



Národní konference s mezinárodní účastí  
**INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002**

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

## **VYUŽITIE PIEZOKERAMICKÉHO MATERIÁLU V RIADENÍ KMITANIA**

Štefan FENIK<sup>1</sup>, Peter BLESÁK<sup>2</sup>, Ladislav STAREK<sup>3</sup>

### **Abstrakt**

*V posledných rokoch vystupuje čoraz viac do popredia problematika aktívneho riadenia kmitania mechanických sústav, a to najmä v oblasti potláčania kmitania. Aktívne tlmenie mechanických kmitov je potrebné všade tam, kde nie je účelné, alebo dokonca vôbec nie je možné použiť pasívne tlmenie.*

*Prvým krokom pri návrhu aktívneho riadenia je výber vhodných akčných členov a snímačov. Tieto musia spĺňať základné požiadavky, akými sú napr.: nízka hmotnosť, jednoduchá konštrukcia, efektívny prevod mechanickej energie na elektrickú (a naopak), veľký rozsah pracovných frekvencií atď. Z tohto pohľadu sú pri potláčaní kmitania ideálne prvky využívajúce na akčné pôsobenie i na snímanie piezoelektrický jav. Takéto prvky sú v súčasnosti využívané pri riadení kmitania rôznych nosníkových a škrupinových konštrukcií.*

*Obsahom príspevku je postup návrhu aktívne riadenej sústavy využitím piezokeramického materiálu. V článku je uvedená teória piezoelektrického akčného člena i snímača a teória PPF riadenia, ktorá je aplikovaná na konkrétnom príklade potláčania kmitania votknutého nosníka.*

**Kľúčové slová:** potláčanie kmitania, PPF riadenie, piezokeramika

### **Úvod**

Vo väčšine prípadov technickej praxe sú vibrácie mechanického pôvodu nežiadúcim javom, ktorý je potrebné efektívnym, ale zároveň ekonomicky výhodným spôsobom potlačiť. Klasické metódy potláčania kmitania sa v niektorých prípadoch ukazujú ako nedostatočné, preto sa aj v tejto oblasti obracia pozornosť na využitie tzv. smart materiálov a to najmä materiálov piezokeramických. Tieto umožňujú snímanie deformácie rovnako ako aj akčné pôsobenie, takže ich vhodnou aplikáciou je možné disipovať značné množstvo energie kmitajúcej sústavy v elektrickej forme.

<sup>1</sup> Ing., Katedra technickej mechaniky, SjF STU Bratislava, [fenik@sjf.stuba.sk](mailto:fenik@sjf.stuba.sk)

<sup>2</sup> Ing., Katedra technickej mechaniky, SjF STU Bratislava,

<sup>3</sup> Prof. Ing., CSc., Katedra technickej mechaniky, SjF STU Bratislava, [starek@cvt.stuba.sk](mailto:starek@cvt.stuba.sk)

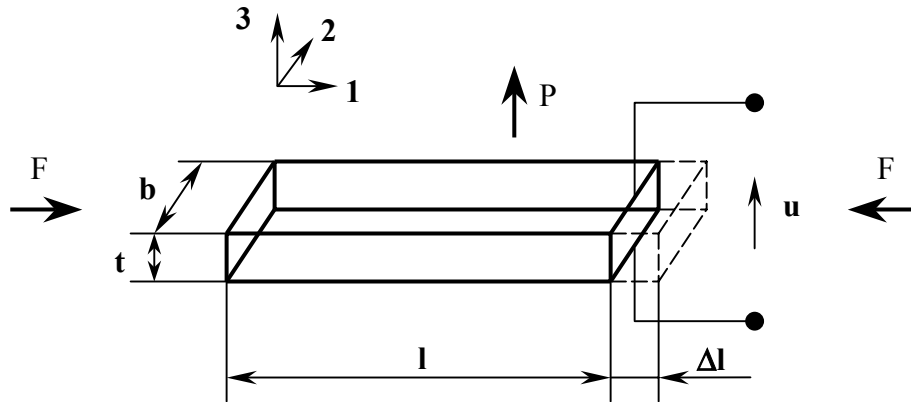
## Piezokeramický materiál ako akčný člen a snímač

Pri vložení akéhokoľvek nevodivého materiálu do elektrického poľa môžeme pozorovať zmenu rozmerov, prípadne i tvaru. Pre väčšinu materiálov sú tieto zmeny z technického hľadiska bezvýznamné, ale existujú keramické materiály (barium titanate, lead zirconate titanate), ktoré môžu špeciálnou úpravou nadobudnúť veľmi výrazné piezoelektrické vlastnosti, t.j. už pri nízkej intenzite el. poľa sa výrazne deformujú (inverzný piezoelektrický efekt), resp. pri vonkajšom mechanickom pôsobení vzniká v ich okolí el. pole značnej intenzity (priamy piezoelektrický efekt). Správanie sa týchto materiálov možno s dostatočnou presnosťou popísať lineárnymi konštitučnými vzťahmi (ANSI/IEEE Standard):

$$S_p = s_{pq}^E T_q + d_{kp} E_k \quad (1)$$

$$D_i = d_{iq} T_q + \varepsilon_{ik}^T E_k \quad (2)$$

kde  $\{S_p\}$  je vektor pozostávajúci z nezávislých zložiek symetrického tenzora pomernej deformácie,  $\{T_q\}$  je vektor pozostávajúci z nezávislých zložiek Cauchyho tenzora mech. napätia ( $p, q = 1 \dots 6$ ),  $\{E_k\}$  je vektor intenzity el. poľa a  $\{D_i\}$  je vektor indukcie el. poľa ( $i, k = 1 \dots 3$ , pričom index 3 prislúcha vždy osi polarizácie piezokeramiky);  $\{s_{pq}^E\}$  je matica konštánt mechanickej poddajnosti pri konštantnom el. poli,  $\{d_{pk}\}$  je matica piezoelektrických konštánt, a  $\{\varepsilon_{ik}^T\}$  je diagonálna matica dielektrických konštánt (el. permitivita) pri konštantnom mechanickom napätí.



Obr.1: Transverzálne usporiadanie  $l > b \gg t$

Základnú konfiguráciu pre akčné pôsobenie i snímanie znázorňuje obr.1. Jedná sa o tzv. transverzálne usporiadanie, kde el. pole pôsobí (resp. vzniká) len v smere polarizácie 3 ( $P$  je vektor polarizácie piezokeramiky) a dominantný silový účinok i deformácia sú vyvíjané v smere 1 kolmom na smer polarizácie. Ak v smeroch 2, 3 nepôsobí vonkajšia sila (resp. nie je v týchto smeroch obmedzená deformácia) máme prvú zo sústavy rovníc (1) v tvare:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_1}{Y_1} + d_{31} E_3 \quad (3)$$

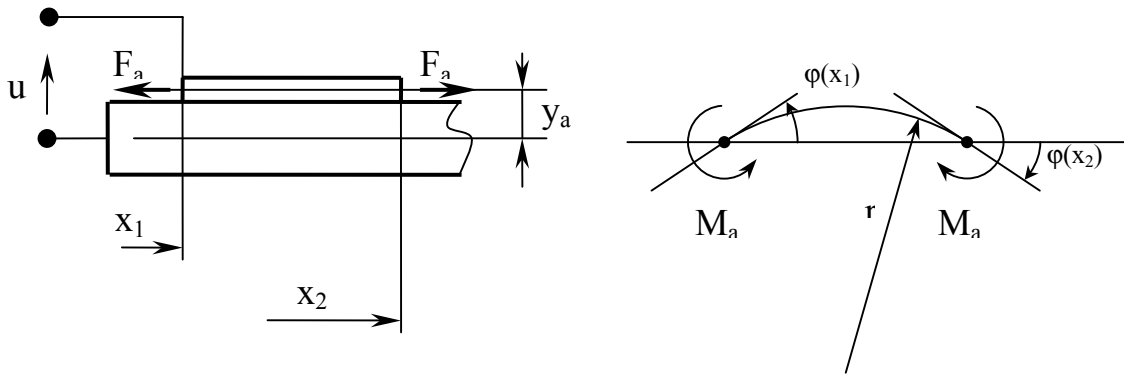
kde  $Y_1$  je Youngov modul pružnosti piezokeramiky v smere 1. Pre mech. napätie vy-  
vodené vonkajšou silou  $F$  platí:

$$\sigma_1 = \frac{F}{bt} \quad (4)$$

teda ekvivalentné akčné pôsobenie (získané z podmienky  $\varepsilon_1 = 0$ ) bude:

$$F_a = Y_1 b d_{31} u \quad (5)$$

kde  $u = E_3 t$  je el. napätie medzi elektródami. Pri aplikácii piezokeramického prvku na  
nosník je akčné pôsobenie ekvivalentné momentovému zaťaženiu podľa obr.2.



Obr.2: Ekvivalentné silové pôsobenie

Pre akčný moment platí:

$$M_a = F_a y_a = Y_1 b d_{31} y_a u = K_a u \quad (6)$$

teda je úmerný privedenému el. napätiu. Ak chceme daný prvok použiť ako snímač,  
zaujímá nás vzťah medzi deformáciou nosníka a el. napätím, ktoré vznikne medzi elek-  
tródami [1]:

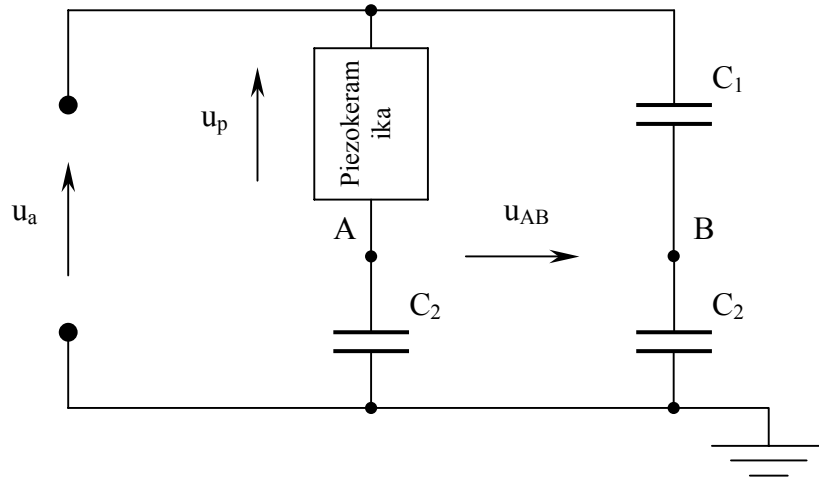
$$u_s = K_s [\varphi(x_2) - \varphi(x_1)] \quad (7)$$

El. napätie medzi elektródami je úmerné rozdielu uhlového natočenia koncov úseku  
nosníka s piezokeramikou, pričom pre konštantu snímača platí:

$$K_s = \frac{Y_1 b d_{31} y_a}{C_p} \quad (8)$$

kde  $C_p$  je kapacita snímača meraná pri konštantnej deformácii (nosníka).

Vhodným zapojením [1] možno piezokeramický prvok použiť súčasne ako akčný člen aj snímač (zvlášť v riadení kmitania má takéto kolokované usporiadanie akčného pôsobenia a snímania veľký praktický význam). Na obr.3 je znázornený spôsob takéhoto zapojenia.



Obr. 3 Zapojenie piezokeramického prvku pre súčasné akčné pôsobenie a snímame

Pre napätie na piezokeramike platí:

$$u_p = \frac{q_p}{C_p} - u_s \quad (9)$$

Kde  $q_p$  je voľný náboj na elektródach piezokeramiky a  $u_s$  je napätie vznikajúce v dôsledku deformácie nosníka (7). Pre snímané napätie medzi bodmi A a B možno ľahko odvodiť nasledujúci vzťah:

$$u_{AB} = \frac{C_2(C_p - C_1)}{(C_2 + C_p)^2} u_a + \frac{C_p}{C_2 + C_p} u_s \quad (10)$$

Takže ak  $C_1 = C_p$ , potom je snímané napätie úmerné deformácii nosníka a zároveň úplne nezávislé na akčnom napätí. Podobne možno odvodiť i vzťah pre skutočné napätie, ktoré pôsobí na akčný člen:

$$u_p = \frac{C_2}{C_2 + C_p} u_a - \frac{C_p}{C_2 + C_p} u_s \quad (11)$$

Z uvedeného je zrejmé, že hodnotu kapacity  $C_2$  je potrebné zvoliť tak, aby skutočné akčné napätie bolo čo najmenej ovplyvnené deformáciou, avšak tak, aby snímané napätie nebolo príliš zoslabené.

## PPF riadenie

Pod pojmom riadenie kmitania mechanickej sústavy rozumieme každé silové pôsobenie vyvolané na základe snímanej odozvy, teda je to akákoľvek forma spätnoväzobnej regulácie, kde vstup do regulátora tvoria snímané výchylky resp. rýchlosti a výstupom z neho sú sily pôsobiace na danú mechanickú sústavu. Cieľom takéhoto riadenia je vopred definovaná zmena dynamických vlastností sústavy, čiže zmena vlastných frekvencií, tlmenia a vlastných tvarov kmitania (VT).

Každá mechanická sústava je systém so spojitými rozloženými parametrami a tak snímanú odozvu môžu tvoriť príspevky veľkého počtu VT aj v relatívne malom frekvenčnom pásme. Spätnoväzobnú reguláciu je potrebné navrhnuť tak, aby bolo možné výrazne ovplyvniť vopred určené VT v úzkom frekvenčnom pásme bez nežiadúceho vplyvu na odozvu sústavy mimo tohto pásma. Takejto požiadavke najlepšie vyhovuje tzv. PPF riadenie. Je to riadenie pomocou kompenzátora 2. rádu, ktorý je budený výchylkou kmitajúcej sústavy a jeho výstup je následne privedený ako budenie tejto sústavy s kladným znamienkom (odtiaľ názov kladná polohová spätná väzba – Positive Position Feedback). Prípad riadenia kompenzátorom s jedným stupňom voľnosti možno popísať nasledujúcimi vzťahmi:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{B}u \quad y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (12a,b)$$

$$\ddot{q}_c + 2\xi_c\omega_c\dot{q}_c + \omega_c^2q_c = B_c y \quad u = C_c q_c \quad (13a,b)$$

kde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{K}$  sú matice hmotnosti, tlmenia a tuhosti mech. sústavy,  $\mathbf{B}$  je matica vstupov do sústavy,  $\mathbf{C}$  matica výstupov zo sústavy,  $q_c$  je súradnica kompenzátora,  $\xi_c$  je jeho pomerný útlm,  $\omega_c$  vlastná uhlová frekvencia (netlmená),  $B_c$  je zosilnenie vstupu a  $C_c$  zosilnenie výstupu kompenzátora. Pri návrhu riadenia vychádzame z rovníc (12) a (13), pričom je vhodné upraviť ich do tvaru [3]:

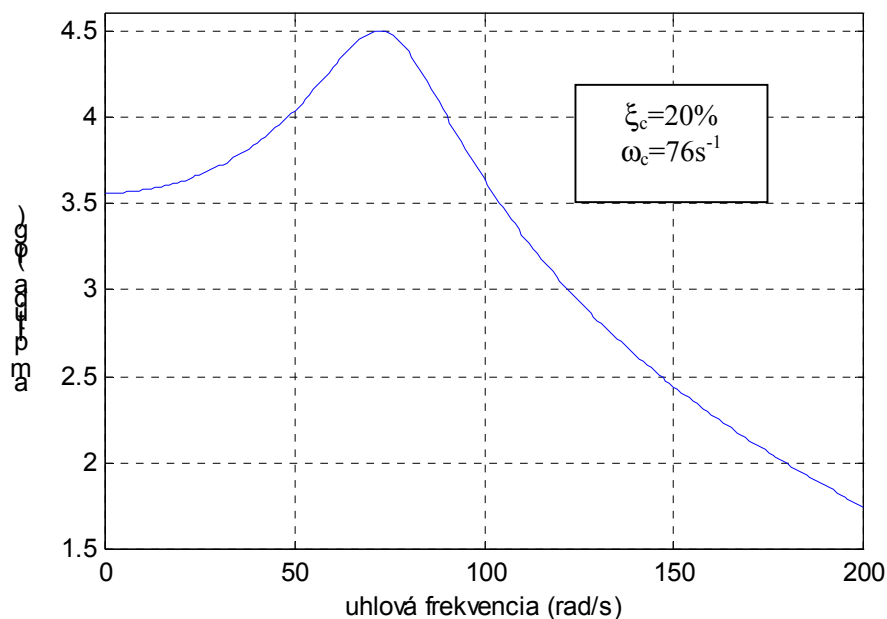
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \ddot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\xi_c\omega_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{B}\mathbf{C}_c \\ -\mathbf{B}_c\mathbf{C} & \omega_c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ q_c \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{D}}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (14)$$

Riadený systém môžeme teda chápať ako modifikovanú mechanickú sústavu, ktorá má jeden stupeň voľnosti navyše a teda navyše o jednu modálnu súradnicu. Tá prislúcha VT viazanému na kompenzátor. Analógia s čisto mechanickou sústavou umožňuje jednoduchú formuláciu podmienky stability riadenia. Za predpokladu, že matica  $\mathbf{D}$  je pozitívne definitná, stačí ak modifikovaná matica tuhosti je tiež pozitívne definitná.

Použitím Laplaceovej transformácie získame prenosovú funkciu medzi vstupom kompenzátora  $y$  (12b) a jeho výstupom  $u$  (13b) v tvare :

$$H_c(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{B_c C_c}{s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2} \quad (15)$$



Obr. 4 Prenos PPF kompenzátora

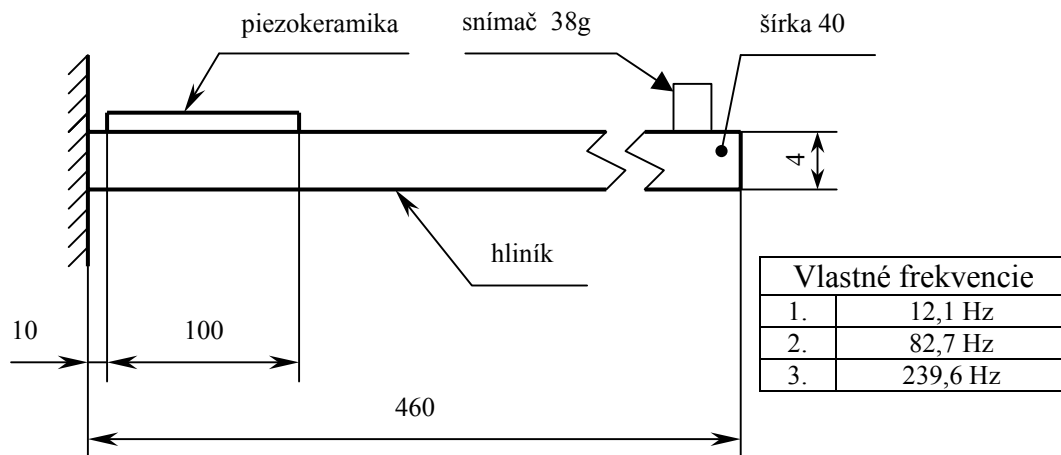
Z nej vyplýva (obr.4), že kompenzátor nemá prakticky žiaden vplyv na VT s vyššou uhlovou frekvenciou ako  $\omega_c$ . Čo sa týka nižších VT, tie sú do istej miery ovplyvnené. Kvalita riadenia závisí len od hodnôt  $\xi_c$ ,  $\omega_c$  a od výsledného zosilnenia  $g = B_c C_c$ . Z uvedeného je teda zrejmé, že je možné navrhnuť kompenzátor pre každý VT zvlášť, pričom začíname návrhom kompenzátora pre najvyšší VT, ktorý nás zaujíma a končíme návrhom kompenzátora pre najnižší VT. Charakter zmeny dynamických vlastností sústavy závisí predovšetkým na polohe akčného člena a snímača. V prípade kolokovaného usporiadania je charakter zmeny rovnaký pre všetky ovplyvnené tvary (riadený VT + nižšie VT). Ak sú však akčný člen a snímač umiestnené oddelene, môže byť charakter zmeny rozdielny pre riadený VT (zvýšenie tlmenia) a nižší ovplyvnený VT (zníženie tlmenia, dokonca až destabilizácia).

### Potlačanie kmitania votknutého nosníka

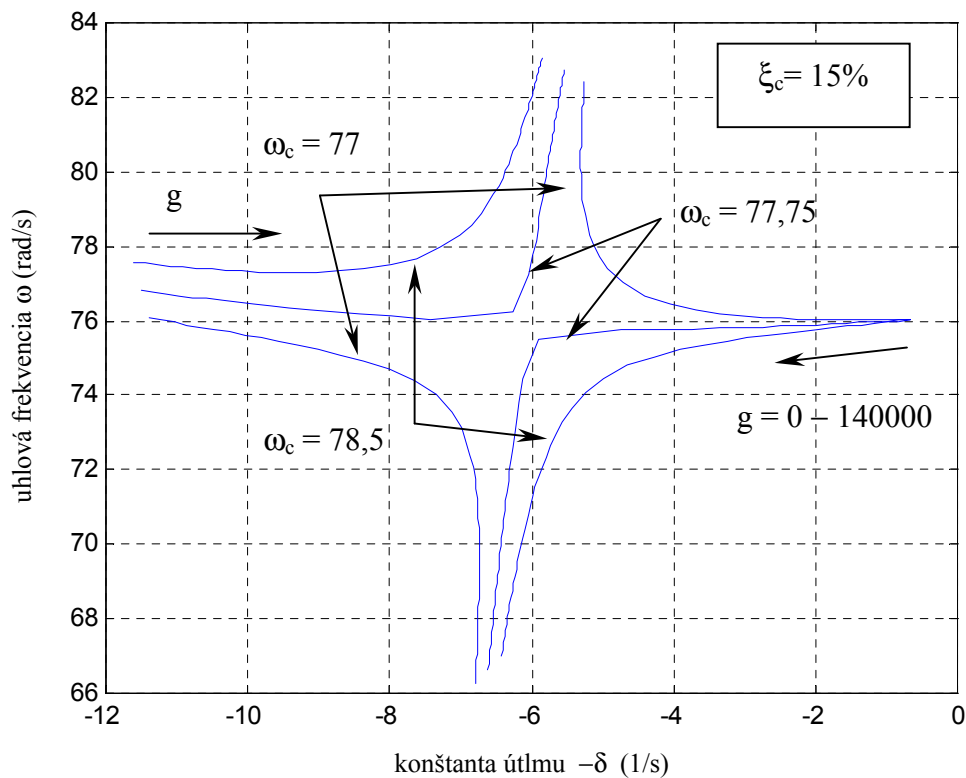
VT votknutého nosníka sú navzájom dostatočne vzdialené, takže návrh riadenia pozostáva z návrhu nezávislých PPF kompenzátorov pre každý VT vo frekvenčnej oblasti, ktorá nás zaujíma. Tu uvedieme príklad návrhu kompenzátora len pre prvý VT. Na obr.5 je znázornený nosník s piezokeramickým prvkom, ktorý slúži ako snímač aj akčný člen zároveň. Umiestnenie piezokeramiky volíme v mieste s najväčšou deformáciou (predĺženie krajného vlákna prierezu nosníka) v rámci príslušného VT. Pre prvý VT je to čo najbližšie k miestu votknutia. Tlmenie  $D$  identifikujeme pomocou experimentálnej modálnej analýzy, alebo približne z hodnôt pomerného útlmu pre podobné konštrukcie (spravidla  $\xi = 0.002 \sim 0.01$  pre najnižšie VT).

Pri návrhu kompenzátora analyzujeme zmenu vlastných čísel  $\lambda_i = -\delta_i + j\omega_i$  (reálna časť  $\delta_i$  predstavuje konštantu útlmu a imaginárna časť  $\omega_i$  tlmenú vlastnú uhlovú

frekvenciu) riadeného systému ako celku v závislosti na parametroch kompenzátora ( $\xi_c$ ,  $\omega_c$  a  $g = B_c C_c$ ), pričom vychádzame z matematického modelu (14). Obr.6 znázorňuje zmenu vlastných čísel v závislosti na celkovom zosilnení  $g$  kompenzátora (zvyšovanie v smere šípky) pri pevne nastavených hodnotách tlmenia a frekvencie. Optimálnym nastavením  $\omega_c$  a  $g$  je možné dosiahnuť hodnoty pomerného útlmu pre 1. VT až na úrovni  $0.5\xi_c$ , pričom sa výrazne neovplyvní vlastná frekvencia kmitania

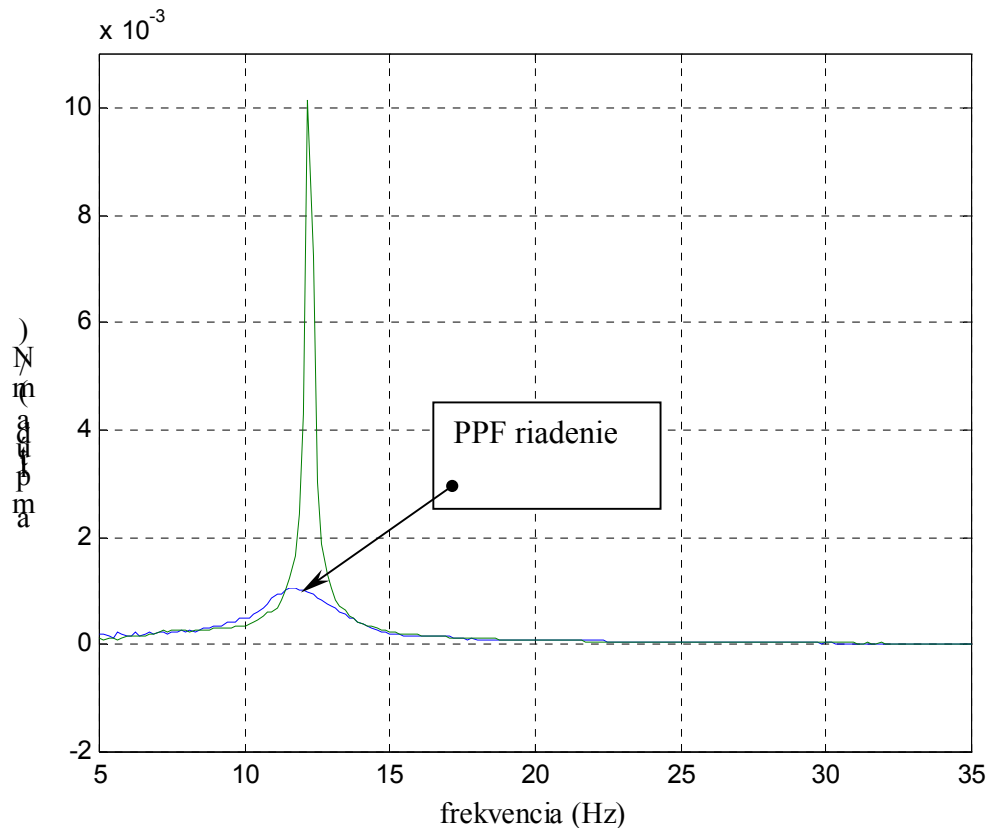


Obr.5 Nosník s piezokeramickým prvkom



Obr.6 Zmena vl. čísel (kompenzátor + 1.VT nosníka)

Na obr.7 je znázornená nameraná prenosová funkcia medzi miestom budenia v blízkosti votknutia (s praktických dôvodov) a voľným koncom nosníka. Pri vynútenom kmitaní sa PPF riadením ( $\xi_c = 30\%$ ,  $\omega_c = 83,5 \text{ s}^{-1}$ ,  $g = 1,95 \cdot 10^5 \text{ Nms}^{-2}$ ) redukuje výchylka v rezonancii na desatinu svojej hodnoty.

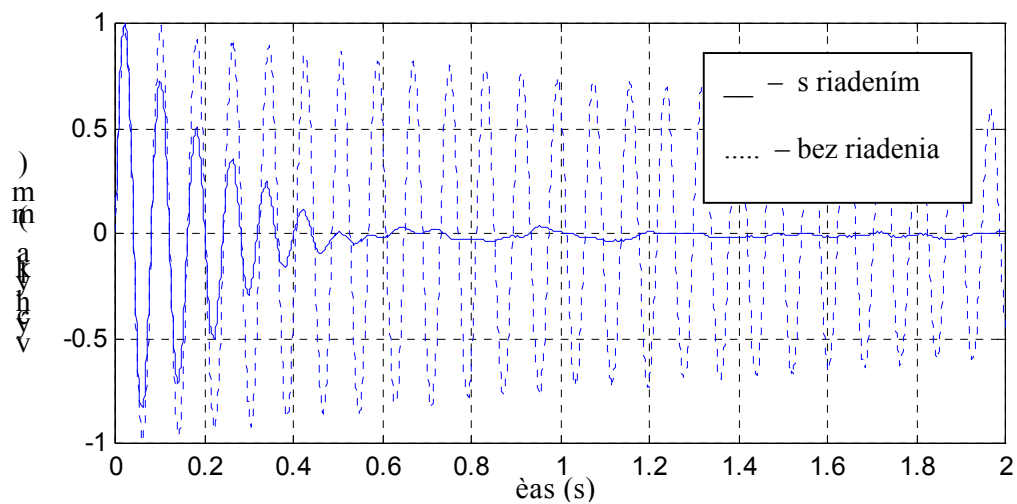


Obr.7 Frekvenčný prenos nosníka

Na obr.8 je porovnanie priebehu priechnej výchylky voľného konca nosníka bez riadenia (prirodzený útlm  $\xi = 0.35\%$ ) a s riadením. Čas poklesu výchylky na 5% začiatočnej hodnoty sa v tomto prípade skrátil z 11s na 0,5s.

## Záver

Na základe nameraných údajov možno konštatovať, že sa podarilo experimentálne overiť navrhnutý spôsob potláčania kmitania. Potvrdil sa tiež predpoklad, že dosiahnutá kvalita riadenia sa výrazne znižuje odchýlením parametrov riadenia (najmä frekvencie kompenzátora) od optimálnych hodnôt. Preto je potrebné venovať primeranú pozornosť problematike matematického modelovania a identifikácii fyzikálnych vlastností riadeného systému.



Obr.8 Výchylka voľného konca nosníka

## Literatúra

- [1] DOSH, J.J. — INMAN, D.J.: A Self-Sensing Piezoelectric Actuator for Collocated Control, J. of Intell. Mater. Syst. and Struct., Vol.3, 1992, pp. 166-185
- [2] FANSON, J.L. — CAUGHEY, T.K.: Positive Position Feedback Control for Large Space Structures, AIAA Journal, Vol. 28, No.4, 1990, pp. 717-724
- [3] FRISWELL, M.I. — INMAN, D.J.: The relationship between positive position feedback and output feedback controllers, Smart Mater. Struct., Vol.8, 1999, pp. 285-291.