



KINKING OF FIBERS IN COMPOSITE AGREGATE

Martin J. VÁLEK, Petr P. PROCHÁZKA*

Summary: *Kinking or local buckling of fibers is very dangerous phenomenon, which can threaten the stability of composite structures. This is why mechanical engineers are intensively involved in this problem and try to find ways how to eliminate such an unpleasant situation. Winding reinforcements in composites offer a simple remedy: prestressing of fibers. This cannot be applied when treating classical composites. In our paper we solve push-in problem on a unit cell with periodic boundary conditions; the fiber is a straight cylinder and the matrix enwraps the fiber in such a way that instead of square we consider a hollow cylinder. Since the problem is geometrically and physically axisymmetric, we solve an axisymmetric problem. Moreover, no-tension and Mohr-Coulomb contact conditions are imposed along the interfacial zone. An example follows the theory.*

1. Úvod

Stabilita vláken v periodické struktuře kompositu je řešena v této práci pomocí Minmax formulace a Uzawova algoritmu. Problém je řešen jako kontaktní. Uvažujeme Signoriniho podmínky a tah nesmí překročit určenou mez pevnosti. Signoriniho problém s Coulombovým zákonem zůstává dlouhá léta z matematického hlediska otevřený, stejně tak jako existence jeho řešení. Hlavní potíž spočívá v určení regulárnosti normálových složek vektoru napětí podél kontaktní části. Pro překonání této obtíže použil J. Haslinger v [1] odlišné vyjádření formy Coulombova zákona. Analýza konvergence, tj. studium vzájemné relace mezi formulací problému kontinua a jeho aproximací konečnými prvky také dosud chybí. Z hlediska inženýrského tato nelineární úloha však dává dobré výsledky. V této práci je nabídnuto možné numerické řešení problému, založené na aproximaci konečnými prvky.

Variační formulace pro odvození mikromechanické báze, explicitně nelokálních fyzikálních rovnic dávajících do souvislosti průměrná napětí a přetvoření pro třídu náhodně lineárně pružných kompozitních materiálů je použita W. J. Druganem a J. R. Willisem v [2]. Autoři ukazují, že pro dvoufázové kompozity s isotropním a statisticky unifikovaným rozmístěním fází, které samy o sobě mají libovolný tvar a izotropii, dostáváme fakt, že lze určit velikost jednotkové buňky, která dává optimální vztahy mikro a makro-deformací a napětí. Tohoto faktu je zde využito v tom smyslu, že předpokládáme optimální buňku, na které řešíme problem.

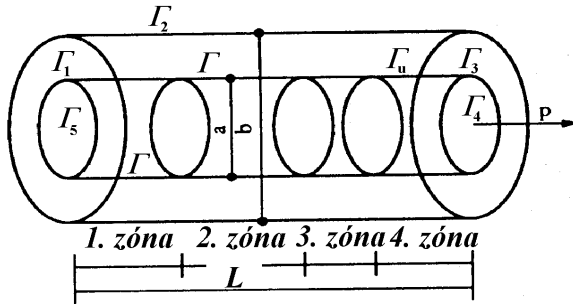
V [3] je řešen problem velmi podobný našemu. Rozdíl spočívá v tom, že ve zmíněné práci se jedná o vytahování vlákna z matrice (pull-out problem), kdežto v našem případě naopak vlákno do matrice zatlačujeme (push-in problem). Ve [4] se řeší odtrhávání (debonding) matrice od vlákna na jednotkové buňce. Používají se podobné kontaktní podmínky, jako v této práci, ačkoliv u nás se jedná

* Martin Válek, Petr Procházka, ČVUT v Praze, Fakulta stavební, katedra stavební mechaniky, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, Emails: jmv@terminal.cz, petrp@fsv.cvut.cz

o osový směr, kdežto ve zmíněné práci je úloha řešena v příčném řezu. V našem případě také nesledujeme celkové vlastnosti kompozitu, zajímá nás “pouze“, do jaké míry spolupůsobí vlákno s okolní maticí.

2. FORMULACE PROBLÉMU

Uvažujme problém dvou těles, pružného vlákna a plastizující se matrice, jejichž geometrie je popsána na obr. 1. První část (vlákno) zaujímá v nedeformovaném stavu válcovou oblast Ω' s hranicí Γ' a druhá část (matrice) je pokryta oblastí Ω'' s hranicí Γ'' , (dutý válec). Vnější zatížení a geometrie problému umožňují považovat problém jako axisymetrický. Obě části jsou situovány v kartézské soustavě souřadnic $0x_1x_2$; osa x_1 je umístěna v radiálním směru k sledovanému tělesu a osa x_2 je osou symetrie tělesa. Obecně předpokládáme, že napětí v normálovém směru na rozhraní vlákno - matrice není přípustné v tom smyslu, že obě části tělesa se pronikají (oboustranně se proniknou) v určité části společné hranice Γ . Naopak, je možné za předpokladu příliš velkých tahových povrchových sil (překračujících mez pevnosti v tahu), že dojde k rozpojení obou fází. Navíc jsou uvažovány zobecněné Mohr-Coulombovy kontaktní podmínky.



Obr. 1: Geometrie problému

Zatížení předpokládáme takto. Rovnoměrně rozložená síla p působí na jedné straně válce na vlákno, resp. na matrici, resp. na obě fáze. Síla způsobuje stlačení fází, na které působí na jejich čelo v normálovém směru; je uvažována rostoucí, ale aktuálně konstantní hodnotou. Samozřejmě zde máme symetrii kolem vodorovné osy x_2 týkající se geometrie i zatížení, takže můžeme řešit pouze dvoudimenzionální axisymetrický problém.

Posuny jsou předepsány vektorovou funkcí $\mathbf{u} = [u_1, u_2]$ proměnných $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Označme $\Omega \equiv \Omega' \cup \Omega''$. Restrikce funkcí na čárkovanou oblast, resp. dvoučárkovanou oblast je označena jednou, nebo dvěma čárkami, např. $\mathbf{u} / \Omega' = \mathbf{u}'$ a $\mathbf{u} / \Omega'' = \mathbf{u}''$. Hraniční posuvy jsou popsány následujícím způsobem. Podél hranice Γ_1 , stejně tak jako podél hranice Γ_5 , je zabráněno posuvům x_1 . Na hranici Γ_2 nejsou povoleny posuny ve směru x_2 . Nakonec na hranici Γ_3 jsou předepsány nulové síly, viz obr. 1. Označme množinu přípustných posuvů $\mathbf{u}$ na Ω vyhovující okrajovým podmínkám na vnější hranici a rovnající se $\mathbf{u}'$ na Ω' a $\mathbf{u}''$ na Ω'' písmenem V (obě hodnoty a první derivace jsou integrovatelné s kvadrátem a funkce zcela splňují hraniční podmínky).

Nejprve studujeme nelineární materiálové vlastnosti matrice v obecném tvaru s plastickým přetvořením samostatně a podmínky na rozhraní nebudeme zatím uvažovat. Vyjádřeme zobecněný Hookův zákon ve formě:

$$\varepsilon''_{ij}(\mathbf{u}'') = L''_{ijkl} \sigma''_{kl} + \mu''_{ij} \quad (1)$$

kde L''_{ijkl} jsou složky matice materiálové tuhosti, $\mu'' \equiv \varepsilon^{pl}$, je matice vlastních přetvoření (v tomto případě plastických přetvoření). Pro M-H-H plasticitu jsou splněny dodatečné podmínky:

$$\Phi(\sigma'') \leq 0; \mu''_{ij}(\varphi_{ij} - \sigma''_{ij}) \leq 0 \quad \text{pro každé } \varphi: \Phi(\varphi) \leq 0; \mu''_{ij} d\sigma''_{ij} = 0, \quad (2)$$

kde

$$\Phi(\sigma'') = \frac{1}{2} s''_{ij} s''_{ij} - k^2 = J_2 - k^2 \quad (3)$$

a k je materiálová konstanta, σ'' je napětí, s'' je deviátor tenzoru napětí v K , kde K je prostor přípustných symetrických tenzorů napětí, J_2 je druhý invariant deviátoru napětí.

Tyto podmínky musí být splněny pro plastické přetvoření v každém přírůstkovém kroku (G je smykový modul):

$$\begin{aligned} \mu'' &= \varepsilon^{pl} = 0 & \text{pro } \Phi < 0 \\ \mu'' &= \varepsilon^{pl} = 1 : (2G) (\sqrt{J_2} - k) : \sqrt{J_2} & \text{pro } \Phi = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Zavedme následující prostory:

$$\begin{aligned} S &= \{ \tau \in K; \Phi(\tau) \leq 0 \} \\ M &= \{ \tau \in K; \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{v } \Omega''; \tau_{ij} n_j = p'_{i} \} \end{aligned}$$

kde p'_{i} jsou složky povrchových sil, n_j jsou složky jednotkové normály.

Z duálního variačního principu vyplývá, že řešení našeho problému, tj. nalézt u a σ na Ω , můžeme obdržet minimalizací funkcionálu:

$$D(\sigma'') = \frac{1}{2} A(\sigma'', \sigma'') - \int_{\Gamma''} \bar{u}''_i \sigma''_{ij} n''_j d\Gamma$$

na množině $\sigma'' \in S \cap M$, o níž předpokládáme, že není prázdná. Γ''_u je částí Γ'' , kde pole posuvů $u'' = \bar{u}''$ je dané. Bilineární forma $A(.,.)$ je formulována takto (A se shoduje s elastickou materiálovou maticí tuhosti – tenzorem čtvrtého řádu):

$$A(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} A_{ijkl} \sigma_{ij} \tau_{kl} d\Omega$$

Použitím Fenschelovy transformace, [5], a cylindrických souřadnic dostaneme vnitřní energii na Ω'' takto:

$$2\pi \int_{\Omega^+} (\varepsilon'' - \varepsilon^{pl})^T \mathbf{L}'' (\varepsilon'' - \varepsilon^{pl}) x_l dx_l dx_2$$

kde ε^{pl} splňuje (4).

Nyní zahrneme také podmínky na rozhraní. Předpokládejme, že se pohybujeme v oblasti platnosti teorie malých deformací, pak je postačující formulovat základní přechodové podmínky následujícím způsobem (Signoriniho podmínky):

$$[\mathbf{u}]_2 \equiv u_2' - u_2'' \leq 0 \quad \text{na } \Gamma \quad (5)$$

Označme

$$H \equiv \{\mathbf{u} \in V; [\mathbf{u}]_2 \leq 0 \quad \text{na } \Gamma\}.$$

Množina H je kužel přípustných posuvů splňujících základní okrajové a kontaktní podmínky.

Víme, že oblast Ω je rozdělena na dvě části Ω' a Ω'' . Ponecháme napětí a deformace v těchto částech, které jsou zatíženy separátně a v tomto okamžiku jsou oddělené. Pak pro vektor kontaktních sil $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ musí platit:

$$\lambda' + \lambda'' = 0. \quad (6)$$

Celková energie J této soustavy je

$$J(\mathbf{u}, \lambda) = \Pi(\mathbf{u}) - I(\lambda, \mathbf{u}), \quad \Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad (7), (7a)$$

$$I(\lambda, \mathbf{u}) = 2\pi a \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma^i} (\lambda_i [\mathbf{u}]_i + \{(\lambda_2^+ - \lambda_2^-) - \lambda_2^+\} [\mathbf{u}]_2) d\Gamma, \quad [\mathbf{u}]_k \equiv u_k' - u_k'', \quad k = 1, 2 \quad (7b)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 2\pi \int_{\Omega'} (\varepsilon')^T \mathbf{L}' \varepsilon' dx_1 dx_2 + \\ + 2\pi \int_{\Omega''} (\varepsilon'' - \varepsilon^{pl})^T \mathbf{L}'' (\varepsilon'' - \varepsilon^{pl}) x_l dx_l dx_2, \quad (7c)$$

$$\varepsilon^T = \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{u_1}{x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right\}, \quad (8)$$

a $\mathbf{L}$ jsou matice pružnostních konstant, Ω je oblast vytvořená součtem všech podoblastí. Koeficient 2π musí být uveden protože se jedná o kruhovou symetrii. Je nezbytné podotknouti, že podle našich předpokladů je Γ_4 dvourozměrná plocha (zatímco $d\Gamma_4$ je diferenciál plochy) a síly v axisymetrickém problému závisejí na poloměru. V (7b) se předpokládá, že kontaktní síly jsou aproximovány po kontaktních prvcích Γ^i , $i = 1, \dots, n$. Symbol $(.)^+$ označuje kladnou část argumentu.

Abychom dokončili formulaci našeho kontaktního problému, soustředíme se na aproximační řešení. Posuny jsou opět popisovány vektorovou funkcí $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ proměnné $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Povrchové

síly na okrajích částic jsou označeny $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$. Za předpokladu teoriech malých deformací bude dostačující formulovat hlavní podmínky na kontaktu následujícím způsobem (Signoriniho podmínky):

$$[\mathbf{u}]_2 \equiv u_2' - u_2'' \leq 0 \text{ skoro všude na } \Gamma^i, \quad (9)$$

kde Γ^i , $i = 1, \dots, n$ jsou nyní okraje (hranice) mezi přilehlými částicemi, u_2 je normálový posuv, i probíhá všechny společné strany částic, n je počet společných prvků na kontaktu.

Označme

$$K \equiv \{\mathbf{u} \in V; [\mathbf{u}]_2 \leq 0 \text{ skoro všude na } \Gamma^i, i = 1, \dots, n\}$$

Množina K je kužel dovolených posunů, které vyhovují geometrickým okrajovým podmínkám a podmínkám na kontaktu.

Zavedme prostor přípustných povrchových sil Λ , na Γ^i , pro *Problém*:

$$\Lambda \equiv \{\lambda \text{ je kvadraticky integrovatelná vektorová funkce na } \Gamma^i,$$

$$\text{jestliže } u_2' = u_2'' \text{ na } \Gamma^i, \text{ pak } \lambda_2 < 0 \text{ na } \Gamma^i;$$

$$\text{jestliže } |\lambda_1| \leq \tau_b - \lambda_2 \tan \phi \kappa(\lambda_2), \text{ pak existuje kladná konstanta } \alpha; \lambda_1 = -\alpha[\mathbf{u}]_1,$$

$$\text{jestliže } \lambda_2 > \lambda_2^+, \text{ pak } \lambda_1 = \lambda_2 = 0\} \quad (10)$$

kde λ_2^+ je pevnost v tahu, ϕ je úhel vnitřního tření a κ je zobecněná Heavisideova funkce, mající hodnotu nula pro kladné argumenty a je rovna jedné pro záporné argumenty.

Nyní můžeme tuto úlohu formulovat ve formě lagrangeových multiplikátorů λ :

Je třeba najít dvojici $\{\mathbf{u}, \lambda\}$ tak, že $\mathbf{u} \in K$ a $\lambda \in \Lambda$ a

$$J(\mathbf{u}, \lambda) \leq J(\mathbf{w}, \lambda), \quad \text{pro všechny } \mathbf{w} \in K, \quad (11)$$

a

$$I(\eta, \mathbf{u}) \leq I(\lambda, \mathbf{u}), \quad \text{pro všechny } \eta \in \Lambda, \quad (12)$$

Tato formulace vede na velmi rychlý Uzawův algoritmus, který užíváme v upravené verzi také v této práci.

3. ŘEŠENÍ METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ

Z předchozího paragrafu můžeme usuzovat, že problém je lineární v každé oblasti Ω' a Ω'' , respektive v každém stadiu pevných hodnot ε^{pl} . Linearita řešení je porušena podél kontaktní plochy Γ , kde podmínky spojitosti posuvů již nejsou nezbytně platné po celé této hranici, pouze podmínky rovnováhy (6) zůstávají v platnosti.

Řešení axisymetrického problému po diskretizaci hranic obou oblastí na elementy s lineárním rozdělením napětí vede na řešení dvou lineárních algebraických systémů na každé podoblasti:

$$\mathbf{K}' \mathbf{u}'_f = \mathbf{f}', \quad \mathbf{K}'' \mathbf{u}''_f = \mathbf{f}'' \quad (13)$$

a také

$$\mathbf{u}'_{\lambda} = \mathbf{D}'_{\lambda} \boldsymbol{\lambda}', \quad \mathbf{u}''_{\lambda} = \mathbf{D}''_{\lambda} \boldsymbol{\lambda}'', \quad \mathbf{U}'' = \mathbf{D}^{\text{pl}} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pl}}. \quad (14)$$

Vektory $\boldsymbol{\lambda}$ a $\mathbf{f}$ jsou zatěžovací vektory, které odpovídají vlivu dosud neznámých sil na rozhraní a vnějšímu zatížení vyjma plastického přetvoření, naopak $\mathbf{U}''$ je vektor přemístění uzlových bodů na rozhraní od vlivu plastické přetvoření v jednotlivých prvcích oblasti Ω'' a $\mathbf{D}$ jsou příčinkové matice, které odpovídají jednotkovým zatížením, nebo plastickým přetvořením v prvcích. Relace (14) vyjadřuje speciální případ Analýzy transformaného pole, [6]. Její výhody spočívají v apriori vypočtených maticích $\mathbf{D}$ a poté v jejich jednoduchém přenásobení aktuálními veličinami zatížení, nebo plastického přetvoření během iterace.

Přetvoření $\mathbf{u}'$ a $\mathbf{u}''$ může být vypočteno na začátku řešení a zůstává stále stejné během iterace. Všechny výpočtové stavy musí respektovat kontaktní podmínky na rozhraní Γ .

Je nezbytné říci, že diskretizace hranic obou oblastí musí být provedena tak, aby byla splněna ekvivalence uzlů podél společné kontaktní hranice Γ , tj. musí existovat jednotné umístění uzlů diskretizovaného rozhraní Γ na hranici oblastí Ω' a Ω'' . Po zavedení geometrických hraničních podmínek se matice tuhosti stává regulární, takže existuje jednoznačné řešení každého problému (13). Složky vektorů $\boldsymbol{\lambda}'$ a $\boldsymbol{\lambda}''$ jsou definovány pouze v uzlových bodech kontaktu Γ . Pro každý vektor (13), mohou být extrahovány složky odpovídající směru souřadnicových os na hranici Γ . Přechíslovme uzlové body tak, aby první čísla v pořadí byla přiřazena uzlům, ležícím na hranici Γ . Tak jako řešení $\mathbf{u}'_f$ a $\mathbf{u}''_f$ může být vypočítáno předem, také $[\mathbf{u}_f]_1$ a $[\mathbf{u}_f]_2$ jsou známy v každém iteračním kroku. V prvním iteračním kroku vezmeme $\boldsymbol{\lambda}^1 = \boldsymbol{\lambda}^2 = [\mathbf{u}_{\lambda}]_1 = [\mathbf{u}_{\lambda}]_2 = 0$ a předpokládáme pružný stav. Vyberme nějaké vhodné kladné číslo ρ a použijme ho pro získání aktuálních kontaktních sil na hranici Γ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}^1 &:= P_{\lambda} \{ \boldsymbol{\lambda}^1 + \rho([\mathbf{u}_f]_1 + [\mathbf{u}_{\lambda}]_1 + \mathbf{U}_1) \} \\ \boldsymbol{\lambda}^2 &:= P_{\lambda} \{ \boldsymbol{\lambda}^2 + \rho([\mathbf{u}_f]_2 + [\mathbf{u}_{\lambda}]_2 + \mathbf{U}_2) \} \end{aligned} \quad (15)$$

Připomeňme, že složky vektoru $\boldsymbol{\lambda}^1$ jsou uzlové síly ve směru x_1 v uzlových bodech kontaktu Γ zatímco složky vektoru $\boldsymbol{\lambda}^2$ jsou uzlové síly ve směru x_2 v uzlových bodech na hranici Γ . Operátor P_{λ} je projektor do přípustné množiny Λ . Poznamenejme, že nepotřebujeme testovat geometrické podmínky, neboť ty vyplývají přímo z algoritmu. V nejobecnějším případě je nezbytné splnit podmínku (11) a projektovat "špatné řešení" do přípustné množiny Λ . Existuje několik způsobů této projekce. Jako nejjednodušší se jeví tento: v každém bodě přípustné množiny čísel uzlových bodů na Γ testujeme následující kroky:

1. $\lambda_i^1 \leq 0$? Není-li, polož $\lambda_i^1 = \lambda_i^2 = 0$, jdi na 3.
2. Je splněna podmínka Mohr-Coulombova zákona ? je-li porušena, projektuje se smykové napětí ve smyru (10).
3. Pro následující uzlový bod z přípustné množiny indexů jdi na 1)

Aby byla zachována rovnováha na kontaktu, položíme $\boldsymbol{\lambda}' = -\boldsymbol{\lambda}'' = \boldsymbol{\lambda}$. Dále, v rovnici (14) násobíme $\mathbf{D}'_{\lambda}$ pomocí $\boldsymbol{\lambda}'$, abychom dostali $\mathbf{u}'_{\lambda}$ a $\mathbf{D}''_{\lambda}$ pomocí $\boldsymbol{\lambda}''$, abychom dostali $\mathbf{u}''_{\lambda}$, zatímco $\mathbf{U}''$ tak jako $\mathbf{u}'_f$ a $\mathbf{u}''_f$ zůstávají nezměněny. Tuto proceduru opakujeme, dokud jsou mezi oběma vektory povrchových sil významné rozdíly.

Shrnutí numerické procedury pro dané plastické přetvoření (tj. také $\mathbf{U}''$ je daná):

1. Výpočet příčinkových matic funkcí $\mathbf{D}'_{\lambda}$ a $\mathbf{D}''_{\lambda}$.
2. Nechť $\boldsymbol{\lambda}^1 = \boldsymbol{\lambda}^2 = [\mathbf{u}_{\lambda}]_1 = [\mathbf{u}_{\lambda}]_2 = 0$.

3. Pro dané pravé strany ve (13) řešíme tyto rovnice pro neznámé $\mathbf{u}'_f$ a $\mathbf{u}''_f$.
4. Z $\mathbf{u}'_f$ a $\mathbf{u}''_f$ vybereme členy spojené s kontaktem Γ ; vypočteme $[\mathbf{u}_f]_1$ a $[\mathbf{u}_f]_2$.
5. Vypočteme λ^1 a λ^2 z (15).
6. Testujeme přípustnost sil podle dříve uvedeného schématu. Upravíme hodnoty sil na kontaktu.
7. Vytvoříme vektory $\mathbf{u}'_\lambda$ a $\mathbf{u}''_\lambda$ z (14), použitím příčinkových matic $\mathbf{D}'_\lambda$ a $\mathbf{D}''_\lambda$ z vektorů $[\mathbf{u}_\lambda]_1$ a $[\mathbf{u}_\lambda]_2$.
8. Test konvergence (například testujeme změny $[\mathbf{u}_\lambda]_1$ a $[\mathbf{u}_\lambda]_2$ mezi aktuálním a předchozím iteračním krokem, s použitím Eukleidovské metriky. Je-li konvergence uspokojivá, skončíme, jinak opakujeme iteraci od kroku číslo 5.

Procedura je obecně velmi jednoduchá, ale striktně závisí na výběru relaxačního parametru ρ ve (15). Teoreticky je zaručeno, že proces konverguje po výběru určitého vhodného kladného čísla ρ , viz [5]. V jednotlivých problémech může být ovlivněna výběrem tohoto parametru. Je-li parametr příliš malý, je konvergence zaručená, ale je velmi pomalá. Je-li parametr příliš velký, proces osciluje a dokonce může divergovat. Z teoretického hlediska můžeme tento algoritmus považovat za metodu, jak nalézt pevný bod v množině Λ .

V případě uvažování vlivu plasticity, na začátku vytvoříme příčinkovou matici $\mathbf{D}^{\text{pl}}$. Potom zatížení λ'' je dáno podél rozhraní z předchozího výpočtu. Napětí může být vypočteno v každém konečném prvku. Potom deviatorické napětí v (3) vyjadřuje hodnotu funkce plasticity Φ a rozložení plastických přetvoření v prvcích odpovídající (4). Užitím třetího vztahu z (14) dostaneme $\mathbf{U}''$.

3. VÝSLEDKY NUMERICKÝCH EXPERIMENTŮ

V numerickém modelu jsou brány do úvahy následující vlastnosti vláken a matrice kompozitního materiálu:

Vláknó: Youngův modul pružnosti $E_f = 772$ GPa, Poissonovo číslo $\nu_f = 0,25$

Matrice: Youngův modul pružnosti $E_m = 96,56$ GPa, Poissonovo číslo $\nu_m = 0,3$

Vláknó má průměr $71,36 \mu\text{m}$, matrice má vnější průměr $130 \mu\text{m}$. Délka studovaného válce je $400 \mu\text{m}$.

Úhel vnitřního tření je 30° a smyková pevnost τ_b je 8 MPa. Pevnost v tahu p_n^+ je 3 MPa.

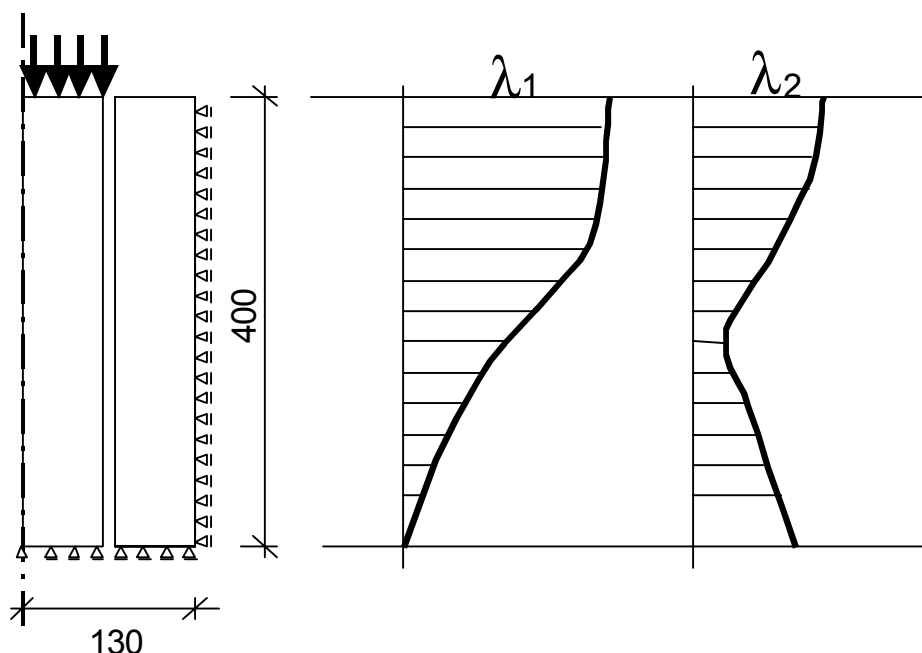
Tyto hodnoty jsou zadávány do počítačového programu, který vychází z geometrie, ukázané na obrázku č. 2. Problém je řešen v 2D jako osově symetrický, počet uzlových bodů na kontaktu je 57. Celkový počet uzlů matrice je 855, u vláken byl počet uzlů stejný. Uzly jsou zhuštěny na všech okrajích definičního oboru. Na obr. 2 jsou také ukázány průběhy kontaktních sil v případě lineárně-pružného materiálu obou fází.

4. ZÁVĚR

Tento článek je věnován studii chování skelných vláken v epoxidové matici kompozitních materiálů, a zvláštní pozornost je věnována vtlačování vlákna do matrice. Tento problém se úzce váže na posuzování lokálního boulení vláken (kinking), které je velmi nebezpečné pro únosnost kompozitů. V případě navíjených vláken se zavádí předpětí poměrně přirozeným způsobem, kdežto u přímých vláken je předpínání podstatně nákladnější. Toto je také důvod, proč se inženýři z oblasti mechaniky kompozitů velmi věnují této problematice.

V této práci je řešen problem vtlačování (push-in) pomocí metody konečných prvků a Uzawova algoritmu na jednotkové buňce v periodickém kompozitu, jejíž tvar je volen jako kruhový (místo čtverce). Je to z důvodu možnosti přesnějšího výpočtu a rozměrové redukce na 2D (je řešen osově symetrický problem). Na kontaktu obou fází se předpokládají Mohr-Coulombovy podmínky a vyloučení tahu, který přesahuje tahovou pevnost.

Tento výzkum byl finančně podporován Grantovou agenturou České republiky, grantový projekt číslo 106/01/0535.



Obr. 2: Geometrie, zatížení a průběhy kontaktních sil.

5. LITERATURA

- [1] Haslinger, J.: Signorini problem with Coulomb's law of friction. Shape optimization in contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **34**, No. 1, UK, 1992, 223-231, March 1992.
- [2] Drugan W. J., Willis J. R.: A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **44**, No. 4, UK, 1996, 497-524.
- [3] Procházka, P., Šejnoha, M.: Development of debond region of lag model, *Computers & Structures*, **55**, No. 2, 1995, 249-260.
- [4] Procházka, P., Válek, M.: Contact problem of fiber-matrix in composites. *Contact Mechanics III*, Madrid, CMP, 1997, 109-118.
- [5] Duvaut, G., Lions, J. L.: *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris 1972.
- [6] Dvorak, G. J., Procházka, P.: Thick-walled composite cylinders with optimal fiber prestress, *Composites, Part B*, **27B**, 1997, 643-649.