



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

Matematický model membránového čerpadla pro biomedicínské účely.

Chlup H.¹, Kratochvíl Z.², Pražák J.¹, Musil J.¹

Abstrakt:

Předkládaný příspěvek se zabývá tvorbou zjednodušeného matematického modelu pneumaticky poháněného biomedicínského membránového čerpadla na základě experimentálně získaných vazeb. Dle nabytých poznatků byl sestavován matematický model čerpadla, ve kterém je na základě rozkladu záznamů signálů vstupních a pohonných veličin usuzováno na průběh veličin výstupních. Tento model se zabývá analýzou signálu sledovaných veličin. Na základě zvoleného algoritmu je možno vytvořit matematický model prvku, který je energetickým zdrojem ve sledovaném systému, a to rozbořem signálu vstupních, výstupních a pohonných veličin.

Klíčová slova:

pneumatické membránové čerpadlo, Bernoulliho rovnice, biomedicínské čerpadlo, matematický model biomedicínského čerpadla

Motivace:

Membránová čerpadla speciální konstrukce se užívají jako podpora nebo náhrada srdce. Práce ventilů a čerpadla se blíží fyziologii. Vykazují nízkou hemolýzu. Po dobu náhrady je třeba zachovat pulzační tok, což membránové čerpadlo splňuje. Při kontinuálním toku by během několika týdnů docházelo k remodelaci aorty.

Úvod:

Model byl vytvořen na základě experimentálně získaných časových průběhů snímaných veličin při předem zvolených a definovaných stavech v čerpadle a systému. Proměnné a veličiny vstupující do rovnic a modelu, které nebyly stanoveny experimentálně, byly získány výpočtem z průběhů veličin získaných právě experimentem. Všechny obdržené záznamy, většinou časové závislosti žádaných veličin, byly analyzovány a získány funkční závislosti změny jednotlivých veličin na změně stavu sledovaného systému. Vložením těchto funkčních závislostí jednotlivých veličin do připraveného zjednodušeného matematického modelu, byl získán funkční celek, kterým můžeme prognostikovat chování membránového čerpadla při jeho

¹ Ing. H. Chlup, RNDr. J. Pražák, CSc., MUDr. J. Musil, Ústav termomechaniky AV ČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8, chlup@it.cas.cz, prazak@it.cas.cz, musil@it.cas.cz

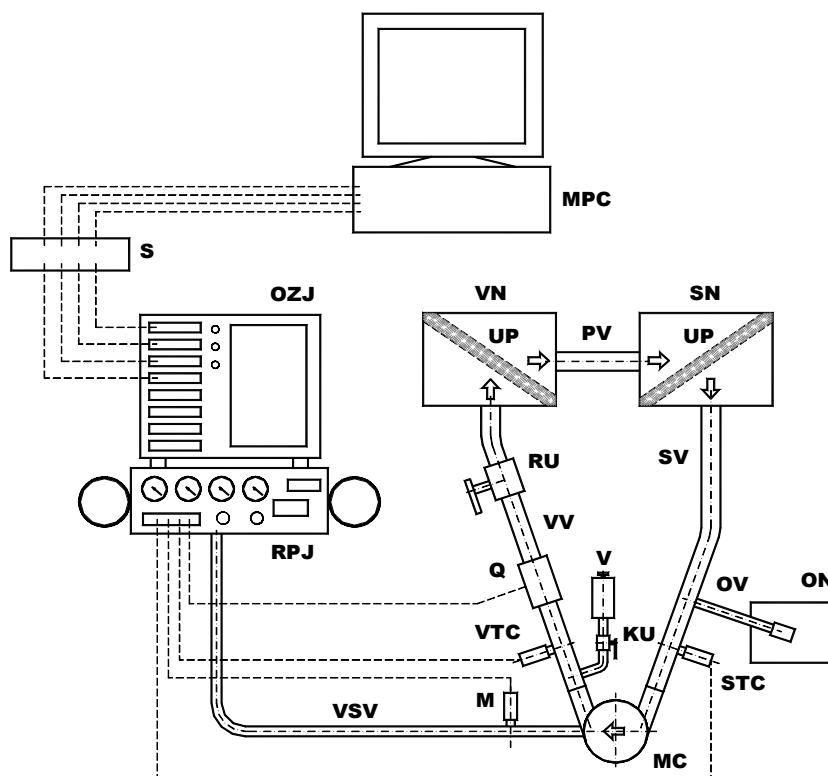
² Doc. Ing. Z. Kratochvíl, CSc., VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno

různých stavech. Tento přístup byl zvolen z důvodů velice obtížně definovatelné změny geometrie pracovního prostoru čerpadla v závislosti na čase. Lze říci, že na základě zvoleného algoritmu je možno více či méně úspěšně vytvořit matematický model libovolného prvku, který je energetickým zdrojem ve sledovaném systému, a to rozбором signálu vstupních, výstupních a pohonných veličin.

Schéma experimentálního okruhu:

Legenda:

SN	Sací nádrž	Q	Průtokoměr
UP	Ustalovací příčka	VV	Výtlačná větev
SV	Sací větev	RU	Regulační uzavěr
OV	Odpadní větev	VN	Výtlačná nádrž
ON	Odpadní nádrž	PV	Propojovací větev
STC	Sací tlakové čidlo	RPJ	Regulační pneumatická jednotka
V	Větrník	OZJ	Optická záznamová jednotka
KU	Kulový uzavěr	S	Sběrnice
MC	Membránové čerpadlo	MPC	Měřicí počítač
M	Manometr	VSV	Větev stlačeného vzduchu
VTC	Výtlačné tlakové čidlo	SN	Sací nádrž



Obr. 1.

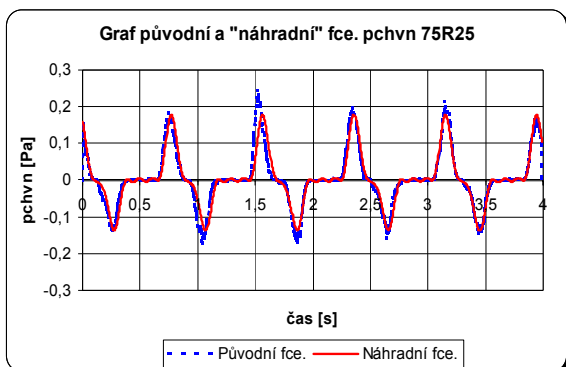
Metody a postupy:

Pro účely experimentu byli navrženy dvě experimentální linky. Okruhy byly sestaveny v laboratoři biomechaniky na Ústavu termomechaniky ČAV v Praze obr. 1. a v laboratoři biomedicínské techniky OHS V. Kaplana na VUT v Brně. Pro experimenty bylo jako media použito destilované vody bez příměsí. Tato náhrada je v souladu s literaturou [4, 5], která připouští modelování obecně newtonské krve v žilách a tepnách velkých světlostí (aorta) newtonskou kapalinou. Pohybujeme se v rozmezí světlostí 20 až 25mm. Byly prověřovány tepové frekvence 60, 75, 100, 120 tepů/min s vlivem i bez vlivu větrníku simulujícího částečně vliv pružnosti aorty. Pro každou tepovou frekvenci byly nastaveny 4 hodnoty odporu, simulujícího fyzickou zátěž, označené R0, R25, R50, R75. Písmeno R je značkou resistance. Číselná hodnota označuje stupeň uzavření regulačního uzávěru. Potom: R0=100% světlosti trubice, R25=27,8%, R50=55,6%, R75=83,3%. Pro měření tlaků byla použita absolutní tenzometrická tlaková čidla speciální výroby. Průtok byl sledován vrtulkovým průtokoměrem speciální výroby, kde byla snímána otáčková frekvence vrtulky pomocí Hallových sond.

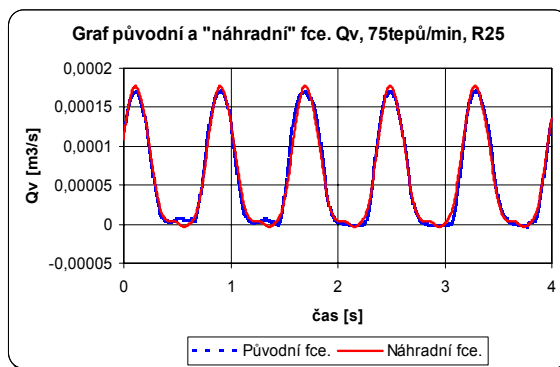
Experimentem byly získány časové průběhy následujících veličin: tlak na sání p_s , tlak na výtlaku p_v , tlak vzduchu p_{vz} , průtok na výtlaku Q_v . Frekvence snímání byla 200 Hz. Orientačně byly proměřeny časové průběhy veličin: vnitřní tlak v čerpadle p_{in} , průtok na sání Q_s . Z naměřených hodnot byly vytvořeny textový soubor v ASCII kódu, které byly dále zpracovány pomocí softwaru Matlab a Microsoft Excel.

Z experimentálně a početně získaných dat byly vytvořeny pomocí metody nejmenších čtverců (1) [7] „náhradní funkce“, které umožňovaly efektivnější zpracování signálů jednotlivých veličin, jejich vyhodnocování a tvorbu modelu.

$$\sum_{i=1}^n (F_{i, \text{experiment}} - F_{i, \text{náhradní}})^2 = \min. \quad (1)$$



Obr. 2



Obr. 3

Úprava naměřeného signálu byla obr. 2, 3, nezbytná především pro: získání délky jedné periody signálu, tj. jednoho pracovního zdvihu čerpadla, která byla stanovena z vyhledání dvou po sobě jdoucích minim získaného záznamu jakékoliv veličiny, vyhodnocení grafického záznamu časových změn měřených veličin v průběhu jednoho zdvihu čerpadla, výpočet časového průběhu rychlosti a zrychlení protékající kapaliny, stanovení zdvihového objemu čerpadla. Ze známého záznamu průtoku vypočteme průběh střední rychlosti (2) [1, 2, 3].

$$v(t) = Q(t)/S \quad (2)$$

Zrychlení kapaliny získáme výpočtem z průběhu rychlosti pomocí metody konečných diferencí (3). Pro výpočet průběhu zrychlení využijeme centrálních diferencí [9].

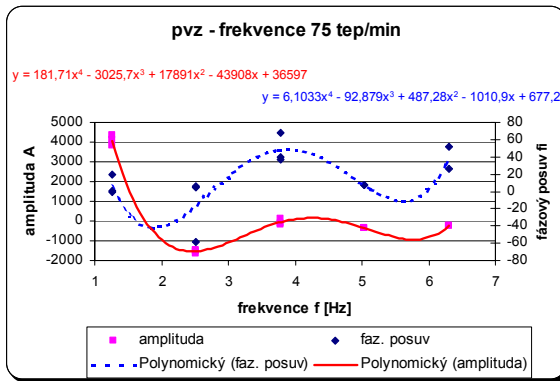
$$a(t)_i = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot (v(t)_{i+1} - v(t)_{i-1}) \quad (3)$$

Náhradní funkce byla řešena pomocí rozkladu periodických kmitů do Fourierovy řady kterou pro naši potřebu redukuje na tvar (4) [6, 7].

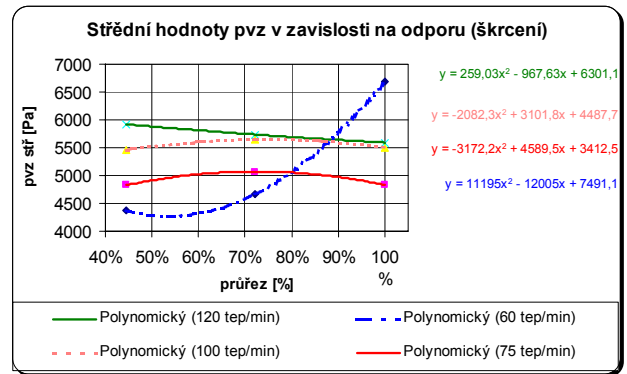
$$u(t) = u_{m0} + \sum_{i=1}^n [u_{mi} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot i \cdot t) + \varphi_i] \quad (4)$$

Je důležité správně stanovit základní frekvenci a první harmonickou složku, která je stěžejní pro správný rozklad signálů do periodických kmitů.

Vypočtené amplitudy u_{mi} a fázové posuvy φ_i jednotlivých superponovaných sinových průběhů dané veličiny byly při konstantní tepové frekvenci a různých nastaveních tělního odporu porovnány a byla stanoveny jejich funkční závislosti, kde jako proměnná vystupovala základní frekvence. Pro zvolenou tepovou frekvenci dané veličiny byl získán předpis pro amplitudu kmitů a fázové posuvy všech složek superponovaných sinových průběhů. Předpisy byly vytvořeny pomocí polynomů druhého až čtvrtého stupně obr. 4, 5. Střední hodnoty u_{m0} jednotlivých sledovaných veličin jsou závislé pouze na velikosti nastavení tělního odporu.



Obr. 4



Obr. 5

Vlastní zjednodušený matematický model byl vytvořen aplikováním Bernoulliho rovnice pro reálnou kapalinu (5) na sací a výtlačnou větev okruhu čerpadla a využitím rovnice kontinuity a jejich modifikací [1, 2, 3, 8].

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} - U_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} - U_2 + \int_1^2 a_t \cdot dl + Y_{zm1,2} + Y_{z1,2} \quad (5)$$

Byla provedena substituce místní ztrátové energie na tlakovou energii prostřednictvím tlakové difference (6).

$$Y_{zm} = \xi \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{\Delta p}{\rho} \quad (6)$$

Vztah pro zrychlení kapaliny v sací (7) a výtlačné (8) větvi čerpadla.

$$a_s(t) \cdot D_s = a_c(t) \cdot D_c \quad (7)$$

$$a_v(t) \cdot D_v = a_c(t) \cdot D_c \quad (8)$$

Rovnice kontinuity pro korelaci rychlostí v sací (9) a výtlačné (10) větvi čerpadla.

$$v_s(t) \cdot D_s = v_c(t) \cdot D_c \quad (9)$$

$$v_v(t) \cdot D_v = v_c(t) \cdot D_c \quad (10)$$

Náhradní zdvih membrány byl získán ze změny objemu náhradního tělesa – válce. Podstava válce byla vypočtena z reálného průměru vetknutí membrány. Měnící se parametr určující změnu objemu čerpadla v čase byla výška válce, označená x (11). Změna objemu v čase byla získána z reálného průtoku na sání membránového čerpadla.

$$x(t) = \frac{4 \cdot Q_s(t) \cdot \Delta t}{\pi \cdot D_c^2} \quad (11)$$

Výpočet integrálu zrychlení v Bernoulliho rovnici pro sací (12) a výtlačnou (13) větev.

$$\int_s^c a_t \cdot dl = a_s(t) \cdot \left(L_s + \frac{4 \cdot Q_s(t) \cdot \Delta t \cdot D_s}{\pi \cdot D_c^3} \right) \quad (12)$$

$$\int_c^v a_t \cdot dl = a_v(t) \cdot \left(L_v + \frac{4 \cdot Q_v(t) \cdot \Delta t \cdot D_v}{\pi \cdot D_c^3} \right) \quad (13)$$

V okruhu bylo zjištěno turbulentní proudění (vypočtené střední Re cca. 35000). Byl definován vztah pro ztrátovou energii třením po délce potrubí (14).

$$Y_{ZLv}(t) = \frac{0,316 \cdot L_v \cdot \left(\frac{4 \cdot Q_v(t)}{\pi \cdot D_v^2} \right)^2}{\sqrt[4]{\gamma \cdot \pi \cdot D_v} \cdot D_v \cdot 2} \quad (14)$$

Potenciální energie je reprezentována výškou vodních sloupců, v sací (15) a výtlačné (16) nádrži, nad kótou umístění tlakových čidel na sání a na výtlaku čerpadla. Výšky vodních sloupců jsou závislé na nastavení tělního odporu.

$$U_s = g \cdot h_s(R) \quad (15)$$

$$U_v = g \cdot h_v(R) \quad (16)$$

Veličina p_{mn} popisuje energetickou ztrátu, úbytek tlaku, která je potřebná pro „deformaci“ (prolomení) membrány. Velmi zjednodušeným způsobem zde supluje vlastnosti membrány. Tato veličina byla získána porovnáním tlakového spádu na čerpadle s tlakem vzduchu pohonné jednotky získaným experimentálním měřením před vstupem do pneumatické části čerpadla.

Do Bernoulliho rovnic dosazujeme časové průběhy jednotlivých veličin.

$$\begin{aligned} p_s &= p_s(t) & p_{vz} &= p_{vz}(t) & p_{mn} &= p_{mn}(t) & p_{chs} &= p_{chs}(t) & p_{chv} &= p_{chv}(t) & Q_s &= Q_s(t) \\ Q_v &= Q_v(t) & a_s &= a_s(t) & a_v &= a_v(t) & Y_{ZLs} &= Y_{ZLs}(t) & Y_{ZLv} &= Y_{ZLv}(t) \end{aligned}$$

Závěr:

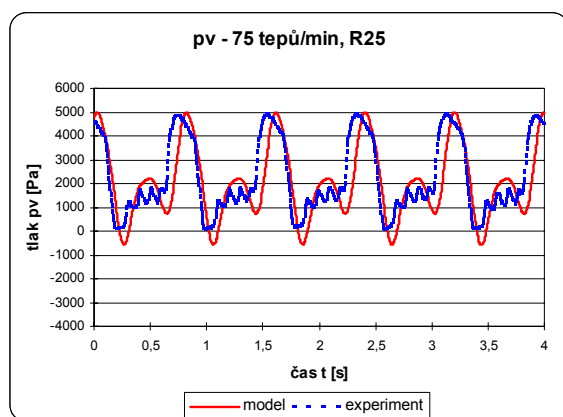
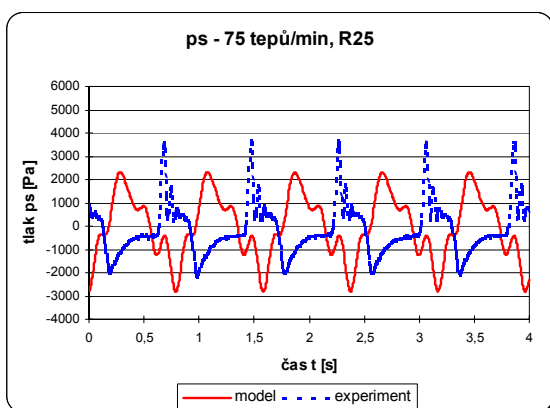
Model sací větve čerpadla (17) (sání) byl získán dosazením vztahů (7), (9), (12) do obecného řešení Bernoulliho rovnice pro reálnou kapalinu (5) a vymezením hranic platnosti rovnice obr. 6.

$$p_s = (p_{vz} - p_{mn}) + \frac{\rho}{2} \cdot \left(\left(\frac{4 \cdot Q_s}{\pi \cdot D_s \cdot D_c} \right)^2 - \left(\frac{4 \cdot Q_s}{\pi \cdot D_s^2} \right)^2 + 2 \cdot a_s \cdot \left(L_s + \frac{4 \cdot Q_s \cdot \Delta t \cdot D_s}{\pi \cdot D_c^3} \right) \right) + p_{chs} + Y_{ZLv} - U_s \quad (17)$$

Model výtlačné větve čerpadla (18) (výtlaku) byl získán dosazením vztahů (8), (10), (13) do obecného řešení Bernoulliho rovnice pro reálnou kapalinu (5) a vymezením hranic platnosti rovnice obr. 7.

$$p_v = (p_{vz} - p_{mn}) + \frac{\rho}{2} \cdot \left(\left(\frac{4 \cdot Q_v}{\pi \cdot D_v \cdot D_c} \right)^2 - \left(\frac{4 \cdot Q_v}{\pi \cdot D_v^2} \right)^2 - 2 \cdot a_v \cdot \left(L_v + \frac{4 \cdot Q_s \cdot \Delta t \cdot D_v}{\pi \cdot D_c^3} \right) \right) - p_{chv} - Y_{ZLv} - U_v \quad (18)$$

Zjednodušený matematický model je konstruován tak, aby pro celý řetězec výpočtu postačilo zadat střední hodnotu tlaku vzduchu, střední hodnotu, základní frekvenci, nastavení tělního odporu. Provedením experimentů byly nalezeny takové závislosti a provázanost jednotlivých veličin, že toto zadání pro získání přibližných průběhů tlaků na sání a výtlačku čerpadla postačuje.



Rozprava:

Dochází zde k mírnému fázovému posuvu modelových a experimentálně získaných záznamů. Zřejmě je to způsobeno odchylkou polohy modelových a experimentálních vztažných bodů. V modelu také nejsou zatím uvažovány ztrátové energie získané vlivem náhlého rozšíření a zúžení průtočného průřezu. Ztráty na chlopních byly získány výpočtem ze setrvačné síly kapaliny na plochu chlopně a následně byla určena ztrátová tlaková energie.

Pro zlepšení výsledků by bylo třeba experimentální okruh osadit větším počtem měřicích čidel, nebo jiným způsobem získat podklady pro energetickou bilanci okruhu a především bezprostředního okolí čerpadla. Tímto krokem by byla zvýšena shoda modelového záznamu s experimentem. Pro daný postup modelování je shoda modelu a experimentu přijatelná.

Literatura:

- [1] Macur M.: Úvod do analytické mechaniky a kontinua, Díl II., VUT Brno, Brno 1996
- [2] Medek J.: Hydraulické pochody, VUT Brno, Brno 2000
- [3] Bláha J., Brada K.: Příručka čerpací techniky, ČVUT, Praha 1997
- [4] Valenta J., Konvičková S.: Biomechanika srdečně cévního systému člověka, ČVUT, Praha 1997
- [5] Ottová-Leitmannová A.: Základy biofyziky, Alfa, Bratislava 1993
- [6] Brepta R., Půst L., Turek F.: Mechanika kmitání, Sobotáles, Praha 1994
- [7] Rektorys K.: Přehled užití matematiky, SNTL, Praha 1981
- [8] Tomáš F., Fleischner P.: Čerpadla, Sbírká příkladů část I., VUT Brno, Brno 1982
- [9] Teasař V.: Mezní vrstvy a turbulence, ČVUT v Praze, Praha 1991