



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002
13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

**PROBLEMATIKA MEZNÍ ÚNAVOVÉ NAPJATOSTI
PŘI KOMBINOVANÉM NAMÁHÁNÍ**

M. Balda, J. Svoboda¹

Abstrakt: Příspěvek se zabývá stanovením mezní únavové rovinné napjatosti vyvolané synchronizovanými harmonickými zatěžovacími procesy. Rozsáhlými experimenty bylo prokázáno, že při soufázovém působení obou procesů generujících složky napětí $\sigma(\omega t)$, $\tau(\omega t)$ se mezní napětí mění podle zákona elipsy v rovině (σ_a, τ_a) bez ohledu na přítomnost případného vrubu. Jiná situace nastává, pokud je fáze složek napjatosti nenulová. Zkoušky při napjatosti $[\sigma(\omega t), \tau(\omega t + \pi/2)]$ ukázaly, že meznímu napětí již nevyhovuje kvadratický (eliptický) zákon, ale funkční předpis s obecným exponentem $c \neq 2$. Všechna měření byla zpracována nelineární regresí s využitím metody nejmenších čtverců, která umožnila jak vyrovnání experimentálních odchylek, tak i nalezení optimálních hodnot exponentů c a zpřesnění klasických mezí únavy v tahu-tlaku a krutu.

Klíčová slova: únava, rovinná napjatost, soufázové a rozfázované zatěžování

1. Úvod

Napjatost v tělesech může být obecně velmi složitá. Pokud poměr složek napětí od jednotlivých zatížení je v každém okamžiku stejný, označujeme tento stav napjatosti jako proporcionální. Pokud tomu tak není, jde o případ neproporcionálního namáhání. U proporcionálního namáhání se nemění směry hlavních napětí, pouze jejich velikost. U neproporcionálních namáhání jsou poměry mezi jednotlivými složkami napětí v čase proměnné. Proto je zde situace mnohem komplikovanější.

Při experimentálních pracích provedených v rámci projektu GAČR 101/99/0103 na pracovišti CDM Ústavu termomechaniky AVČR byl sledován vliv víceosého zatěžování se synchronizovanými složkami napětí (proporcionální způsob zatěžování) a vliv fázového posuvu (neproporcionální zatěžování) na únavovou pevnost hladkých a vrubovaných vzorků kruhového průřezu (plného a trubkového tvaru) z materiálu ČSN 41 1523.1. Výsledky, které byly publikovány v [1] a [2], poskytují některé poznatky, které lze využít v praxi při pevnostním hodnocení dynamicky namáhaných konstrukcí.

Hodnocení únavové životnosti reálných konstrukcí vystavených kombinaci dynamicky působících sil vychází obvykle z důkladné analýzy dynamické napjatosti na díle nebo matematickém modelu, na jejímž základě se získá informace o rozložení a úrovni

¹Prof. Ing. Miroslav Balda, DrSc. FEng, Ing. Jaroslav Svoboda, Ústav termomechaniky AVČR, Centrum diagnostiky materiálů, Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň, balda@cdm.it.cas.cz, svoboda@cdm.it.cas.cz

napětí v jednotlivých místech konstrukce. Při pevnostním hodnocení konstrukce se maximální pozornost věnuje tzv. kritickým místům, tedy místům s velkými změnami napjatosti v čase. Situace je o to složitější, že o životnosti dynamicky namáhaného konstrukčního uzlu nerozhoduje pouze úroveň napětí, ale také řada dalších materiálových a technologických faktorů, které mohou výsledek hodnocení významně ovlivnit.

O nalezení vhodné metodiky pro výpočet mezního napětí při víceosém zatěžování, která by byla aplikovatelná pro hladké i vrubované vzorky zatěžované soufázovým, proporcionálním zatížením, ale i neproporcionálním zatížením s fázovým posuvem jednotlivých složek, se v posledních letech pokoušela řada autorů, jejichž úsilí vyústilo v řadu různých hypotéz využitelných obvykle pouze pro harmonický způsob zatížení, a to nejčastěji pouze pro případ, kdy obě složky zatížení působí ve fázi. Pro případ nesoufázového zatěžování zejména u vrubovaných konstrukcí dávají téměř všechny dosud známé hypotézy větší či menší odchylky.

2. Únavová pevnostní hypotéza pro rovinnou napjatost

K pevnostnímu posouzení víceosé *statické* napjatosti se běžně používají hypotézy pojmenované podle jejich autorů. K často používaným patří pevnostní hypotézy podle Tresca a podle Hubera, Miesese a Henckyho (HMH). Lze je zapsat v zobecněném tvaru

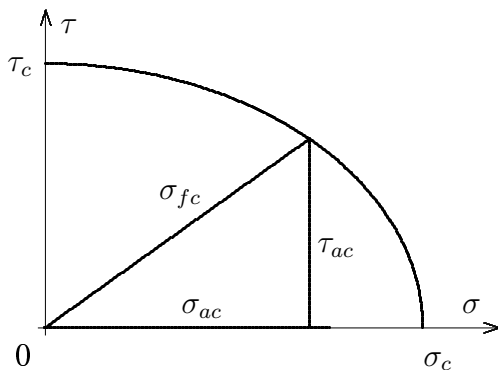
$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma^2 + k_c^2 \tau^2}, \quad (1)$$

kde σ_{red} je redukované napětí, které se porovnává s dovoleným napětím σ_D , a kde součinitel k_c^2 nabývá hodnoty 3 u hypotézy HMH a 4 u Tresca. Úpravou tohoto vztahu můžeme dojít k rovnici elipsy

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{\text{red}}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\frac{\sigma_{\text{red}}}{k_c}} \right)^2 = 1 \quad (2)$$

o poloosách σ_{red} a σ_{red}/k_c . Zvláštní situace nastává u *dynamické* napjatosti.

2.1 Soufázové zatěžování



Obr. 1: Rovinné mezní napětí

Předpokládejme, že vnější zatěžování vyvolává rovinnou napjatost o synchronizovaných soufázových složkách. Mezní stav únavy od normálového napětí o amplitudě σ_a při $\tau_a = 0$ nastane při mezní amplitudě $\sigma_{ac} = \sigma_{\text{red},a} = \sigma_c$, tj. pro amplitudu normálového napětí rovnou mezi únavy v tahu-tlaku. Podobně mezní stav únavy od smykového napětí o amplitudě τ_{ac} při $\sigma_a = 0$ nastane, bude-li $\frac{\sigma_{\text{red},a}}{k_c} = \tau_{ac} = \tau_c$. Pro mezní stav únavy při kombinovaném soufázovém zatěžování bude potom platit rovnice elipsy

$$\left(\frac{\sigma_{ac}}{\sigma_c} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{ac}}{\tau_c} \right)^2 = 1, \quad (3)$$

která má za poloosy meze únavy v tahu-tlaku σ_c a smyku τ_c . Z rozboru navíc vyplývá, že koeficient k_c v zobecněné pevnostní hypotéze pro dynamická namáhání (1) lze vyjádřit jako

$$k_c = \frac{\sigma_c}{\tau_c}, \quad (4)$$

což je obvykle hodnota mnohem menší, než u kterékoliv z klasických hypotéz pro statická namáhání. Označíme-li modul efektivního napětí jako

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \quad (5)$$

bude mezní efektivní napětí σ_{fc} jako bod na mezní křivce - elipse - vyjádřeno pro $\tau = \kappa \sigma$ ze složek σ_{ac} a τ_{ac} rovnicí

$$\sigma_{fc} = \sqrt{\sigma_{ac}^2 + \tau_{ac}^2} = \sigma_{ac} \sqrt{1 + \kappa^2}. \quad (6)$$

Stejným myšlenkovým postupem dojdeme k závěru, že rovnice podobná (1) platí i pro nehladké vzorky, vrubované součásti, u nichž původním mezím únavy σ_c a τ_c odpovídají mezní napětí $\sigma_c^* = \sigma_c \beta_\sigma$ a $\tau_c^* = \tau_c \beta_\tau$. Rovnice mezních efektivních napětí má proto tvar

$$\left(\frac{\sigma_{ac}}{\sigma_c^*} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{ac}}{\tau_c^*} \right)^2 = 1, \quad (7)$$

Tento vztah byl již doporučen Zennerem (viz [3]).

2.2 Nesoufázové zatěžování

Při soufázovém střídavém zatěžování, které označujeme jako *proporcionální*, protože okamžitý poměr $\sigma(t)/\tau(t)$ obou složek napětí v čase je konstantní, udržuje hlavní napětí stálý směr. Naproti tomu při rozdílných fázích synchronizovaných napětíových složek je tento poměr v každé čase jedné periody proměnný, a proto se takový stav označuje za *neproporcionální* (stejně jako u nesynchronizovaných procesů). Proměnnost tohoto poměru má za následek i kolísání úhlů hlavních napětí, což vede ke složité kumulaci poškození, a má i vliv na dosažitelná mezní napětí.

Problém vlivu fáze napětíových složek na mezní napětí studoval Lee [4]. Použijeme-li jeho závěry uvedené v [5], můžeme pro případ souměrného zatěžovacího cyklu psát rovnici (1) modifikovanou do tvaru

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_c} \right)^c + \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^c = 1, \quad (8)$$

s exponentem c závislým na fázovém zdvihu mezi napětíovými složkami

$$c = 2(1 + d \sin \varphi) \quad (9)$$

Lee ještě upravil tuto formuli pro respektování vlivu středního napětí. Protože byla tato modifikace kritizována jako těžko přijatelná a navíc jsme se jí ve svých experimentech nevěnovali, neuvádíme ji ani zde.

2.3 Experimentální ověření

V roce 1994 byla dokončena serie únavových zkoušek hladkých a vrubovaných vzorků při synchronizovaném zatěžování harmonickými procesy v režimu tah-tlak a krut [6]. Vzorky měly válcový tvar o průměru 20 mm a vrubované byly ještě opatřeny obvodovou U-drážkou se zaoblením kořene i hloubkou 1 mm. Vzorky byly vyrobeny z normalizačně žíhané konstrukční oceli ČSN 41 1523 o procentuálním složení

C	Mn	Si	P	S
0,18	1,29	0,50	0,28	0,14

Tab. 1. Složení materiálu vzorků

Vzorky se zatěžovaly harmonicky při frekvenci 5 Hz na zkušebním stroji Inova při poměrech $\kappa_i = \tau_{ai}/\sigma_{ai}$ jako prvků vektoru $\kappa = [0; 0, 2; 0, 5; 1; 1, 5; 3; \infty]$. Pro každý poměr κ_i se experimentálně určila únavová křivka, kterou pro $\kappa_i = 0$ je Wöhlerova křivka pro namáhání v symetrickém tahu-tlaku s mezní amplitudou σ_{ac} rovnou mezi únavy σ_c a podobně pro $\kappa_i = \infty$ se získala Wöhlerova křivka pro namáhání v krutu s mezní amplitudou τ_{ac} rovnou mezi únavy v krutu τ_c . Výsledky zpracování s využitím klasického přístupu přes redukováná napětí byly uvedeny jinde [2].

Dále jsou uvedeny výsledky získané jiným postupem. Hodnoty mezních efektivních napětí σ_{fc} [MPa] definovaných rovnicí (6) jsou uvedeny v tabulce (2) pro hladké (H) i vrubované (V) vzorky.

typ	$\kappa =$	0	0,2	0,5	1,0	1,5	3,0	∞
H	$\varphi = 0^\circ$	240.0	250.9	245.1	219.2	187.8	179.3	160.0
	$\varphi = 90^\circ$	240	232	212	198	184.6	173.3	160
V	$\varphi = 0^\circ$	110	106.1	110.1	120.2	110.3	113.0	130
	$\varphi = 90^\circ$	110	115.6	101.4	106.0	103.8	107.5	130

Tab. 2: Moduly naměřených efektivních mezních napětí σ_{fc}

3. Statistická metoda

Dosti velké odchylky efektivních napětí při kombinovaném namáhání od predikovaných hodnot dosažené při klasickém způsobu zpracování dat [2] ukazovaly, že jejich zdrojem může být nepřesnost v určení mezí únavy σ_c a τ_c . To vedlo k myšlence statistického zpracování všech dat uvedených v tabulce 2. Pro mezní efektivní napětí σ_{fc} („mez únavy při kombinovaném namáhání“) relativně dobře vyhovuje již zmíněná empirická závislost (3), která v zobecnění, které použil Lee [4] pro kombinované rovinné zatěžování s fázovým posunem mezi složkami, má tvar (8). Vektor dat v_i -té řádce tabulky $\sigma_{fc,i}(\kappa)$ vznikl vektorovým součtem vektoru normálových složek napětí $\sigma_{ac,i}$ a vektoru smykových napětí $\tau_{ac,i}$. Pro jejich j -té složky vyplývá z Pythagorovy věty podle obrázku 1 a rovnice (6)

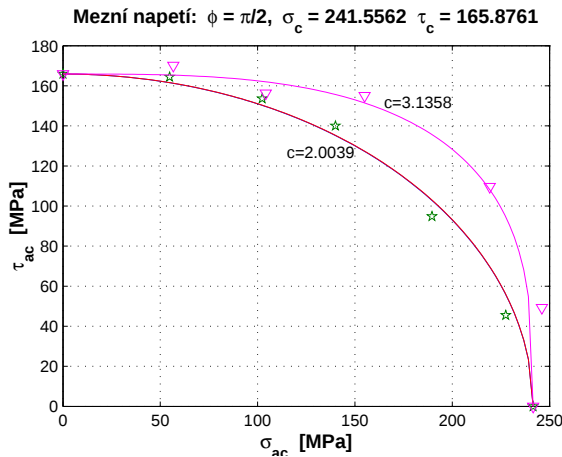
$$\sigma_{ac,ij} = \frac{\sigma_{fc,ij}}{\sqrt{1 + \kappa_j^2}} \quad \text{a} \quad \tau_{ac,ij} = \kappa_j \sigma_{ac,ij} \quad (10)$$

Za neznámé prohlásíme mez únavy v tahu σ_c , mez únavy v krutu τ_c a exponent c . Meze únavy sice již byly experimentálně určeny, ale není jim dána žádná přednost před ostatními daty, protože byly získány stejným způsobem. Pouze vstupují mezi ně jako první a poslední prvek vektoru $\sigma_{fc,i}$. Jejich zpřesněné hodnoty pak určíme řešením úlohy nejmenších čtverců minimalizací sumy kvadrátů reziduí S_i definované jako

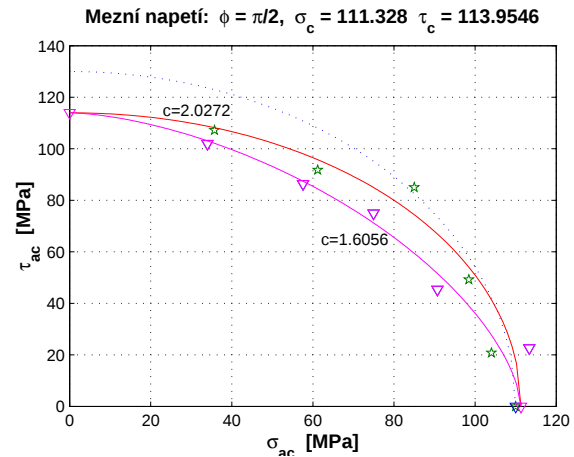
$$S_i = \sum_j |r_{ij}|^2 \quad \text{kde} \quad r_{ij} = \left(\frac{\sigma_{ac,ij}}{\sigma_{ci}} \right)^{c_i} + \left(\frac{\tau_{ac,ij}}{\tau_{ci}} \right)^{c_i} - 1 \quad (11)$$

Tímto způsobem stanovíme jak zpřesněné odhady mezí únavy tak i neznámý exponent pro každý typ vzorku a zatěžování. Výsledky tohoto zpracování jsou v diagramech 2 a 3. V obou diagramech patří znaky hvězdička soufázovému zatěžování ($\varphi = 0$) a trojúhelníky zatěžování s fází $\varphi = \pi/2$ mezi složkami. V druhém obrázku je vynesena tečkovaně i eliptická závislost platná pro původní meze únavy. Zdá se, že zejména mez únavy v krutu

byla původně nadhodnocena (na 130 MPa). Jak by vypadala mezní křivka při této hodnotě meze únavy v krutu ukazuje čárkovaná čára v obrázku 3.



Obr. 2: Mezní napětí při kombinovaném namáhání, hladký vzorek



Obr. 3: Mezní napětí při kombinovaném namáhání, vzorek s vrubem

Z nadpisů obrázků vyplývá, jak se původně používané meze únavy σ_c a τ_c změnily. Tato změna měla i příznivý dopad na velikost chyb – odchylek měření od závislosti (8). Z hodnot exponentů c uvedených v diagramech rovněž vyplývá, že eliptický model je takřka přesným popisem změny efektivních napětí pro soufázové zatěžování. Poněkud překvapující je zjištění, že odchylky od tohoto modelu vlivem nenulové fáze nejsou stejného smyslu: Pro nevrubovaný vzorek způsobila fáze $\varphi = \pi/2$ změnu exponentu na $c > 3$, zatímco u vrubovaného vzorku při stejné fázi klesl exponent pod standardní hodnotu $c = 2$. Příčinu tohoto rozdílu je možno hledat ve větším poklesu $\sigma_c \rightarrow \sigma_c^*$ vlivem vrubu, než tomu bylo u $\tau_c \rightarrow \tau_c^*$.

Experimenty potvrdily pravdivost Leeova výroku, že exponent c má být i funkcí fáze. Je ale zřejmé, že jeho formule (9) nemůže fyzikálně platit, protože exponent c by podle ní vycházel různý pro kladný a záporný fázový úhel. Znaménko tohoto úhlu však nemůže ovlivňovat mechanismus poškozování vyvolaného stacionárními procesy, mezi něž harmonické zatěžování dozajista patří. Proto jsme navrhli novou formuli pro exponent c , která tento nesoulad odstraňuje a navíc respektuje i vliv vrubu na únavové charakteristiky vzorku:

$$c = 2 + (1 - \cos \varphi) (p \Delta\beta + q), \quad \text{kde} \quad (12)$$

$$\Delta\beta = \frac{\sigma_c}{\sigma_c^*} - \frac{\tau_c}{\tau_c^*} = \beta_\sigma - \beta_\tau \quad (13)$$

Koeficienty β_σ a β_τ jsou známé vrubové součinitele. Pro soufázové zatěžování je $\varphi = 0$ a tedy $\cos \varphi = 1$, což způsobí, že exponent c bude roven 2 bez ohledu na to, zda je vzorek hladký anebo s vrubem. Pro $\varphi = 90^\circ$ je $\cos \varphi = 0$ a následkem toho se plně uplatní člen $(p \Delta\beta + q)$. U nevrubovaných vzorků je $\Delta\beta = 0$, takže výsledný exponent bude bez ohledu na tvar vrubu roven $c = 2 + q$. To znamená, že koeficient q vyjadřuje pouze váhu fázového posuvu na rozložení špiček hlavních napětí, a tím i na proces poškozování. Naproti tomu člen $p \Delta\beta$ postihuje vliv vrubu i materiálu na poškozování. Koeficient p je materiálovou konstantou respektující rozdílnost vlivu vrubu v tahu-tlaku a v krutu. Z provedeného rozboru je patrné, že pro postihnutí účinku fáze i vrubu byly přijaty nejjednodušší modely, a to konstantní pro fázi v koeficientu q a lineární pro vliv vrubu koeficientem p .

Dosadíme-li do formule (12) exponenty c_φ získané regresí, tj. $c_0 = 3,1358$ a $c_{90} = 1,6056$, dostaneme systém dvou lineárních algebraických rovnic pro koeficienty p a q . Z nich pak snadno zjistíme, že $p = -2,1423$ a $q = 1,1358$. Při použití těchto koeficientů můžeme vypočítat z uvedeného vztahu mezní napětí (na mezní křivce) pro daný typ vrubu a libovolnou fázi mezi synchronizovanými harmonickými zatěžovacími procesy s libovolným poměrem $\kappa = \tau_a / \sigma_a$. Je však zapotřebí znova zdůraznit, že experimentálně byly ověřeny mezní stavy únavy u hladkých a vrubovaných vzorků pouze pro fáze $\varphi = 0^\circ$ a $\varphi = 90^\circ$.

4. Závěr

Ze stručného přehledu dosažených výsledků je zřejmé, že problematika dvouosého synchronizovaného harmonického zatěžování součástí hladkých i vrubovaných je metodicky poměrně dobře zvládnutá. Byl učiněn pokus o objektivizaci formulí pro výpočet mezních únavových křivek včetně jejich parametrů, který vyhovuje všem experimentálně získaným závislostem a to jak pro soufázové (proporcionální) zatěžování, tak i pro neproporcionální zatěžování s fázovým úhlem mezi napětíovými složkami rovným 90° . Navržený postup poskytuje výsledky s odchylkami do 6 % od experimentálních dat v efektivních mezních napětích. Avšak dosud provedený objem zkoušek nedává právo prohlásit tuto hypotézu za zcela obecně platnou pro jakýkoliv vrub a fázový posun, stejně jako pro obecné zatěžování (např. náhodné).

Proto je nutné stávající metody dále sledovat a korigovat i pro různé materiály na základě experimentálních výsledků. To platí jak pro součásti hladké, tak i vrubované při obecném způsobu zatěžování. Je to způsobeno tím, že dosud nebyl nalezen spolehlivý obecný postup jak do výpočtu zahrnout efekt natáčení roviny maximálních smykových napětí na vznik a rozvoj trhliny. Proto nejvěrnější informaci *oskutečné* únavové pevnosti konstrukce dostaneme stále ještě aplikací vhodných únavových zkoušek na prototypch. Tento příspěvek chtěl ukázat, jak lze v jednodušších případech rovinné napjatosti získat kvalifikovaný odhad meze trvalé únavové životnosti.

Literatura

- [1] Svoboda J., Václavík M.: Únavové vlastnosti ocelí při víceosém namáhání. IN: Sborník kolokvia „Diagnostika a aktivní řízení“, Třešť, 2000
- [2] Svoboda J., Václavík M.: An influence of out-of-phase combined loading. IN: Sborník konf. „Inženýrská mechanika 2001“, Svratka, 2001
- [3] Liu J., Zenner H.: Berechnung der Dauerschwingfestigkeit bei mehrachsiger Beanspruchung – Teil 1. IN: Mat.-wiss. u. Werkstofftech. 24, 1993, pp 240-249
- [4] Lee S. B.: In: 'Multiaxial Fatigue' (ed. K. J. Miller, M. W. Brown) ASTM 853, American Society for Testing and Materials, PA, 1985, pp. 553-568.
- [5] Papadopoulos, I. V.: International Journal of Fatigue 16, 1994, August, pp. 377 - 384.
- [6] Kermes J.: Únava ocelí při kombinovaném namáhání teh-krut se synchronizovanými složkami i s fázovým posunutím včetně koncentrátoru napětí. Výzk. zpráva ŽČU ITS č. 124 VP, Plzeň, 1994