



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svatka, Česká republika

VLNY V MATERIÁLECH S KUBICKOU ANIZOTROPIÍ

Jan Červ¹

Abstrakt: V příspěvku jsou studovány zákonitosti při šíření harmonické elastické vlny v kubickém prostředí. Nejprve jsou odvozeny vztahy pro fázové rychlosti a polarizační vektory kvazipodélných a kvazipříčných vln šířících se v obecném směru v rovinách typu $\{1\ 1\ 0\}$. Pak je v prostředí Matlab sestaven a odladěn program umožňující řešit numerickou cestou výše uvedenou problematiku pro obecný směr vlnového vektoru.

Klíčová slova: šíření elastických vln napětí, anizotropní prostředí s kubickou symetrií, objemové vlny

Úvod

Elastické vlastnosti mnoha konstrukčních materiálů jsou nezávislé na směru. Takové chování se nazývá izotropní a lze je popsat dvěma nezávislými konstantami. V izotropních tělesech, odhlédneme-li od interakcí s jejich hranicemi, se mohou šířit dva základní typy vln. Dilatační (podélné) vlny mající polarizaci rovnoběžnou se směrem šíření a smykové (příčné) vlny s polarizačním vektorem kolmým na směr šíření. S touto základní představou nevystačíme pokud pracujeme např. s lamináty, s krystaly kovů či polovodičů. Tyto látky vykazují různý stupeň anizotropie. Obecný případ anizotropie v rámci lineární teorie lze popsat 21 nezávislými konstantami. S růstem symetrie se tento počet nezávislých konstant postupně snižuje. U kubické symetrie lze elastické chování popsat třemi nezávislými elastickými konstantami. Analýza elastických vln v anizotropním prostředí je mnohem komplikovanější, nežli v prostředí izotropním. Pro daný směr šíření dostáváme vždy tři obecně různé fázové rychlosti a tři odpovídající vzájemně kolmé polarizační vektory. Na rozdíl od izotropního prostředí zde obecně nemáme ani čistě podélné ani čistě příčné vlny [1]. Tyto vlny pak nazýváme kvazipodélné (qL) resp. kvazipříčné (qT). Studium základních vlastností při šíření harmonické rovinné vlny prostředím s kubickou symetrií je předmětem tohoto příspěvku.

Formulace problému a řešení

Předpokládáme neohraničené, homogenní a lineárně elastické prostředí. Zobecněný Hookeův zákon lze psát ve známém tvaru

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \quad (1)$$

kde σ_{ij} je tensor napětí, ϵ_{kl} tensor deformace a c_{ijkl} jsou elastické koeficienty. S použitím zkrácených indexů [2] můžeme (1) psát v maticovém tvaru

¹ Ing. Jan Červ, CSc., Ústav termomechaniky AV ČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8, cerv@it.cas.cz

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & & & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & & & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & & & c_{36} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & & & c_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

kde $\sigma_1 \equiv \sigma_{11}$, $\sigma_2 \equiv \sigma_{22}$, $\sigma_3 \equiv \sigma_{33}$, $\sigma_4 \equiv \sigma_{23}$, $\sigma_5 \equiv \sigma_{13}$, $\sigma_6 \equiv \sigma_{12}$. Pro složky deformace platí $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_{11}$, $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_{22}$, $\varepsilon_3 \equiv \varepsilon_{33}$, $\varepsilon_4 \equiv 2 \varepsilon_{23}$, $\varepsilon_5 \equiv 2 \varepsilon_{13}$, $\varepsilon_6 \equiv 2 \varepsilon_{12}$. Rovněž platí známý vztah $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2$. Symbolem u_i jsou označeny složky vektoru posunutí. Předpokládáme, že osy X, Y, Z kubické krystalové symetrie jsou totožné s kartézskou soustavou souřadnic x_1, x_2, x_3 . V kubické symetrii jsou jedinými nezávislými koeficienty c_{11}, c_{12} a c_{44} . Přitom platí $c_{11} = c_{22} = c_{33}$, $c_{12} = c_{21} = c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32}$, $c_{44} = c_{55} = c_{66}$. Místo obecného maticového zápisu (2) dostáváme tento vztah mezi napětím a přetvořením

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Pohybové rovnice bez uvažování objemových sil mají v obecném případě tvar

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (4)$$

kde ρ je hustota materiálu. Rozepsáním (4) pro $i = 1$ a zavedením zkráceného označení dostáváme

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_6}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_5}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Dosadíme-li za složky napětí vystupující v (5) příslušné vztahy z (3), obdržíme po dalších úpravách rovnici

$$(c_{11} - 2c_{44} - c_{12}) \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_{44} \cdot \nabla^2 u_1 + (c_{12} + c_{44}) \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (6)$$

kde symbolem ∇^2 označujeme Laplaceův operátor a $\Delta = u_{i,i}$ je dilatace. Rovnice (6) je pohybová rovnice ve směru x_1 . Protože směry x_2 a x_3 jsou v kubické soustavě ekvivalentní s x_1 , dostáváme analogicky s (6)

$$(c_{11} - 2c_{44} - c_{12}) \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + c_{44} \cdot \nabla^2 u_2 + (c_{12} + c_{44}) \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (7)$$

$$(c_{11} - 2c_{44} - c_{12}) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + c_{44} \cdot \nabla^2 u_3 + (c_{12} + c_{44}) \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Rovnice (6), (7) a (8) jsou pohybové rovnice pro kubické prostředí, kdy krystalografické osy jsou totožné s osami souřadnic x_1, x_2, x_3 . Předpokládejme nyní, že řešení soustavy (6), (7) a (8) má tvar rovinné harmonické vlny

$$(u_1 \quad u_2 \quad u_3) = (U_1 \quad U_2 \quad U_3) \cdot \exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda}(a_j x_j - c \cdot t)\right], \quad (9)$$

kde U_1, U_2, U_3 jsou složky vektoru amplitudy posunutí (polarizace), λ je délka vlny a a_1, a_2, a_3 jsou složky jednotkového vektoru normály čela vlny v místě (x_1, x_2, x_3) . Symbolem „ c “ značíme fázovou rychlost. Lze lehce nahlédnout, že platí

$$a_j = \frac{k_j}{|\vec{k}|} = \frac{k_j}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)}, \quad (10)$$

kde k_j jsou složky vlnového vektoru. Dosazením předpokládaného řešení (9) do soustavy rovnic (6), (7) a (8) dostaneme po zdlouhavých úpravách homogenní soustavu rovnic pro U_1, U_2, U_3

$$[\alpha \cdot a_1^2 - \gamma] \cdot U_1 + \beta \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot U_2 + \beta \cdot a_1 \cdot a_3 \cdot U_3 = 0, \quad (11)$$

$$\beta \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot U_1 + [\alpha \cdot a_2^2 - \gamma] \cdot U_2 + \beta \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot U_3 = 0, \quad (12)$$

$$\beta \cdot a_3 \cdot a_1 \cdot U_1 + \beta \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot U_2 + [\alpha \cdot a_3^2 - \gamma] \cdot U_3 = 0. \quad (13)$$

Přitom jsme v (11), (12), (13) kvůli stručnosti označili

$$c_{11} - c_{44} = \alpha, \quad c_{12} + c_{44} = \beta, \quad \rho \cdot c^2 - c_{44} = \gamma. \quad (14)$$

Podmínka netriviálního řešení homogenní soustavy (11), (12), (13) vede po úpravách na rovnici

$$\gamma^3 - \alpha \cdot \gamma^2 + \gamma \cdot (\alpha^2 - \beta^2) \cdot (a_1^2 \cdot a_2^2 + a_1^2 \cdot a_3^2 + a_2^2 \cdot a_3^2) - (\alpha - \beta)^2 \cdot (\alpha + 2\beta) \cdot a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 = 0. \quad (15)$$

Rovnice (15) je kubická rovnice v $\gamma = \gamma(c^2)$. Její kořeny $\gamma_{1,2,3}$ nám dají pro každý směr představovaný jednotkovým vektorem $[a_1 \ a_2 \ a_3]$ obecně 3 různé rychlosti, jednu pro kvazipodélné a druhé dvě pro kvazipříčné vlny.

Výsledky

Podrobným průzkumem se ukázalo, že pro obecný směr šíření $[a_1 \ a_2 \ a_3]$ je vhodnější řešit daný problém dále numericky. Je ovšem velmi instruktivní analyticky řešit případ, kdy vlnový vektor leží v rovinách typu $\{1 \ 1 \ 0\}$. Předpokládejme tedy, že směr šíření je dán jednotkovým vektorem $[\cos \vartheta \ \sin \vartheta \ 0]$ (z kubické symetrie ovšem plyne platnost výsledků pro každý směr typu $\langle \cos \vartheta \ \sin \vartheta \ 0 \rangle$, $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$). To znamená, že vlnový vektor leží v rovině $(1 \ 1 \ 0)$ a svírá s osou x_1 úhel ϑ . Rovnice (15) má v tomto speciálním případě tvar

$$\gamma^3 - \alpha \cdot \gamma^2 + \gamma \cdot (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \cos^2 \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta = 0. \quad (16)$$

Je zřejmé, že $\gamma_1 = 0$ je pro každé $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$ jedním z kořenů rovnice (16). Dosadíme-li za $\gamma_1 = 0$, $a_1 = \cos \vartheta$, $a_2 = \sin \vartheta$, $a_3 = 0$ do soustavy (11), (12), (13) dostaneme pro každé $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$ podmínku $U_1 = U_2 = 0$ & U_3 je libovolné. Vidíme, že tento případ odpovídá čisté smykové vlně s polarizací ve směru $[0 \ 0 \ 1]$. Rychlost této smykové vlny je, vzhledem k (14), pro každé $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$ dána vztahem

$$c_T^{[0 \ 0 \ 1]} = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}. \quad (17)$$

Zavedeme-li pro stručnost následující označení

$$\alpha^2 \cdot \cos^2(2\vartheta) + \beta^2 \cdot \sin^2(2\vartheta) = \Phi(\vartheta), \quad (18)$$

pak další dva kořeny $\gamma_{2,3}$ rovnice (16) mají tento tvar

$$\gamma_{2,3} = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Phi(\vartheta)}. \quad (19)$$

Předpokládejme nejprve, že γ_2 je ten kořen z (19), který má znaménko $\oplus$. Stejným postupem jako tomu bylo v případě kořenu γ_1 dostaneme pro γ_2 jednotkový polarizační vektor

$$\frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} = \left[\begin{array}{c} \frac{\sqrt{\Phi(\vartheta)} + \alpha \cdot \cos(2\vartheta)}{\left(2\Phi(\vartheta) + 2\alpha \cdot \cos(2\vartheta) \cdot \sqrt{\Phi(\vartheta)}\right)^{\frac{1}{2}}} , \\ \frac{\beta \cdot \sin(2\vartheta)}{\left(2\Phi(\vartheta) + 2\alpha \cdot \cos(2\vartheta) \cdot \sqrt{\Phi(\vartheta)}\right)^{\frac{1}{2}}} , \ 0 \end{array} \right], \quad (20)$$

a příslušnou fázovou rychlost

$$c_L^2 = \frac{1}{\rho} \cdot \left\{ \frac{c_{11} + c_{44}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(c_{11} - c_{44})^2 \cos^2(2\vartheta) + (c_{12} + c_{44})^2 \sin^2(2\vartheta)} \right\}. \quad (21)$$

Analýzou vztahů (20) a (21) zjistíme, že popisují kvazipodélnou(qL) vlnu šířící se ve směru $[\cos\vartheta \ \sin\vartheta \ 0]$ s rychlostí danou (21) a s polarizací reprezentovanou jednotkovým vektorem (20). Předpokládejme nyní, že γ_3 je ten kořen z (19), který má znaménko $\ominus$. Analogickým postupem dostaneme pro γ_3 jednotkový polarizační vektor

$$\frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} = \begin{bmatrix} \frac{-\beta \cdot \sin(2\vartheta)}{\left(2\Phi(\vartheta) + 2\alpha \cdot \cos(2\vartheta) \cdot \sqrt{\Phi(\vartheta)}\right)^{\frac{1}{2}}} , \\ \frac{\sqrt{\Phi(\vartheta)} + \alpha \cdot \cos(2\vartheta)}{\left(2\Phi(\vartheta) + 2\alpha \cdot \cos(2\vartheta) \cdot \sqrt{\Phi(\vartheta)}\right)^{\frac{1}{2}}} , \ 0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

a odpovídající fázovou rychlost

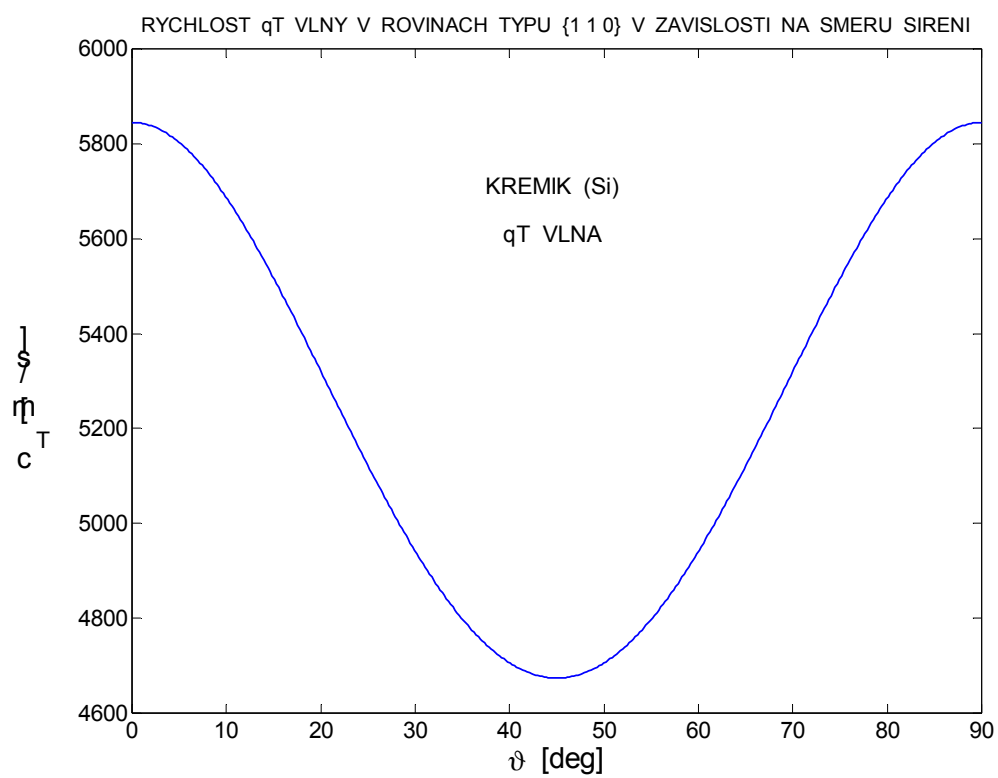
$$c_T^2 = \frac{1}{\rho} \cdot \left\{ \frac{c_{11} + c_{44}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(c_{11} - c_{44})^2 \cos^2(2\vartheta) + (c_{12} + c_{44})^2 \sin^2(2\vartheta)} \right\}. \quad (23)$$

Podrobným rozбором vztahů (22) a (23) zjistíme, že popisují kvazipříčnou(qT) vlnu šířící se ve směru $[\cos\vartheta \ \sin\vartheta \ 0]$ s rychlostí danou (23) a s polarizací reprezentovanou jednotkovým vektorem (22). Pouhým nahlédnutím lehce zjistíme, že všechny tři polarizační vektory, zde reprezentované jednotkovými vektory $[0 \ 0 \ 1]$, (20) a (22) jsou vzájemně kolmé. Na obr.1 a obr.2 jsou vyneseny rychlosti c_T (qT vlny, vztah (23)) a c_L (qL vlny, vztah (21)) v závislosti na úhlu ϑ vlnového vektoru pro všechny roviny typu $\{1 \ 1 \ 0\}$. Odchyly δ vektorů polarizace, daných vztahy (20) a (22) od směru šíření qL a qT vln jsou zobrazeny na obr. 3 a obr. 4. Všechny zde uvedené obrázky jsou vyneseny pro krystal křemíku s těmito elastickými koeficienty (vše je v jednotkách N / m^2): $c_{11} = 1.657 \cdot 10^{11}$; $c_{12} = 0.639 \cdot 10^{11}$; $c_{44} = 0.796 \cdot 10^{11}$. Přitom hustota $\rho = 2330 \text{ kg} / m^3$.

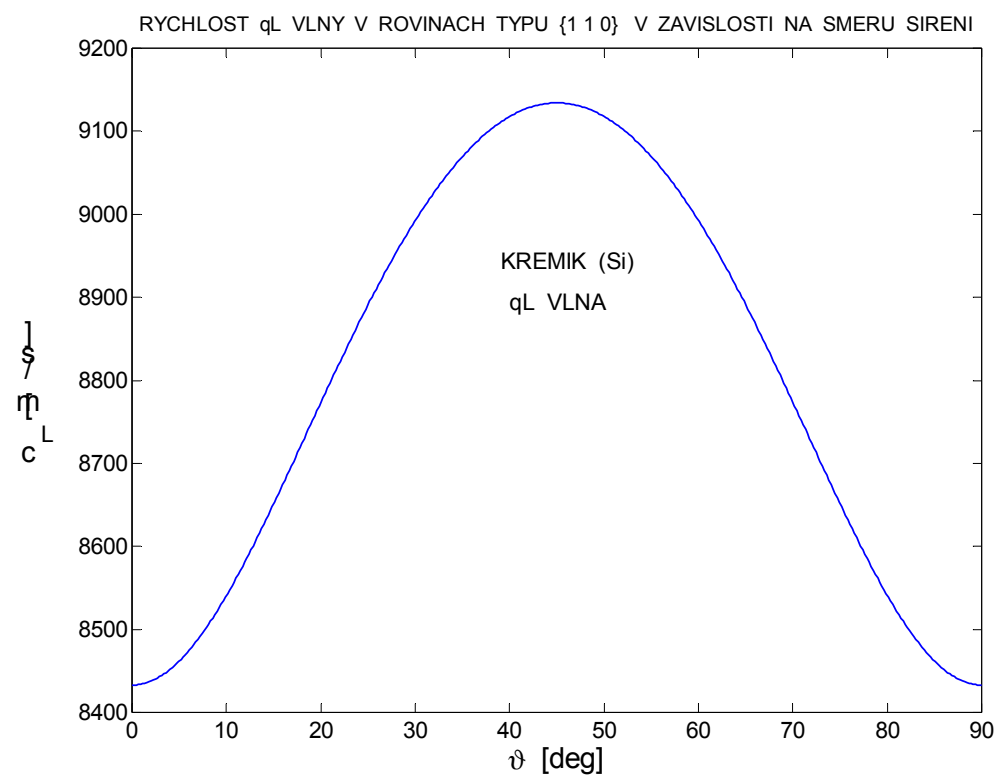
Pro obecný směr šíření daný jednotkovým vektorem $[a_1 \ a_2 \ a_3]$, kde všechny složky jsou obecně nenulové, píšme soustavu (11), (12), (13) v maticovém zápisu

$$(D - \gamma \cdot E) \cdot \vec{U} = 0, \quad (24)$$

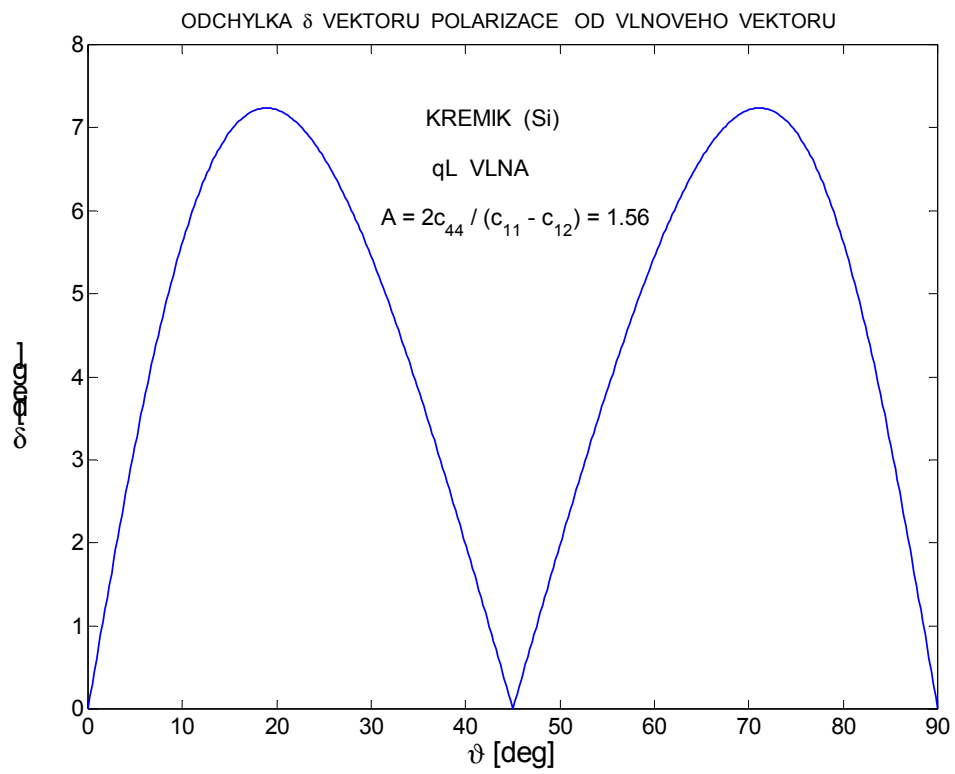
kde D je symetrická matice jejíž tvar plyne z (11), (12), (13) a E je matice jednotková. Rovnici (24) pak řešíme numericky v prostředí MATLAB. Je-li např. směr šíření dán



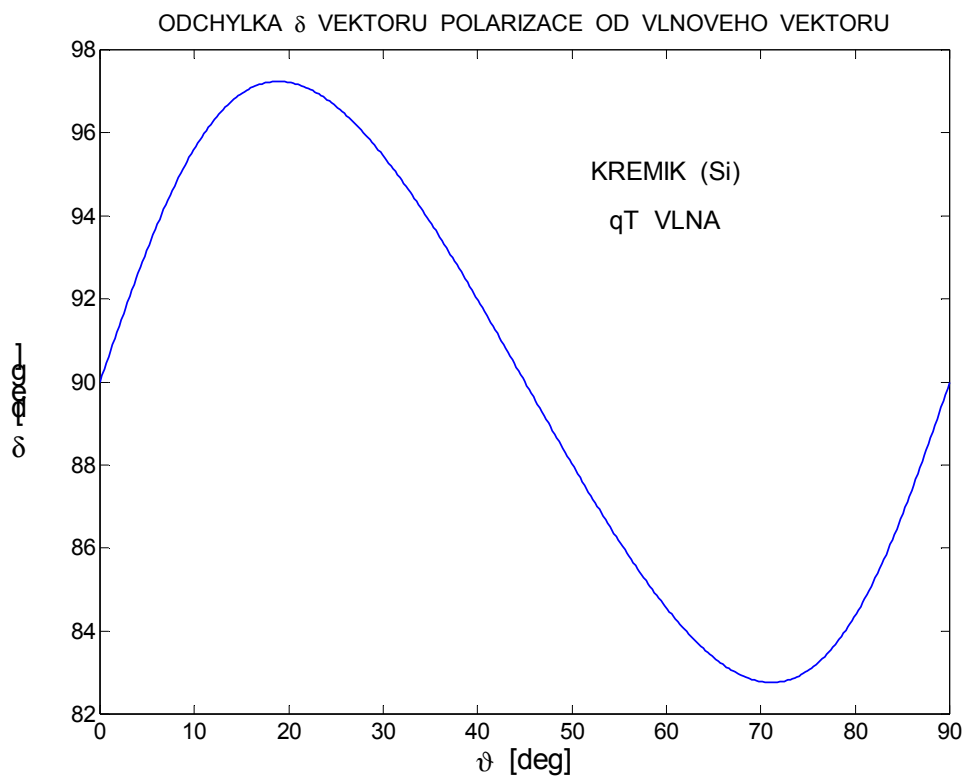
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

vektorem $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, pak v případě křemíku dostáváme čistou podélnou vlnu s rychlostí $c_L = 9356 \text{ m/s}$ a dvě čisté příčné (smykové) vlny se shodnou rychlostí $c_{T1} = c_{T2} = 5094 \text{ m/s}$. Jedna příčná vlna je polarizována ve směru $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0]$ a druhá ve směru $[0.408, 0.408, -0.816]$. Pro jiný směr šíření daný např. vektorem $[1/\sqrt{2}, 1/2, 1/2]$ dostáváme pro křemík jednu čistou smykovou vlnu s rychlostí $c_{T1} = 5292 \text{ m/s}$, s polarizací $[0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, druhá vlna má charakter kvazismykové vlny šířící se rychlostí $c_{T2} = 4977 \text{ m/s}$, s polarizací $[0.741, -0.474, -0.474]$, přičemž její polarizační vektor svírá s vlnovým vektorem úhel $\delta_T = 87.145^\circ$. Třetí vlnou je kvazipodélná vlna s rychlostí $c_L = 9309 \text{ m/s}$, polarizovaná ve směru $[0.671, 0.524, 0.524]$, který svírá se směrem šíření úhel $\delta_L = 2.855^\circ$.

Závěr

V práci jsou vyšetřovány zákonitosti při šíření harmonické elastické vlny v prostředí s kubickou anizotropií. Nejprve jsou odvozeny vztahy pro fázové rychlosti a polarizační vektory kvazipodélných a kvazipříčných vln šířících se v obecném směru v rovinách typu $\{110\}$. Pak je v prostředí Matlab sestaven a odladěn program umožňující řešit numerickou cestou výše uvedenou problematiku pro obecný směr vlnového vektoru. Jsou zde zároveň uvedeny konkrétní průběhy vyšetřovaných veličin pro krystal křemíku.

Poděkování: Práce vznikla za podpory grantu GA AV ČR reg.č. **A2076001**.

Literatura

- [1] J.D. Achenbach: Wave propagation in elastic solids. North-Holland Publ.Comp. Amsterdam, 1975
- [2] R.F.S. Hearmon: Úvod do teorie pružnosti anizotropních látek. SNTL, Praha, 1965