $\kappa = 0$

pro homogenní tyč zavěšenou v koncovém bodě $\kappa = 0.557$

pro homogenní kouli kývající kolem tečny ke svému povrchu $\kappa = 0.632$

pro kulovou slupku (s hmotou soustředěnou na povrchu koule) $\kappa = 1.0$.

Odhadneme-li zde hodnotu $\kappa = 0.5$, pak amplituda vodorovné budící síly v závěsu zvonu pro rezonanční frekvenci $f = 1.745$ Hz bude

$$H_3 = \frac{176 \times 10}{1 + 0.5^2} \cdot 0.483 = 680 \text{ N.}$$

Na tuto harmonicky působící budící sílu s frekvencí 1.745 Hz je třeba konstrukci dimenzovat. Další výpočty ukázaly, že amplitudy napětí příslušné změřeným amplitudám věže sice nemusí být bezprostředně nebezpečné, a to i s uvážením namáhání na únavu, přesto však bylo nakonec rozhodnuto kmity omezit. Jednak detaily konstrukce, i když jsou vizuálně dobře provedeny, nebyly konstruovány s ohledem na efekt únavy, jednak vizuální dojem krouťící se věže nepůsobí příznivě. Po zvážení různých okolností jsme doporučili instalaci páru kulových pohlcovačů, které lze instalovat bez porušení celkového vzhledu zvonice a které jsou výhodné především s ohledem na minimální udržovací nároky.

4 Kulový pohlcovač kmitání

Kulový pohlcovač představuje jednu z možných verzí klasických dynamických pohlcovačů kmitů konstrukcí, popsanych např. u den Hartoga (1956). Nejspíš připomíná kyvadlový pohlcovač, který se na našich televizních a podobných věžích používá od 70. let (viz Koloušek et al. 1973), ve srovnání s ním však nevyžaduje (v případě nízkých

frekvenci pohybu nutné) dlouhé závěsy a je jednodušší svou konstrukcí i údržbou. Neumožňuje ovšem doladování frekvence a vlastního tlumení, to však u některých konstrukcí nemusí být na závadu.

Malé kmity při valení koule v míse jsou popsány rovnicemi (viz obr. 4)

$$T - m_{sph} a - m_{sph} g \sin \varphi = 0; \quad N - m_{sph} g \cos \varphi = 0; \quad T r + I_{sph} \varepsilon = 0 \quad (4)$$

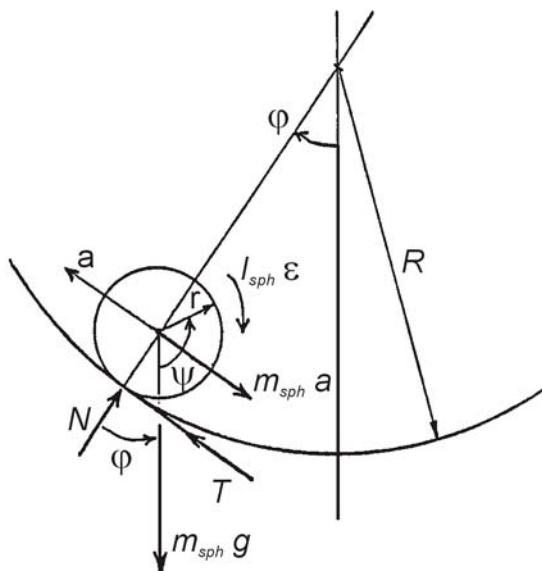
Zavedeme geometrické vztahy

$$R \varphi = (\psi + \varphi) r; \quad a = \ddot{\varphi} (R - r); \quad \varepsilon = \ddot{\psi} \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \quad (5)$$

a vychází vlastní frekvence malých kmitů

$$f_{abs} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{(R-r) \left(1 + \frac{I_{sph}}{m_{sph} r^2} \right)}} \quad (6)$$

kde I_{sph} značí hmotný moment setrvačnosti koule k těžišťové ose.



Obr. 4 – Valení koule o poloměru r v kulovém vrchlíku o poloměru R

Pro homogenní kouli, kde $I_{sph} = \frac{2}{5} m_{sph} r^2$, bude frekvence valení f_{abs}

$$f_{abs} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{(R-r)(1+\frac{2}{5})}} = 0.1345 \sqrt{\frac{g}{(R-r)}}, \text{ nebo } R-r = 0.01809 \frac{g}{f_{abs}^2}. \quad (7)$$

Pro ideální dutou kouli (kulovou slupku), kde $I_{sph} = \frac{2}{3} m_{sph} r^2$, bude

$$f_{abs} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{5}} \sqrt{\frac{g}{(R-r)}} = 0.12328 \sqrt{\frac{g}{(R-r)}}, \text{ nebo } R-r = 0.01520 \frac{g}{f_{abs}^2}. \quad (8)$$

Koule z těžkého materiálu o hmotě m_{sph} poloměru $r/2$ obalená nehmotným materiálem tloušťky $r/2$ na výsledný poloměr r bude mít $I_{sph} = \frac{2}{5} m_{sph} \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{1}{10} m_{sph} r^2$, a tedy

$$f_{abs} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10}{11}} \sqrt{\frac{g}{(R-r)}} = 0.15175 \sqrt{\frac{g}{(R-r)}}, \text{ nebo } R-r = 0.0203 \frac{g}{f_{abs}^2}. \quad (9)$$

Je zřejmé, že účinek valení snižuje vlastní frekvenci ve srovnání s klasickým kyvadlem o redukované délce rovné rozdílu poloměrů $R-r$.

Pro výsledný tlumící účinek koule platí (obr. 2, rovnice (4), (5))

$$H = T \cos \varphi - N \sin \varphi = - m_{sph} g \sin \varphi \cos \varphi \frac{1}{1 + \frac{I_{sph}}{m_{sph} r^2}}. \quad (10)$$

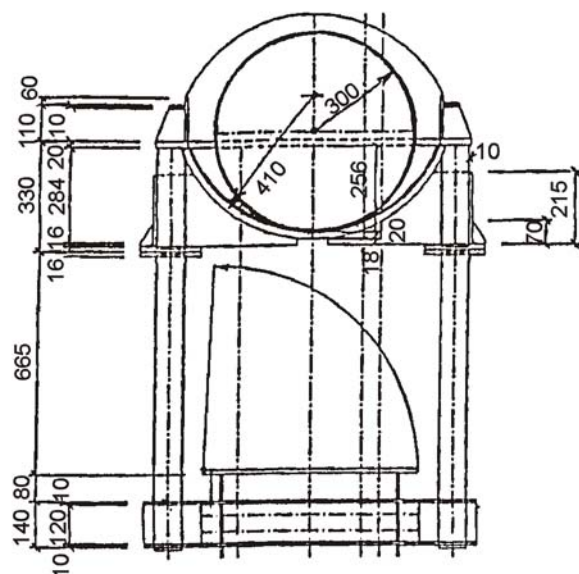
Poslední člen tohoto vzorce udává účinnost kulového pohlcovače vůči matematickému kyvadlu o téže hmotě. Hodnoty tohoto součinitele jsou:

kyvadlo ($I = 0$)		1.0
koule s jádrem ($I = 1/10 m r^2$)		0.9091
plná koule ($I = 2/5 m r^2$)		0.7143
dutá ($I = 2/3 m r^2$)		0.60

Má-li tedy mít kulový pohlcovač stejný účinek jako kyvadlový, je třeba jeho hmotu patřičně zvětšit.

Systém kulových pohlcovačů byl u nás navržen pro tlumení vodorovných kmitů lávky pro pěší o rozpětí 252 m (základní frekvence 0.15 Hz) přes Vranovskou přehradu (Pirner, 1994). Prototyp byl úspěšně vyzkoušen v laboratoři UTAM, jeho instalace se však po dokončení stavby neukázala jako nutná. Byl s úspěchem použit na dvou televizních věžích výšky 70 m (Svatobor – Sušice a Barák – Klatovy, ocelová konstrukce na betonové spodní stavbě), na nichž po rekonstrukci anténního systému nezbylo místo pro kyvadlo, které tam do roku 1999 dobře sloužilo (viz Janata, 2000). Na vrchol věže byl osazen nástavec obsahující mísu s koulí o hmotě 870 kg opatřenou krytem, zevnitř mísy byla navulkanizována tvrdá guma v tloušťce cca 4 mm. Nástavec s pohlcovačem je ukázán na obr. 5.

Prototyp tohoto pohlcovače v měřítku 1 : 1 byl zkoušen ve zkušebně ÚTAM na dynamickém stendu ukázaném na obr. 6 (Pirner, v tisku). Mísa byla usazena na ocelové plotně spočívající na 9 ocelových koulích $\varnothing$ 60 mm, rozkmitávané harmonicky zatěžovacím válcem 50 kN s danou amplitudou (do 40 mm) a proměnnou frekvencí 0.70 – 1.50 Hz, vlastní frekvence byla 1.27 Hz; dále se sledovala budící síla a relativní přemístění koule vůči míse ve směru buzení a kolmo k němu. Byl zkoušen stav s mísou bez pryžového povlaku i s ním. Tento povlak působí větší tlumení pohlcovače (log. dekrement 0.3 až 0.6, závislý silně na amplitudě), omezuje výkyvy koule kolmé k rovině buzení a m.j. i tlumí hluk. (Pryž však musí být dostatečně tvrdá, aby se v období klidu těžká koule do ní nezabořila natolik, že by její pohyb, a tím i funkce pohlcovače, byl při malém buzení znemožněn). Účinnost pohlcovače se stanovila z poměru budící síly s koulí fixovanou v míse a s koulí volnou. Poměr obou byl cca 5 až 8, což zhruba odpovídá poměrům stanoveným na televizní věži, rozkmitávané s blokovaným a funkčním pohlcovačem.



Obr. 5 – Nástavec pro pohlcovač k osazení na vrcholu věže



Obr. 6 - Prototyp pohlcovače z TV věže na standu ve zkušebně ÚTAM

5 Návrh pohlcovače pro zvonici

Pro zmenšení nežádoucích kmitů zvonice nelze použít klasické metody rozladění systému. Aby bylo účinné, musela by se podstatně zvýšit torzní tuhost věže. To by bylo možné přidáním diagonál nebo výplňových panelů, změnilo by to však celkový vzhled a narušilo tak záměr architekta. Z podobného důvodu nepřicházelo v úvahu použití kyvadla, které by se v pohledu na zvonici projevilo. Nakonec se tedy jako nejvhodnější ukázala dvojice kulových pohlcovačů umístěných na plošině pod zvony co nejdále od středu otáčení, aby jejich účinek byl co největší (jsou vyznačeny na obr. 2). Na této

plošině budou oba tlumiče, jejichž výška bude kolem 50 cm, pohledově skryty za žaluziemi, s jejichž instalací se kvůli zakrytí zvonů ještě počítá.

Při návrhu pohlcovače se postupovalo obvyklým způsobem: Konstrukce byla nahrazena soustavou s jedním stupněm volnosti – tuhou deskou kmitající otáčivým pohybem ve vodorovné rovině, k němuž dochází kroucením nehmotného dřívku, na kterém deska spočívá. Tuhostní a hmotové parametry obou byly určeny z daných hmot a známé vlastní frekvence torsních kmitů věže. Hmoty koulí pohlcovačů byly stanoveny tak, aby jejich hmotný moment setrvačnosti ke středu otáčení byl cca 1/10 momentu setrvačnosti kmitající tuhé desky, a byly zvětšeny koeficientem pro valení podle vztahu (10). Tak se došlo k ocelovým koulím o poloměru 0.213 m a hmotě 315 kg. Vlastní frekvence pohlcovačů se volí o něco menší než frekvence konstrukce, zde to bylo 1.75 Hz, čemuž podle vzorce (7) odpovídá poloměr zakřivení mísy $R = 0.271$ m. Mísa bude vyložena tenkou vrstvou pryže jednak kvůli tlumení samotného pohlcovače, jednak kvůli vyloučení hluku vyvolaného valením oceli po oceli, který by rušil zvuk zvonu.

6. Závěr

Navržené zařízení je nyní ve stadiu zpracovávání prováděcí projektové dokumentace a mělo by být v dohledné době realizováno. Pokud je nám známo, jde o první případ použití dynamického pohlcovače na zvonici, a jsme sami patřičně zvědaví na výsledek. Zde bylo nutno se k tomuto opatření uchýlit kvůli architektonickému návrhu, který ignoroval konstrukční stránku díla. K tomu by samozřejmě docházet nemělo, protože jediné úzká spolupráce architekta s konstruktérem od samého počátku může být zárukou díla splňujícího estetické, funkční a ekonomické požadavky. Bohužel v poslední době autorita konstruktéra upadá: jako autor bývá označován jen architekt, automaticky se předpokládá, že inženýr konstrukci přizpůsobí jakýmkoli jeho požadavkům, a na platnost přírodních zákonů se nemyslí. Popisovaná zvonice zde může sloužit jako malý příklad těchto neblahých tendencí.

Poděkování: Příspěvek byl vypracován s podporou GA AVČR č. A2071002/00.

Literatura

Den Hartog, J.P., 1956, *Mechanical vibrations*, McGraw-Hill, New York – Toronto - London

Janata, V., 2000, “Concrete-steel tower with the special damper”. In: *Proc. 19th meeting of the IASS/WG 4 (Masts and towers) Krakow 13-16 Sept. 1999* (R. Ciesielski et al. Eds), Krakow Univ. of Technology, pp. 119-125

Koloušek, V. et al., 1984, *Wind effects on civil engineering structures*, Academia, Praha

Pirner, M., 1994, “Dissipation of kinetic energy of large-span bridges”. *Acta technica ČSAV*, vol. 39, pp 645-655.

Pirner M.: A ball vibration absorber. *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics*. (in print)

J. Luxemburk, 2000: Nosná ocelová konstrukce věže – výkres a výpočet. BML 08/2000

M. Polák 2001: Měření dynamického chování zvonice Evangelického farního sboru v Kobylisích. Nepublikovaná informace, Stavební fakulta ČVUT Praha, VI. 2001

M. Pirner a kol. 1989: *Dynamika stavebních konstrukcí*. TP 33, ČMT – SNTL Praha