

MECHANICAL CHARACTERISTICS OF PRE-TENSION OF TEXTILES

B. Stříž *

***Summary:** The structure of flat textiles, which is generally an anisotropical fiber assembly, the direction of loading in one or two axis, leads to some defined symmetrical properties. Establishing symmetrical anisotropical axis of textiles from the zero condition shear stress on this axis, and its the resultant relationships, enables estimating the number of elastic modules and the types of anisotropical pre-tension of textiles depending on its instantaneous structure and the direction of loading.*

1. Úvod

Vláknenné útvary, na které lze rozčlenit textilie, představují složité struktury. Popisovat mechanické vlastnosti vláknenných textilních útvarů je možné pouze na základě jejich určité idealizace. Jednou z nejrozsáhlejších metod řešení problémů mechaniky textilií je náhrada vláknenného textilního útvaru spojitým prostředím - kontinuem se stejnými mechanickými vlastnostmi jako zkoumaná textilie. Geometricky i fyzikálně nelineární vlastnosti kontinua, které nahrazuje textilií, vyžadují aplikovat vhodné popisy stavů napjatosti a přetvoření. Těmi musejí být tzv. konjugované dvojice tenzorů napětí a deformace. V práci [1] byla ověřena dvojice - tzv. Bioův tenzor napětí a tenzor protažení.

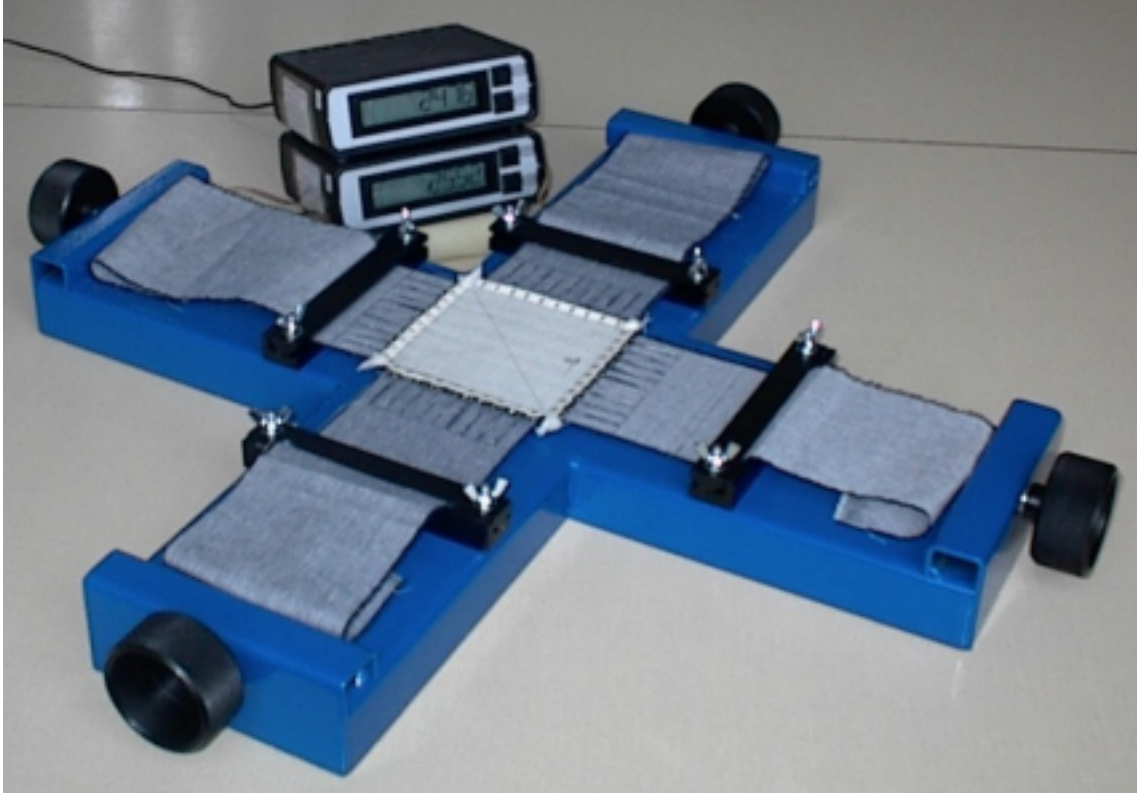
Velké množství prací zabývajících se experimentálními metodami měření mechanických vlastností plošných textilií [2] dokumentují jejich rostoucí význam pro technické aplikace, zvláště pro kompozity s textilní výztuží. Na textilní fakultě TU v Liberci je, mimo jiné, pro tento účel využíván přípravek, ve kterém nezávisle působící síly ve dvou vzájemně kolmých směrech, vyvozované posuvy čelistí s měřicími čidly (obr. 1), vyvolávají posuvy vyznačených bodů textilie. Upínání textilie je realizováno tak, aby nebylo bráněno deformaci textilie v obou směrech zatěžování (obr. 2). Při jednoosém zatěžování dovoluje toto upevnění příčnou kontrakci při zachování obdélníkového tvaru textilie. Polohy vyznačených minimálně čtyř blízkých bodů - vrcholů elementu - se proměřují ve zvoleném souřadném systému pomocí obrazové analýzy LUCIA a sledují se změny jejich poloh při následujícím zatěžování měřenými silami.

2. Použité závislosti mechaniky kontinua

Idealizace textilie s výraznou strukturou plošným kontinuem se stejnými vlastnostmi umožňuje využít rovnice mechaniky kontinua a definovat základní mechanické vlastnosti textilie. Ze změřených posuvů sledovaných bodů textilie lze stanovit závislosti mezi Eulerovými a Lagran-geovými souřadnicemi bodů [3]:

$$x_i^p = x_i^{op} + u_i^p, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

*Prof. RNDr. Bohuslav Stříž, DrSc, Katedra textilních struktur, TU Liberec, Hálkova 6, 46117 Liberec 1, tel:048/5353216, fax:048/5353542, e-mail: bohuslav.striz@vslib.cz



obr. 1

p je číslo bodu, kroužkem jsou označeny Lagrangeovy souřadnice. Derivace posuvu u_i^p podle Lagrangeovy materiálové souřadnice x_j^o se zpravidla zapisuje zkráceně pomocí středníku: $u_{i;j}^p$. Zaměníme-li derivace diferencemi, získané jako rozdíly souřadnic koncových bodů uhlopříček nepravidelného obrazce elementu, můžeme určit materiálový deformační gradient F řešením soustavy rovnic:

$$\Delta x_{ir} = \Delta x_{ir}^o + u_{i;j} \Delta x_{jr}^o, \quad i, j, r = 1, 2, \quad (2)$$

kde

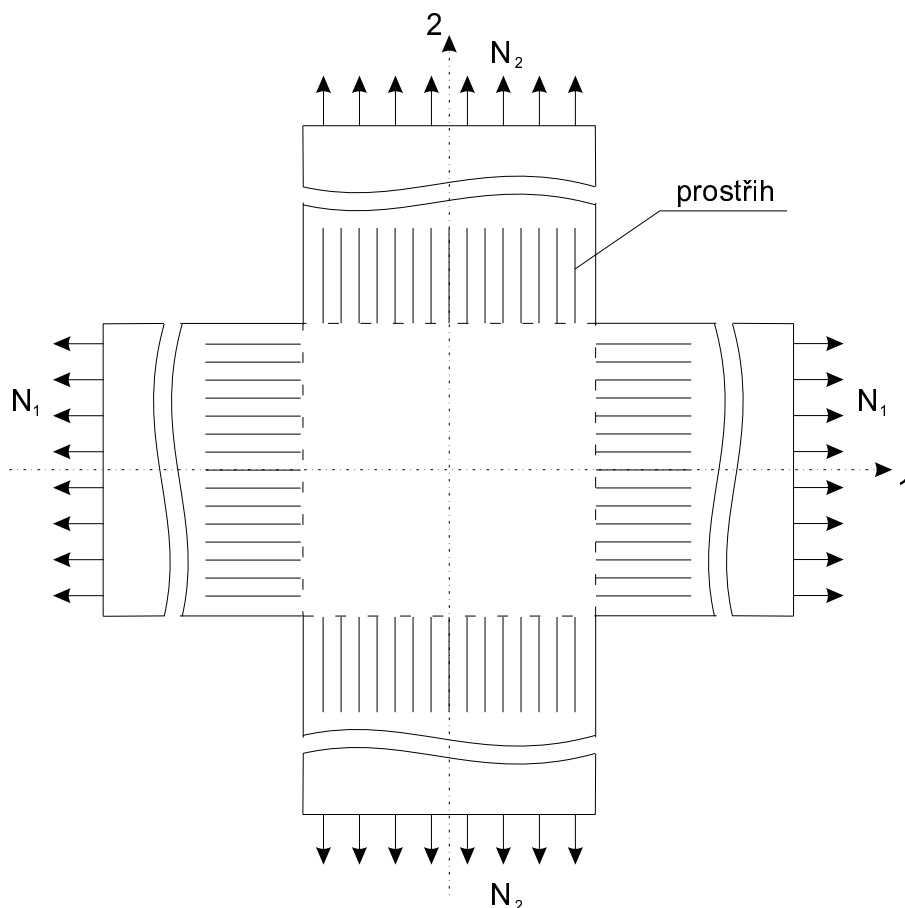
$$\begin{aligned} \Delta x_{i1} &= x_i^1 - x_i^3, & \Delta x_{i2} &= x_i^2 - x_i^4, \\ \Delta x_{i1}^o &= x_{i1}^{o1} - x_{i1}^{o3}, & \Delta x_{i2}^o &= x_{i2}^{o2} - x_{i2}^{o4}. \end{aligned}$$

Vyjde

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 + u_{1;1} & u_{1;2} \\ u_{2;1} & 1 + u_{2;2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Zavedeme poměrné síly $[Nm^{-1}]$ působící v ploše textilie. Tímto postupem není třeba uvažovat fiktivní tloušťku textilie a přecházíme od tenzorů v prostoru k tenzorům na ploše. Čtvercová matice třetího stupně se transformuje na čtvercovou matici druhého stupně, takovou je i deformační tenzor F .

Označme dále zvolený souřadný systém 11,22, což odpovídá indexům v materiálovém deformačním gradientu F . Pro určení modulů pružnosti je třeba znát typ anizotropie zatěžované textilie. Závisí nejen od struktury, ale i od tahového zatížení orientovaného vzhledem ke struktuře textilie o úhel α (obr. 3). Ze změřených hodnot posuvů nelze typ anizotropie určit. Je třeba stanovit polohu osy symetrie anizotropie z podmínky nulové smykové poměrné síly na této ose. Označme ω úhel, který svírá osa symetrie anizotropie s osou zatěžování 11. Zavedeme-li pro



obr. 2

Cauchyho tenzor skutečných poměrných sil označení:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

kde složky σ_{11}, σ_{22} určíme z podmínek rovnováhy přetvořeného elementu a známých hodnot zatěžujících sil. Složku σ_{12} tenzoru stanovíme ze vztahu pro smykovou sílu na ose symetrie anizotropie:

$$0 = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin 2\omega + \sigma_{12}\cos 2\omega.$$

Vyjde

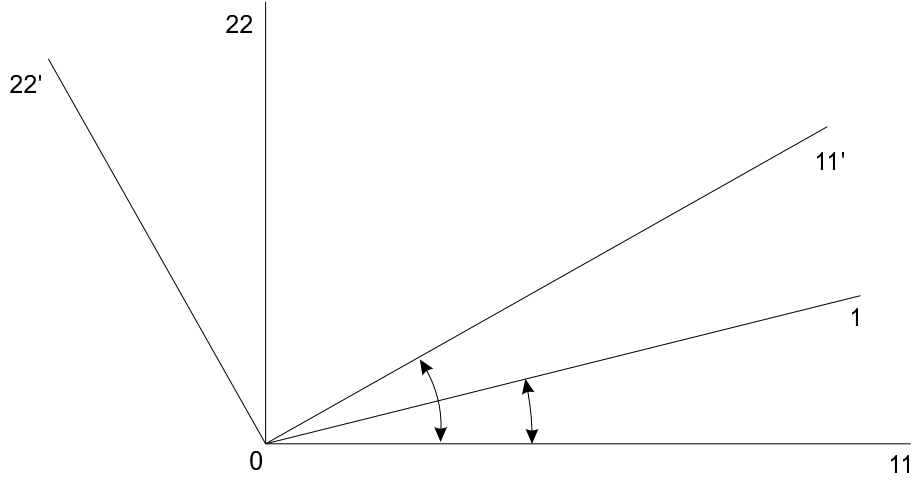
$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\tan 2\omega.$$

Tím je tenzor Σ určen jako funkce zatěžujících sil a úhlu ω . Prvním členem konjugované dvojice je Bioův tenzor poměrných sil S_B . Označme jeho složky c_{ij} . Je tedy

$$\mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Určíme je z tenzorové rovnice [4]:

$$\mathbf{S}_B = \frac{J}{2}(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{\Sigma}\mathbf{R} + \mathbf{R}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{F}^T)^{-1}. \quad (6)$$



obr. 3

Tenzor rotace je třeba stanovit pomocí polárního rozkladu, např. pravého

$$\Delta = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \Delta^{-1}, \quad (8)$$

kde tenzor protažení:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{pmatrix}$$

je druhým členem konjugované dvojice tenzorů.

Rovinná napjatost, ve které se textilie nachází, se za předpokladu lineární závislosti (v úzkém intervalu platnosti) mezi složkami Biova tenzoru poměrných sil a tenzoru deformace $\Delta - I$ popisuje tenzorem pružných modulů:

$$\bar{\mathbf{E}}_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{14} \\ \bar{E}_{12} & \bar{E}_{22} & \bar{E}_{24} \\ \bar{E}_{14} & \bar{E}_{24} & \bar{E}_4 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

kde pruhem jsou označeny moduly vztažené k rovinné napjatosti. Hookeův zákon vyjádřený k osám zatěžování má tvar:

$$\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{22} \\ c_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{14} \\ \bar{E}_{12} & \bar{E}_{22} & \bar{E}_{24} \\ \bar{E}_{14} & \bar{E}_{24} & \bar{E}_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{11} - 1 \\ \epsilon_{22} - 1 \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Pro pootočené osy vzhledem k ose 33 o úhel φ platí transformační vztahy [5]:

$$\begin{aligned} \bar{E}'_{11} &= \bar{E}_{11}b_1^4 + \bar{E}_{22}a_1^4 + (\bar{E}_{12}/2 + \bar{E}_4)a_2^2 + 4\bar{E}_{14}a_1b_1^3 + 4\bar{E}_{24}a_1^3b_1, \\ \bar{E}'_{22} &= \bar{E}_{11}a_1^4 + \bar{E}_{22}b_1^4 + (\bar{E}_{12}/2 + \bar{E}_4)a_2^2 - 4\bar{E}_{14}a_1^3b_1 - 4\bar{E}_{24}a_1^3b_1, \\ \bar{E}'_{12} &= (\bar{E}_{11} + \bar{E}_{22})a_1^2b_1^2 + \bar{E}_{12}(a_1^4 + b_1^4) - \bar{E}_4a_2^2 + 2(\bar{E}_{14} - \bar{E}_{24})(a_1^3b_1 - a_1b_1^3), \\ \bar{E}'_{14} &= -\bar{E}_{11}a_1b_1^3 + \bar{E}_{22}a_1^3b_1 + (\bar{E}_{12} + 2\bar{E}_4)(a_1b_1^3 - a_1^3b_1) + \bar{E}_{14}b_1^2(b_1^2 - 3a_1^2) \\ &\quad + \bar{E}_{24}a_1^2(3b_1^2 - a_1^2), \\ \bar{E}'_{24} &= -\bar{E}_{11}a_1^3b_1 + \bar{E}_{22}a_1b_1^3 + (\bar{E}_{12} + 2\bar{E}_4)(a_1^3b_1 - a_1b_1^3) + \bar{E}_{14}a_1^2(3b_1^2 - a_1^2) \\ &\quad + \bar{E}_{24}b_1^2(b_1^2 - 3a_1^2), \\ \bar{E}'_4 &= (\bar{E}_{11} + \bar{E}_{22} - 2\bar{E}_{12})a_1^2b_1^2 + \bar{E}_4b_2^2 + 2(\bar{E}_{14} - \bar{E}_{24})(a_1^3b_1 - a_1b_1^3), \end{aligned} \quad (11)$$

kde $a_1 = \sin\varphi$, $b_1 = \cos\varphi$, $a_2 = \sin 2\varphi$, $b_2 = \cos 2\varphi$.

Analogicky také pro tenzory $\mathbf{S}_B$ a Δ platí:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}'_B &= \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{S}_B \cdot \mathbf{A}, \\ \Delta' &= \mathbf{A}^T \cdot \Delta \cdot \mathbf{A},\end{aligned}\tag{12}$$

kde tenzor transformace:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Na ose symetrie anizotropie je splněn vztah [6]:

$$\bar{E}'_{14} + \bar{E}'_{24} = 0.\tag{13}$$

Z transformačních vztahů (11) a podmínky (13) dostaneme

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2(\bar{E}_{14} + \bar{E}_{24})}{\bar{E}_{11} - \bar{E}_{22}}.\tag{14}$$

Kromě podmínky (13) může být na ose symetrie splněna závislost

$$\bar{E}'_{14} - \bar{E}'_{24} = 0,\tag{15}$$

která vede na rovnici

$$\operatorname{tg} 4\omega = \frac{4(\bar{E}_{14} - \bar{E}_{24})}{\bar{E}_{11} + \bar{E}_{22} - 2\bar{E}_{12} - 4\bar{E}_4}.\tag{16}$$

Vzhledem k tomu, že úhel ω může být malý, je vhodné zvolit úhel φ tak, aby soustava konstitučních rovnic

$$\mathbf{S}_B(\varphi)' = \bar{\mathbf{E}}_{ij}(\varphi)' \cdot (\Delta(\varphi)' - \mathbf{I})\tag{17}$$

byla dobře podmíněna se soustavou rovnic (10). Řešením soustavy rovnic (10) a (17) určíme moduly pružnosti $\bar{E}_{ij}$ jako funkce úhlu ω . Rozhodnout, který ze vztahů (14), (16) pro stanovení úhlu ω platí, musíme z podmínek správnosti řešení:

$$\bar{E}_{11} > 0, \quad \bar{E}_{22} > 0, \quad \bar{E}_4 > 0, \quad |\bar{E}_{12}| \leq \sqrt{\bar{E}_{11} \cdot \bar{E}_{22}}, \quad \bar{E}_4 < |\bar{E}_{12}|, \quad |\omega| < \frac{\pi}{4}.\tag{18}$$

3. Určení typu anizotropie textlie

Označme α úhel (obr. 3), který svírá osa zatěžování 11 s osou 1 proloženou jedním z hlavních směrů struktury textlie (např. osnova nebo útek u tkanin, řádek nebo sloupek u pletenin). Nelze-li to určit (např. u netkaných textilií), zvolíme osu 1 totožnou s hlavním směrem tenzoru protažení Δ . Jsou-li podmínky (18) splněny hodnotou úhlu ω stanoveného rovnicí (14), jde o anizotropii typu jednoklonné krystalografické soustavy. Oba úhly ω, α jsou nenulové. Symetrická matice modulů je obecná:

$$\bar{\mathbf{E}}_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{14} \\ \bar{E}_{12} & \bar{E}_{22} & \bar{E}_{24} \\ \bar{E}_{14} & \bar{E}_{24} & \bar{E}_4 \end{pmatrix}.$$

Jsou-li podmínky (18) splněny hodnotou úhlu ω stanoveného rovnicí (16), jde o anizotropii typu čtverečné krystalografické soustavy. Symetrická matice má jen čtyři rozdílné prvky:

$$\bar{\mathbf{E}}_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{14} \\ \bar{E}_{12} & \bar{E}_{11} - \bar{E}_{14} & \\ \bar{E}_{14} - \bar{E}_{14} & \bar{E}_4 & \end{pmatrix}.$$

Rovnost modulů $\bar{E}_{22} = \bar{E}_{11}$ vyplývá pro $\omega \neq 0$ z rovnice (14). Tato třída anizotropie nastává vhodnou kombinací hodnot zatížení v obou směrech a úhlu α .

Zatěžují-li síly textilií v jejích osách symetrie struktury, jsou tyto osy také současně osami symetrie anizotropie. Na těchto osách jsou

$$\bar{E}_{14} = \bar{E}_{24} = 0.$$

Jsou totožné hlavní osy tenzoru protažení Δ a Biova tenzoru poměrných sil $\mathbf{S}_B$. Nulové jsou složky tenzorů u_{12} , u_{21} , ϵ_{12} , c_{12} . Tenzor rotace $\mathbf{R}$ je jednotkový. Bioův tenzor poměrných sil je v tomto případě roven tenzoru smluvních poměrných sil (vztahených k původním rozměrům vzorku textilie). Řešení úlohy získáme ze soustavy pěti nenulových rovnic (10) a (17) vhodným výběrem čtyř rovnic, aby byly splněny podmínky (18). Anizotropie zatěžované textilie může mít charakter ortotropie s maticí modulů

$$\bar{\mathbf{E}}_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & 0 \\ \bar{E}_{12} & \bar{E}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{E}_4 \end{pmatrix},$$

odpovídající čtverečné krystalografické soustavě nebo transversální izotropie s maticí modulů

$$\bar{\mathbf{E}}_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & 0 \\ \bar{E}_{12} & \bar{E}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\bar{E}_{11} - \bar{E}_{12}) \end{pmatrix},$$

odpovídající šesterečné krystalografické soustavě. V případě ortotropie jsou oba úhly ω , α nulové. V případě transversální izotropie je nulový úhel α , úhel ω je libovolný, neboť všechny směry jsou hlavní.

4. Závěr

Anizotropie plošné textilie není určena jen svojí strukturou, ale také zatěžujícími silami a jejich orientací k hlavním směrům struktury textilie. Bylo ukázáno, že anizotropie plošné textilie může být čtyř typů. Při řešení úloh namáhání kompozitů s textilní výztuží, např. typu uhlík-uhlík, je třeba k výše uvedeným závěrům přihlídnout. Práce vznikla v rámci řešení projektu GAČR 106/01/0565.

References

- [1] B. Stříž. Experimental verification of selection of tensor conjunction couple. *Engineering Mechanics 2000*, Svratka, (2000).
- [2] R. J. Bassett and R. Postle, Ning Pan. Experimental Methods for Measuring Fabric Mechanical Properties: A Review and Analysis. *Textile Res. J.*, 69(11), 866-875, (1999).
- [3] D. S. Chandrasekharaiah and Lokenath Debnath. *Continuum Mechanics*. Academic Press, London, New York, Sydney, Toronto (1994).
- [4] K. F. Černych. *Vvedeniye v anizotropnuju uprugost*. Moskva, (1988).
- [5] A. E. Bogdanovich and C. M. Pastore. *Mechanics of Textile and Laminated Composites*. London, New York, Tokyo, Melbourne, First edition, (1996).
- [6] B. Stříž. *Mechanika textilií, část I: Základy mechaniky kontinua*. Liberec, (2001).