



Národní konference s mezinárodní účastí  
**INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002**

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

## K MODELOVÁNÍ VNITŘNÍ DYNAMIKY ČELNÍHO SOUKOLÍ S ŠIKMÝMI ZUBY

**Zdeněk Doležal \***

**Abstrakt:** V příspěvku jsou uvedeny ukázky výsledků měření dynamických vlastností reduktoru leteckého turbovrtulového motoru M601, získané v rámci vývojových prací na speciálním zkušebním stavu. Z uvedených experimentálních výsledků je zřejmé, že zdroje vnitřního vysokofrekvenčního buzení čelního soukolí s šikmými zuby nelze pokládat tak jako dosud ve všech známých publikacích jen za pouhé a relativně jednoduché funkce času. Tyto zdroje buzení jsou nesporně i velmi významnou funkcí síly zatěžující ozubení, což musí být při modelování vnitřní dynamiky čelních soukolí s šikmými zuby respektováno.

**Klíčová slova:** dynamika nelineárních soustav; kmitání ozubení; ozubení

### 1. ÚVOD

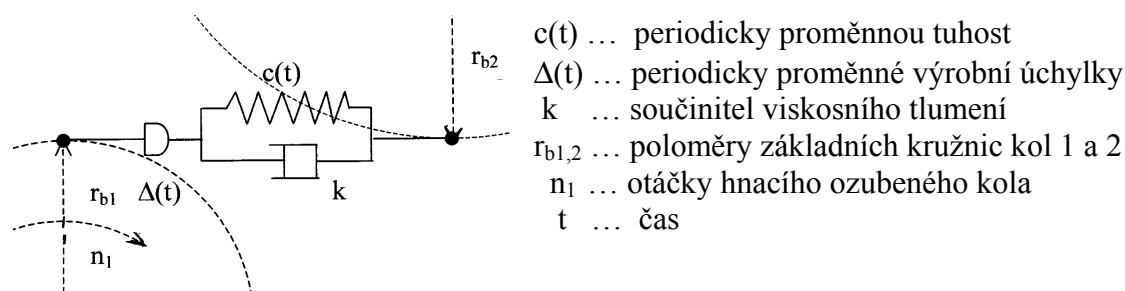
Podle nejnovější mezinárodní normy ISO 6336 „CALCULATION OF LOAD CAPACITY OF SPUR AND HELICAL GEARS“ [7] je požadováno, aby všechny výsledky výpočtů, týkající se zatížení, únosnosti, životnosti a spolehlivosti čelního ozubení, byly doplňovány indexovým označením  $A$  až  $E$ , definujícím úroveň metody použité k jejich získání. Nejpřesnější výsledky je požadováno označovat indexem  $A$ , nejméně přesné indexem  $E$ . Ale výpočtová metoda, která opravňuje docílené výsledky výpočtů označovat indexem  $A$ , dosud neexistuje. Takto přesné výsledky je možno v současné době dosahovat jen vysoce náročnými a nákladnými experimentálními postupy. Je tedy naprosto přirozené, že existuje snaha vyvíjet takové nové výpočtové metody, které by svou přesností směřovaly k zařazení do třídy  $A$ .

Stěžejním problémem v současné době již není modelování velmi složitých mechanických soustav s ozubenými převody, buzených jednoduchými vnitřními zdroji, generovanými přímo v záběrech ozubení. Takové výpočtové modely již delší dobu existují. Např. v lit. [3] bylo u dvoustupňového pseudoplanetového reduktoru leteckého turbovrtulového motoru modelováno nejen torzní, axiální a příčné či krouživé kmitání všech hřídelových částí, včetně vlivu poddajných a tlumených podpor s valivým uložením, ale i kmitání dynamicky poddajných věnců a disků ozubených kol včetně běžících vln s uzlovými průměry a uzlovými kružnicemi. Nejsložitějším a stále nedoručeným problémem všech těchto výpočtových modelů je samotné ozubení, s velmi složitou problematikou svého vnitřního buzení a tlumení generovaného přímo v záběrech spoluzabírajících párů zubů. A to samozřejmě včetně velmi významného interaktivního vlivu výrobních úchylek, poddajných deformací provozně zatíženého ozubení a případných výškových modifikací spoluzabírajících boků zubů.

\* Ing. Zdeněk Doležal, CSc., VZLÚ a.s., Beranových 130, 199 05 Praha 9  
tel. : (+420-2) 25115116 fax: (+420-2) 66310518 E-mail: vzlu @ vzlu.anet.cz

## 2. Současný stav

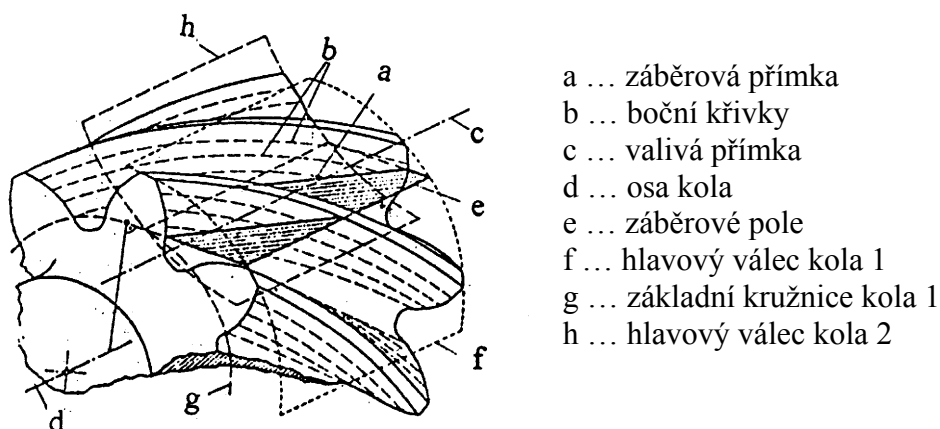
Problematicke modelování vnitřní dynamiky čelního ozubení je věnována značná pozornost ve výzkumu i v odborné literatuře již více než padesát let. V současné době se pohlíží na tuto problematiku převážně jako na ustálené kmitání dynamické soustavy buzené periodicky proměnnými výrobními úchylkami a periodicky proměnnou tuhostí spoluzabírajícího ozubení, které jsou funkcí jen času. Ve většině publikací jsou dynamické vlastnosti čelního ozubení s přímými či šikmými zuby simulovány relativně jednoduchým fyzikálním modelem, patrným z obr. 2.1, kde značí (blíže viz např. [8]) :



**Obr. 2.1** Původní fyzikální model čelního ozubení s přímými či šikmými zuby

Pro čelní ozubení s přímými zuby je v lit. [5] již používán zcela nový model, který plně respektuje interaktivní vlivy výrobních úchylek, poddajných deformací provozně zatíženého ozubení i výškových modifikací spoluzabírajících boků zubů.

V případě čelního ozubení s šikmými zuby je však dosud používán původní fyzikální model patrný z obr. 2.1, předpokládající platnost velmi zjednodušených (jen geometrickým výpočtem určených) záběrových poměrů. Takové záběrové poměry si můžeme znázornit v perspektivním pohledu tak jako na obr. 2.2, kde jsou:

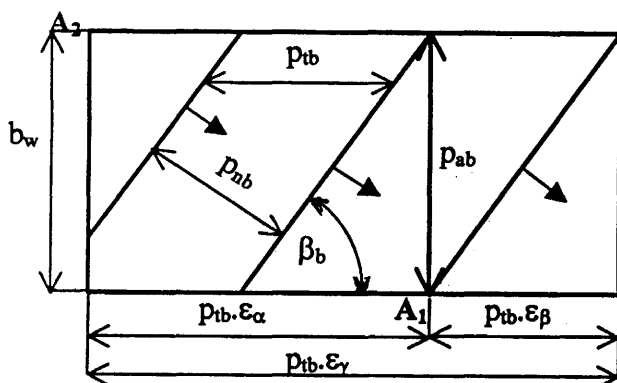


**Obr. 2.2** Perspektivní pohled na idealizovaný záběr čelního ozubení s šikmými zuby

nebo tak jako na obr. 2.3a a 2.3b, kde je záběr šikmých zubů znázorněn v čelní a záběrové rovině.

Jak je patrné z uvedených obrázků, dotyk spoluzabírajících párů šikmých zubů je přímkový a dotykové přímky svírají s povrchy základního válce úhel sklonu zubu na základním válci  $\beta_b$ . Dotykové přímky jsou od sebe vzdáleny o základní rozteče. V čelním směru o rozteč čelní  $p_{tb}$ , v normálním směru o rozteč normálnou  $p_{nb}$  a v axiálním směru o rozteč axiální  $p_{ab}$ . Při záběru ozubených kol dotykové přímky postupují přes záběrové pole ve směru toku energie naznačeného plnými šipkami, v našem případě od bodu  $A_2$  k bodu  $A_1$ , ležících v protilehlých krajních čelních

The diagram illustrates a mechanism with two links. Link 1 is the ground, and Link 2 is the rotating link. The instantaneous center P is the point where the two links have the same velocity. The centers of rotation are O1 and O2. The points A1, A2, B1, and B2 are marked on the links. The distance between O1 and O2 is labeled  $p_{1b}$ .

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{A_2 A_1}{p_{th}}$$

$$\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}_\alpha + \mathcal{E}_\beta$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\overline{A_2 A_1}}{p_{th}}, \quad \varepsilon_\beta = \frac{b_w}{p_{ab}}$$

( zde na obrázku  $\mathcal{E}_{\beta=1}$  )

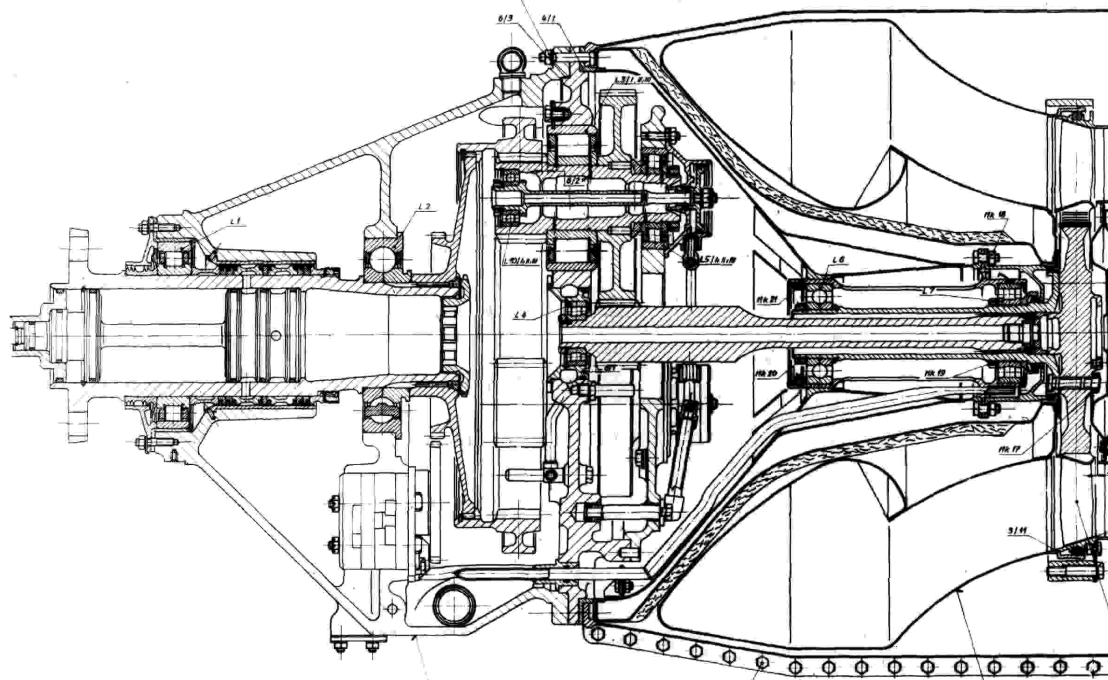
Pochopitelnou snahou všech konstruktérů je navrhovat šikmé ozubení tak, aby jeho zdroje vnitřního buzení byly minimální. V literatuře se však pro minimalizaci parametrického buzení, způsobeného periodicky proměnnou tuhostí spoluzabírajícího ozubení  $c(t)$ , uvádí rozporná doporučení. V některých publikacích (blíže viz. [8] a j.) se s odvoláním na experimentální výsledky doporučuje navrhovat šikmé ozubení tak, aby  $\varepsilon_\gamma$  = celé číslo. Naproti tomu v jiných publikacích (blíže viz. [7] a j.) se doporučuje, aby  $\varepsilon_\beta$  = celé číslo, kdy je celková délka dotykových úseček v záběrové rovině konstantní. Při modelování vnitřní dynamiky čelního ozubení s šikmými zuby se pak často při dodržení některého z těchto doporučení parametrický zdroj buzení zcela zanedbává.

Věrohodnost doporučení aby  $\varepsilon_\gamma$  bylo rovno celému číslu, lze vyvrátit způsobem uvedeným již v lit. [6]. Věrohodnost doporučení aby  $\varepsilon_\beta$  bylo rovno celému číslu, lze vyvrátit analýzou experimentálních výsledků uvedených dále v tomto příspěvku.

### 3. Výsledky experimentů

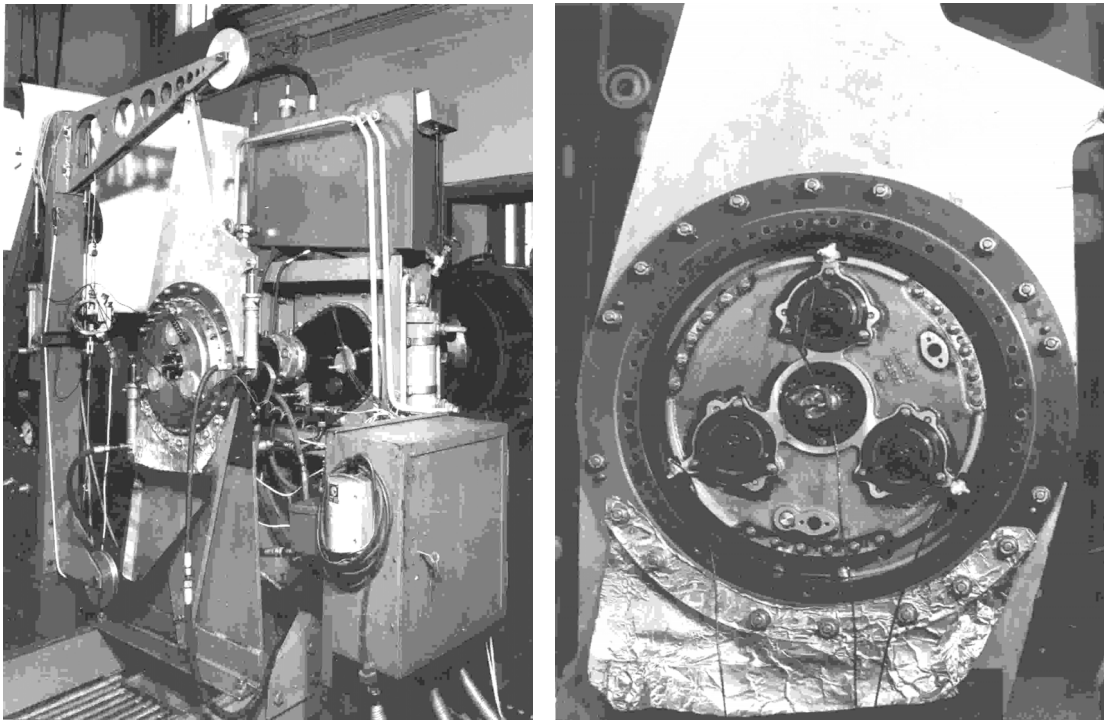
V rámci vývoje reduktoru leteckého turbovrtulového motoru M601, používaného v současné době především na letounu L410 – Turbolet, bylo na speciální reduktorové stanici prováděno experimentální ověřování jeho provozních, pevnostních a dynamických vlastností, viz lit. [4], početně řešených či uvedených v lit. [1], [2] a [3].

Konstrukční provedení reduktoru (včetně volné turbíny) je částečně patrné z obr. 3.1. Celkový převodový poměr reduktoru umožňuje snížit 31 000 ot/min. volné turbíny na 2080 ot/min. vrtule při přenášeném výkonu 500 až 600 kW.



**Obr. 3.1.** Reduktor leteckého turbovrtulového motoru M601 (vývojové provedení)

Zkušební reduktorová stanice, spočívající na principu uzamčeného stavu tvořeného dvěma souosými pseudoplanetovými reduktory se vzájemně propojenými vstupními i výstupními hřídelemi, je patrná z obr. 3.2. Zatěžování reduktorů přenášeným kroutícím momentem bylo prováděno diferenciálním způsobem, tj. natáčením a momentovým zatěžováním otočně uložené skříně jednoho z reduktorů. Toto zatěžování mohlo být nastavováno za klidu i za běhu dálkově ovládaným hydraulickým zařízením. Velikost nastavovaného kroutícího momentu byla určována z údaje tlaku v zatěžovacích hydraulických válcích, z reakce měřené speciálním tenzometrickým siloměrem a z údaje hydraulického „torkmetru“ reduktoru, který současně zajišťuje stereostatické větvení výkonového toku třemi dvoustupňovými pseudosatelity. K pohonu dvojice zkušebních reduktorů, z nichž jeden (pomocný) pracuje v režimu multiplikátoru, bylo použito elektrického dynamometru s výkyvným statorem, jehož otáčky byly regulovatelné pouze v rozpětí 0 ÷ 4 000 ot/min. Žádoucí zvýšení výstupních otáček bylo docíleno pomocným multiplikátorem o převodovém poměru 11,04, souose upevněným přímo na výkyvném statoru dynamometru, jehož momentová reakce byla měřena váhovým systémem „Toledo“. Takto upravený dynamometr poháněl centrální pastorek pomocného zkušebního reduktoru a umožnil přímé měření ztrátového kroutícího momentu zmařeného v obou zkušebních reduktorech. Otáčky byly měřeny pomocí čítače impulsů, bezdotykového elektromagnetického snímače a šestizubého kotouče na hřídelce pohánějící reduktory. K mazání byl použit syntetický olej B3V o kinematické viskozitě 4,99 cSt při 100°C.



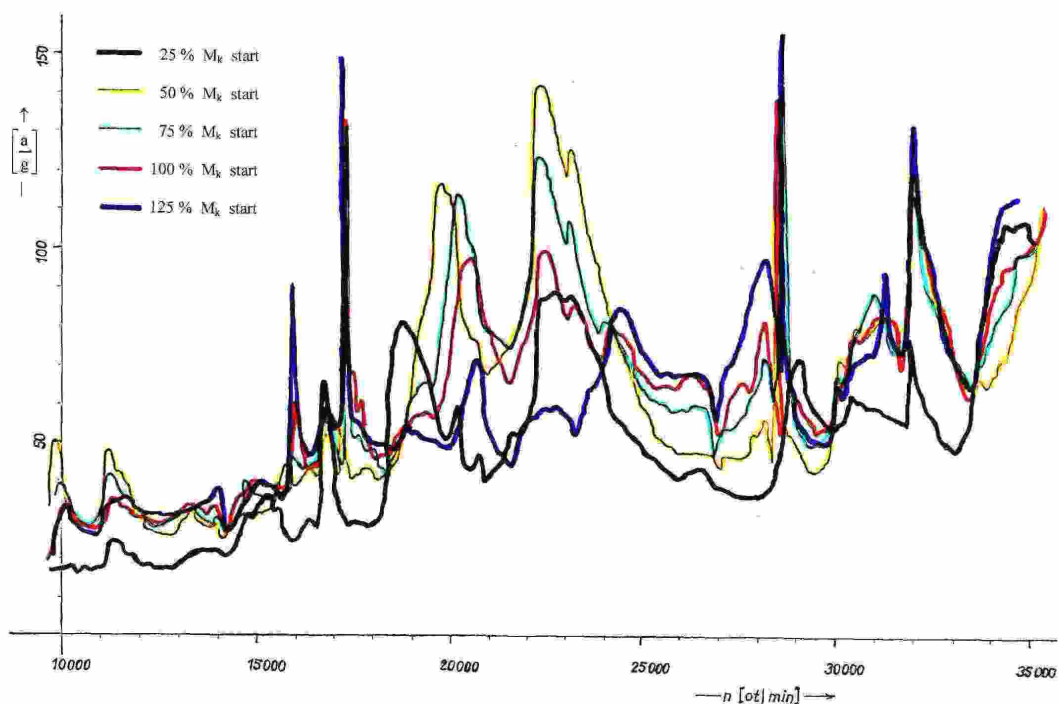
**Obr. 3.2** Pohledy na zkušební stanici reduktorů leteckého motoru M601

Pro dynamická měření byly použity tři akcelerometry B&K typu 4333, instalované radiálně nad malými ložisky předloh uvnitř reduktoru. (Viz obr. 3.2 vpravo) Jak celková hladina, tak jednotlivé harmonické složky odezev zrychlení byly měřeny a registrovány ve tvaru spojitých amplitudootáčkových grafů na souřadnicovém zapisovači. Harmonická analýza měřených odezev byla prováděna pomocí úzkopásmového souběžového filtru B&K 2020, jehož souběh byl řízen zvoleným násobkem základního kmitočtu periodického signálu z vysílače otáček vstupního hřídele reduktoru. Zvolený násobek kmitočtu periodického signálu byl nastavován prostřednictvím souběžové kmitočtové násobičky B&K 1901, doplněné vnějším děličem kmitočtu, navrženým jako nonius k násobičce. Příslušenstvím kmitočtové násobičky je převodník kmitočtu vstupního nebo násobeného signálu na stejnosměrné napětí, které bylo využito pro řízení hladinového nebo souřadnicového zapisovače.

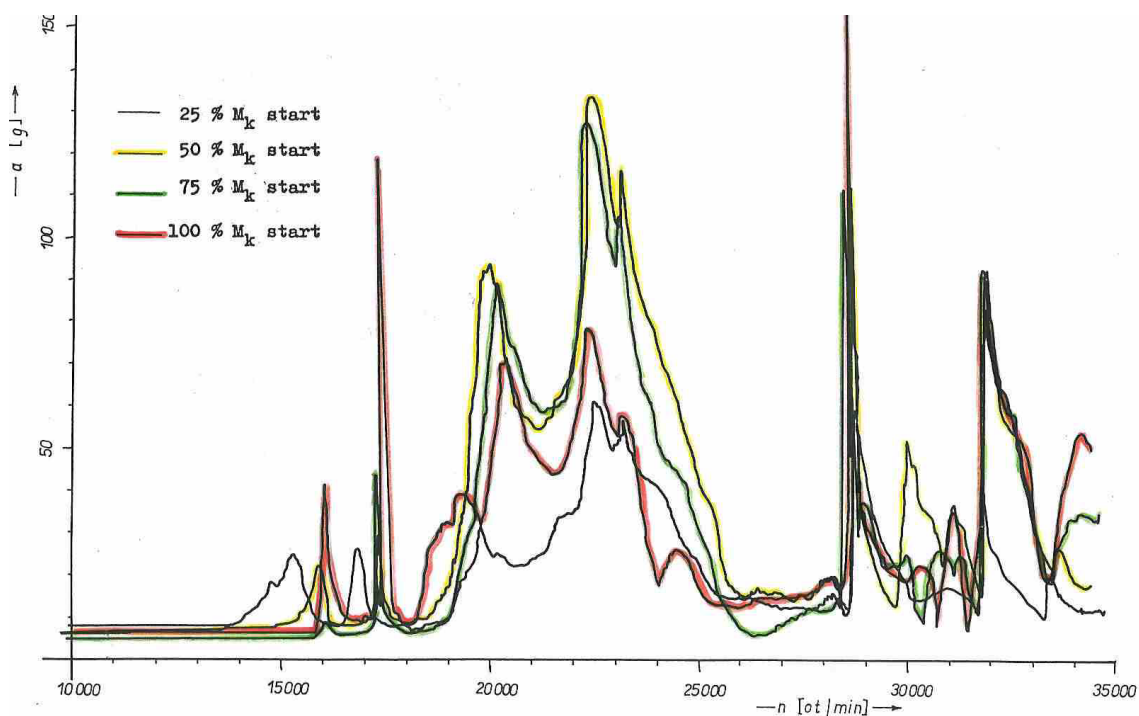
Cílem měření na zkušební stanici bylo rovněž získání spojitých záznamů odezev zrychlení v místech akcelerometrů v rozsahu  $10\,000 \div 35\,000$  ot/min při několika konstantních úrovních zatížení reduktoru přenášeným kroutícím momentem. Původně při 100 %, 75 %, 50 % a 25 % startovního (tj. maximálního) režimu. A to:

- a) celkové hladiny vibrací
- b) prvních pěti harmonických složek záběrové frekvence nízkootáčkového převodového stupně s přímým ozubením (s počty zubů  $z_3 = 20$ ,  $z_4 = -87$ )
- c) prvních dvou harmonických složek záběrové frekvence vysokootáčkového převodového stupně s šikmým ozubením (s počty zubů  $z_1 = 21$ ,  $z_2 = 72$  a  $\varepsilon_\beta = 1$ ).

Vybrané ukázky výsledných záznamů amplitudootáčkových odezev zrychlení v místě „1“ (tj. nad ložiskem horní předlohy patrné z obr. 3.2) při různém konstantním zatížení reduktorů přenášeným kroutícím momentem (rozšířeném při měření celkové hladiny vibrací proti původnímu záměru o režim 125%), jsou uvedeny na obr. 3.3 a 3.4. (Tyto vybrané ukázky jsou pro lepší přehlednost dodatečně kolorované).



**Obr. 3.3** Závislost celkové hladiny zrychlení reduktoru M601 v místě „1“ při různých úrovních přenášeného zatížení



**Obr. 3.4** Závislost složky zrychlení reduktoru M601 v místě „1“ - odpovídající první harmonické zubových záběrů šikmého ozubení - při různých úrovních zatížení

#### 4. Porovnání výsledků experimentů s výsledky výpočtů

Určování příčin jednotlivých rezonancí, patrných z obr. 3.3 a 3.4, bylo provedeno porovnáváním výsledků experimentů s výsledky dřívějších výpočtů, prováděných metodou komplexních dynamických poddajností. Tato výpočtová metoda, blíže popsaná v lit. [3], je založena na znalosti komplexních dynamických poddajností všech izolovaných dílů souosého planetového či pseudoplanetového převodu se dvěma centrálními koly a s libovolným počtem jednoduchých nebo dvojitých satelitů. V případě reduktoru motoru M601 byl výpočtový model lineární se 72° volnosti. Vnitřní buzení ve všech třech záběrech vysokootáčkového převodového stupně s šikmými zuby bylo simulováno s ohledem na splnění podmínky  $\varepsilon_\beta = 1$  pouze periodicky proměnnými výrobními úchytkami  $\Delta(t)$ . Z porovnávání výsledků experimentů a výpočtů provedeného již v práci [3] vyplynulo, že relativní rozdíly jednotlivých rezonančních otáček nepřevýšily v žádném případě hranici pěti procent. Ovšem porovnávané velikosti rezonančních amplitud byly nepříjemně rozdílné. Příčiny této rozdílnosti jsou patrné až z výsledků experimentů uvedených na obr. 3.3 a 3.4, převzatých z pozdější práce [4].

Při porovnávacích výpočtech byly postupně vynechávány dílčí zlomky dynamických poddajností, příslušné ověřovaným rezonančním otáčkám a tvarům kmitání. Tímto postupem bylo možno určit, že jednotlivé rezonanční amplitudy vybuzečné v záběrové frekvenci šikmého ozubení, patrné z obr. 3.4, jsou vyvolány při :

- $n \approx 16\,000$  ot/min ... axiální harmonickou vlnou velkého kola předlohy se třemi průměrovými uzly, běžící po kole proti smyslu jeho rotace
- $n \approx 17\,500$  ot/min ... axiální harmonickou vlnou velkého kola předlohy se třemi průměrovými uzly, běžící po kole ve smyslu jeho rotace
- $n \approx 20\,500$  ot/min ... zubovou rezonancí prvního převodového stupně, s dobře patrnou rezonanční závislostí na přenášeném zatížení
- $n \approx 23\,000$  ot/min ... prvním příčným tvarem kmitání předlohy, prvním torzním tvarem kmitání předlohy
- $n \approx 28\,500$  ot/min ... axiální harmonickou vlnou velkého kola předlohy se čtyřmi průměrovými uzly běžícími po kole proti smyslu jeho rotace a příčným tvarem kmitání předlohy
- $n \approx 32\,000$  ot/min ... axiální harmonickou vlnou velkého kola předlohy se čtyřmi průměrovými uzly běžícími po kole ve smyslu jeho rotace.

Pro technickou praxi je ovšem mimořádně významný poznatek, že šikmé ozubení s minimálními vibracemi a hlučností nelze navrhovat jen na základě velmi jednoduchého kritéria, tj. aby  $\varepsilon_\beta =$  celé číslo, doporučovaného v mnoha publikacích.

#### 5. Závěr

Z uvedených experimentálních výsledků je patrné, že zdroje vnitřního vysokofrekvenčního buzení čelního ozubení s šikmými zuby nelze pokládat tak jako dosud jen za pouhé a jednoduché funkce času či polohy záběru na záběrové úsečce. Tyto zdroje, realizované především periodicky proměnnou nelineární tuhostí spoluzabírajícího ozubení a periodicky proměnnou nerovnoměrností převodu způsobenou nejen výrobními úchytkami ozubení ale především poddajnými deformacemi provozně zatíženého ozubení, představují velmi složité funkce nejen času či polohy záběru, ale i síly zatěžující ozubení. Ovšem závisí li tyto zdroje na síle zatěžující ozubení, pak závisí samozřejmě i na mnoha dalších konstrukčních či výrobních parametrech šikmého ozubení, které ovlivňují jeho záběrové poměry a jeho výslednou záběrovou tuhost.

Z výsledků teoretických rozborů uvedených již v lit. [5] a [6] je patrné, že oba výše uvedené periodicky proměnné zdroje vnitřního buzení, případně jejich harmonické složky, významně závisí na záběrových poměrech spoluzabírajícího ozubení. Bylo rovněž prokázáno, že záběrové poměry reálného ozubení významně závisí jak na jeho zatížení, tak na jeho výrobních úchylných. Zatím co u nezatíženého čelního ozubení s přímými zuby se může vlivem výrobních úchylek součinitel záběru profilu snížit až na velikost  $\varepsilon_\alpha = 1$ , v případě čelního ozubení s šikmými zuby se může snížit dokonce až na velikost  $\varepsilon_\alpha = 0$ . Tuto vlastnost reálného ozubení ovšem původní fyzikální model čelního ozubení, uvedený na obr. 2.1, nerespektuje a ani respektovat nemůže. Zaváděné zjednodušení u původního modelu, vycházející jen z geometrických podmínek záběru, kdy se zanedbává interaktivní vliv poddajných deformací zatíženého ozubení, výrobních úchylek a výškových modifikací evolventních profilů, musí při modelování vnitřní dynamiky čelního ozubení s přímými i šikmými zuby vést k nesprávným výpočtovým výsledkům, zavádějícím závěrům, případně i k chybným doporučením pro technickou praxi. A to zcela jednoduše proto, že vlastnosti takto zjednodušeného modelu jsou příliš odlišné od vlastností reálného ozubení.

Z výše uvedených experimentálních výsledků bylo již v minulosti patrné, že stávající úroveň modelování dynamických jevů či silových poměrů v pohonových soustavách s šikmým ozubením značně zaostává za potřebami technické praxe. Toto poznání vyvolalo ve VZLÚ snahu vyvinout zcela nový model čelního ozubení, který by výše uvedené nedostatky zcela odstranil. Prvým postupným cílem bylo vyvinout nový model pro čelní ozubení s přímými zuby. Tento model je v současné době již téměř vyvinut a naprogramován. Dalším postupným cílem je vývoj nového modelu pro čelní ozubení s šikmými zuby. Z úvodní studie k této problematice [6] je patrné, že přechod z modelu přímého ozubení na model šikmého ozubení vyžaduje přechod z dosavadního 2-dimenzionálního modelu na mnohem složitější 3-dimenzionální model.

## 6. Literatura

- [1] DOLEŽAL Z.: Pevnostní výpočet ozubení reduktoru M 601 - I. část: kinematika a geometrie ozubení. Zpráva VZLÚ 24/68
- [2] DOLEŽAL Z.: Pevnostní výpočet ozubení reduktoru M 601- II. část: únosnost ozubení. Zpráva VZLÚ 28/68
- [3] DOLEŽAL Z.: Řešení planetových vysokootáčkových převodů metodou komplexních dynamických poddajností. Zpráva VZLÚ V-1319/78 Sbor. XI. konf. Dynamika strojů, str. 85-90, ČAV ÚT, Liblice, 1977
- [4] DOLEŽAL Z.: Experimentální zjišťování vlivů nelinearit na dynamické poměry u leteckého pseudoplanetového reduktoru. Zpráva VZLÚ V- 1412/80
- [5] DOLEŽAL Z.: Vliv zatížení čelního ozubení s přímými zuby na zdroje jeho vnitřního vysokofrekvenčního buzení. Zpráva VZLÚ V-1704/2000
- [6] DOLEŽAL Z.: Vliv výrobních úchylek čelního ozubení na jeho záběr a zdroje vnitřního vysokofrekvenčního buzení. Sborník 17. konference Výpočtová mechanika 2001, str.55-62, ZČU, Nečtiny, 2001.
- [7] INTERNATIONAL STANDARD ISO 6336: Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gears. Part 1, 2, 3, 5. 1996.
- [8] ŠALAMOUN Č., SUCHÝ J.: Čelní a šroubová soukolí s evolventním ozubením. Praha 1990, SNTL

Práce byla řešena s podporou grantového projektu GA ČR č. 101/00/0225 a dílčího projektu 6RC programu MPO „Rozvoj center špičkových průmyslových výrobků a technologií“.