

DYNAMICS OF PERMANENT MAGNETIC BEARING

Ladislav PŮST *

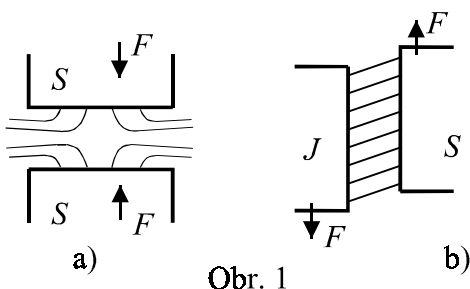
Summary: *In comparison with the active magnetic bearings, the advantage of passive (permanent) bearings is their simplicity and very low damping, but they can introduce instability of rotor position. Therefore the basic analysis of radial bearings properties including nonlinear characteristics are presented. The mathematical models of vertical and horizontal rotors supported by permanent magnetic bearings are derived. Splitting of resonance's due to the rotor weight and existence higher harmonics are mentioned as well.*

1. ÚVOD

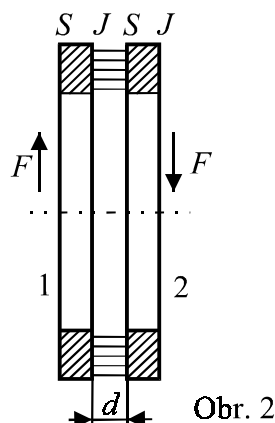
Oproti aktivním magnetickým ložiskům mají ložiska s permanentními magnety výhodu v jednoduchosti a nulové potřebě vnější energie, mohou však do mechanického systému vnášet nestabilitu a proto se musí kombinovat s jinými typy ložisek. V této studii se zaměříme na analýzu základních vlastností prstencového radiálního ložiska smykového typu s uvažováním nelinearit při větších výchylkách.

2. PRINCIP LOŽISKA

Pro ukládání rotoru na permanentních magnetických ložiskách se využívá dvou principů. Prvý z nich je založen na radiálním působení magnetického pole odpuzujících se pólů stejné polaritý a nosná síla F je tedy kolmá na magnetickou mezeru (obr. 1a). Druhý princip jako nosnou sílu využívá smykové složky magnetických sil ve směru rovnoběžném s rovinou magnetické mezery (obr. 1b). Na tomto posledním principu je založen návrh experimentálního rotoru ÚT-AVČR vyvíjeného v rámci úkolu GAČR 101/00/1471 a proto i v naší studii bude mu věnována hlavní pozornost. Magnetický

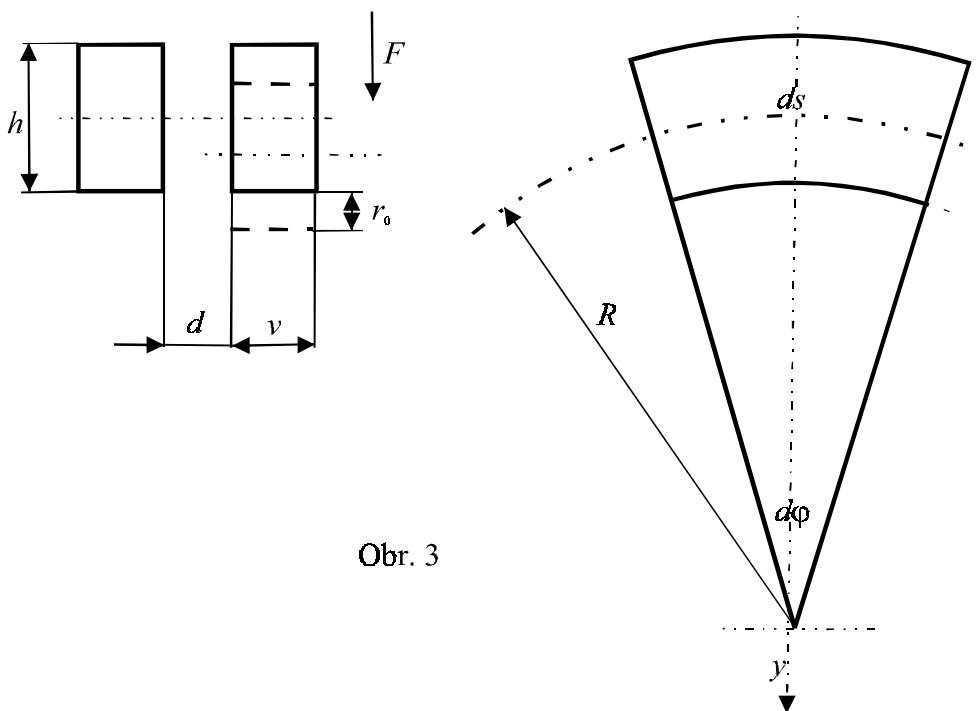


Obr. 1



Obr. 2

* Ing. Ladislav Půst, DrSc., Ústav termomechaniky AVČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8, CZ
 e-mail: pust@it.cas.cz



Obr. 3

nosný prvek je tvořen kruhovými prstenci podle obr. 2 s axiální orientací. Mezera d je při vzájemném pohybu konstantní. Při zatížení svislou silou F se kroužky vůči sobě posunou o délku r_0 , magnetické pole se zdeformuje tak, aby výslednice magnetických sil byla v rovnováze s F . Při analýze silových poměrů vyjdeme z vlastností elementu o délce ds (obr. 3)

$$h, d, r_0 \ll R, \quad (1)$$

u něhož můžeme při dostatečně malém úhlu $\mathcal{E}$ a při $h, d, r_0 \ll R$ zanedbat zakřivení a uvažovat ho jako elementární kvádr.

Závislost F na r_0 bude při malých výchylkách lineární, při větších nelineární, což lze v prvním přiblížení respektovat kubickým členem. Síla při radiálním posunutí je pak kubickou funkcí posunutí r_0 [m]:

$$\begin{aligned} dF(r_0) &= (kr_0 + k_3 r_0^3) ds \quad k_3 < 0 \\ d\vec{F} &= (k + k_3 |r_0|^2) \vec{r}_0 ds, \end{aligned} \quad (2)$$

kde zatěžující síla dF u elementu délky ds má rozměr $N = \text{kg ms}^{-2}$ a je to vektor směřující ve směru výchylky $\vec{r}_0$, k je tuhost vztažená rovněž na délku ds a má rozměr $N/m^2 = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$, k_3 je koeficient u r_0^3 a má rozměr $N/m^4 = \text{kg m}^{-3} \text{s}^{-2}$.

Tyto koeficienty i zatěžující (resp. vratná) síla závisejí dle obr. 3 na šířce magnetických kroužků h , výšce v , na mezeře d a na magnetických vlastnostech materiálu a celé magnetické cesty. Za předpokladu, že funkci (2) známe, můžeme vypočítat celkovou sílu F při posunu kroužku o délku r_0 . Podle obr. 4 při posunu o r_0 ve směru svislé osy y bude výsledná síla dána integrálem elementárních vektorů sil $dF(r)$,

$$dF_y = dF(r) \cos \varphi, \quad (3)$$

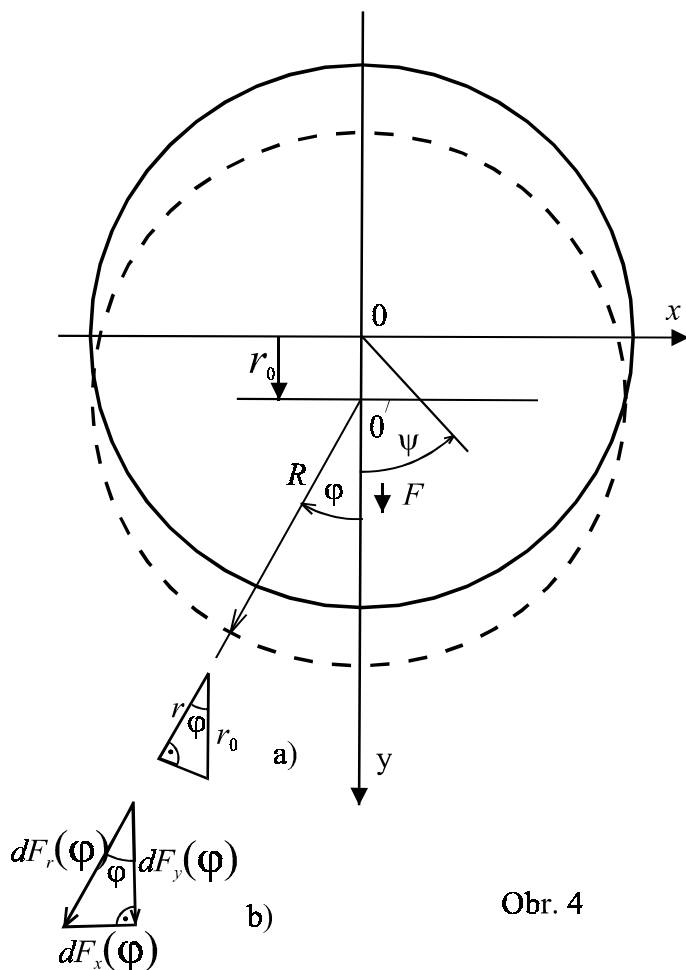
respektive součtem jejich složek do směru r_0 , resp. y .

Integrál musí být proveden po celém obvodu $h, d, r_0 \ll R$, přičemž radiální posunutí elementu v místě φ bude $r = r_0 \cos \varphi$ (obr. 4a, b) a odpovídající svislá složka síly $dF_y(\varphi) = dF_r(\varphi) \cos \varphi$. Vodorovné složky $dF_x(\varphi)$ se vzhledem k symetrii k ose y vzájemně ruší. S ohledem na $ds = R d\varphi$ bude výsledná svislá síla

$$F_y = \oint dF_y(\varphi) = \oint dF_r(\varphi) \cos \varphi = \int_0^{2\pi} (kr_0 \cos \varphi + k_3 r_0^3 \cos^3 \varphi) \cos \varphi R d\varphi. \quad (4)$$

Po provedení integrálů dostaneme

$$F(r_0) = Rr_0 k \pi + Rk_3 r_0^3 \frac{3}{4} \pi = \pi R r_0 \left(k + \frac{3}{4} k_3 r_0^2 \right). \quad (5)$$



Obr. 4

Porovnejme případ kruhového prstence s vlastnostmi magnetického toku obdélníkového průřezu (obr. 5).

Pokud by byla stejná plocha $S = 2\pi R h$ rozvinuta do obdélníku $2\pi R \times h$, pak pro lineární člen $dF = k r_0 ds$ při posunutí kolmo na stranu $2\pi R$ by byla třeba 2x větší síla. Stočení této plochy do tvaru kružnice snižuje lineární tuhost na polovinu.

Nelinearita je u obdélníkové plochy prstence zachována, opět má měknoucí vliv, ale její velikost se oproti prstenci

zvětší na $\frac{8}{3}$ vlivem narovnání. Při posunutí obdélníkového magnetu o r_0 kolmo na delší stranu průřezu je tedy třeba celková síla

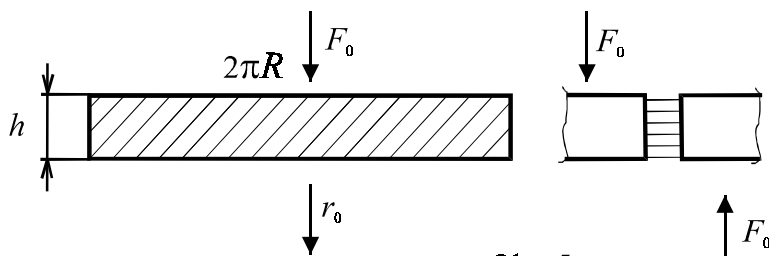
$$F_0 = 2\pi R r_0 (k + k_3 r_0^2).$$

Vraťme se ke kruhovému prstenci. Posune-li se střed prstence O' ve směru osy x , pak platí obdobná charakteristika jako je (5) pro posun y . Totéž platí i při posunutí v obecném směru o excentricitu r_0 . Udáváme-li však polohu středu O' v pravoúhlých souřadnicích x, y , nutno použít vztahy

$$x = r_0 \sin \psi, \quad y = r_0 \cos \psi$$

$$a \quad F_x = F_0 \sin \psi = \pi R x \left[k + \frac{3}{4} k_3 (x^2 + y^2) \right] \quad (5a)$$

$$F_y = F_0 \cos \psi = \pi R y \left[k + \frac{3}{4} k_3 (x^2 + y^2) \right].$$



Obr. 5

Je vidět, že vlivem nelinearity závisí složka síly v horizontálním směru též na vertikální výchylce a naopak.

3. POHYBOVÉ ROVNICE HMOTNÉHO BODU VZHLEDEM K OSÁM x, y

a) Vertikální hřídel

Rovnice (5) popisuje středově symetrické nelineární silové pole. Toto pole je funkcí pouze vzdálenosti r_0 , nikoliv úhlu ψ . Chování hmotného bodu v takovém poli bylo analyzováno např. v lit. [1].

Tuto rovnici lze použít pro vertikální hřídel (nahrazený v prvním přiblížení hmotným bodem), u kterého vlastní váha nezpůsobuje nesymetrii silového pole. Nelineární člen se v tom případě projeví mimo jiné též různou frekvencí příčného kmitání a rotačního pohybu, natáčením eliptického pohybu apod.

Při rotačním pohybu o poloměru r_0 je dostředivá síla konstantní

$$F = r_0 (K + K_3 r_0^2) \quad (6)$$

kde $K = \pi R k$, $K_3 = \pi R k_3$.

Úhlová rychlost rotace hmotného bodu m je

$$\Omega_0 = \sqrt{(K + K_3 r_0^2) / m}. \quad (7)$$

Při příčném kmitání je pohyb popsán diferenciální rovnicí

$$m\ddot{x} + (K + K_3 x^2)x = 0 \quad (8)$$

resp. ekvivalentní lineární rovnicí

$$m\ddot{x} + (K + \frac{3}{4} K_3 r_0^2)x = 0 \quad (8a)$$

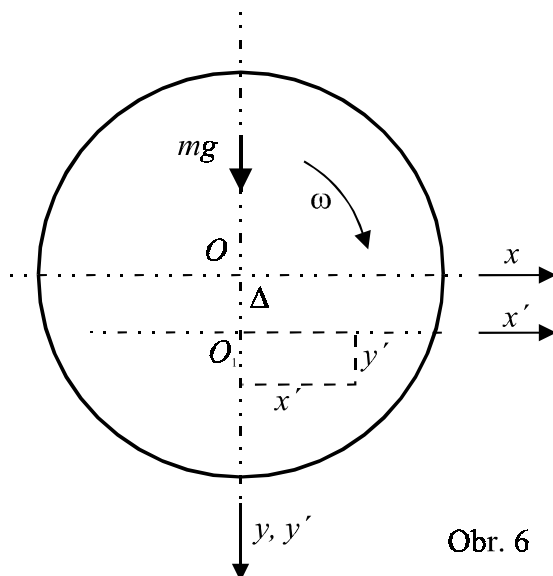
s příslušnou úhlovou frekvencí

$$\Omega_I = \sqrt{(K + \frac{3}{4} K_3 r_0^2) / m}. \quad (9)$$

Poněvadž pro $K_3 < 0$ je $\Omega_0 < \Omega_I$, způsobuje kombinace těchto dvou pohybů při různých počátečních podmínkách otáčení trajektorie (u lineárního netlumeného systému jsou tyto trajektorie eliptické, bez otáčení) v jednom nebo v druhém směru. Při různém typu buzení pak existují 2 rezonanční vrcholy. Podrobněji je tento případ vyšetřován v [1].

Při malých výchylkách, kdy lze nelineární člen zanedbat, obě rezonance, resp. obě vlastní frekvence splynou a systém se chová jako lineární s tuhostí K , resp. s vlastní frekvencí $\Omega_I = \sqrt{K/m}$ ve směru x i y . Stejnou vlastní frekvenci mají příčné i krouživé kmity.

b) Horizontální hřídel



Obr. 6

Dynamické vlastnosti horizontálně uloženého rotoru, opět nahrazeného v prvním přiblížení hmotným bodem, jsou silně ovlivněny vlastní vahou mg . Tuto sílu respektujeme zavedením konstantního posunutí Δ rovnovážné polohy ve směru osy y (obr. 6). Vztah mezi Δ a mg je:

$$mg = \pi R \Delta (k + k_3 \Delta^2) \quad (10)$$

Vratná síla v bodě $y' = y - \Delta$ je po zjednodušení označení $K = \pi R k$ a $K_3 = \pi R k_3$

$$\vec{F} = \vec{r}_0 (K + K_3 |\vec{r}_0|^2) + m \vec{g} \quad (11)$$

a ve složkách

$$F_x = x[K + K_3(x^2 + y^2)] \quad F_y = y[K + K_3(x^2 + y^2)] - mg, \quad (12)$$

resp.

$$\begin{aligned} F_{x'} &= x'[K + K_3(x'^2 + (y' + \Delta)^2)] \\ F_{y'} &= (y' + \Delta)[K + K_3(x'^2 + (y' + \Delta)^2)] - \Delta[K + K_3\Delta^2] \\ &= y'[K + K_3(x'^2 + (y' + \Delta)^2)] + \Delta K_3[x'^2 + (y' + \Delta)^2] - K_3\Delta^3 \\ &= y'K + y'K_3(x'^2 + (y'^2 + 2y'\Delta + \Delta^2)) + \Delta K_3[x'^2 + y'^2 + 2\Delta y'] \\ &= y'[K + 3K_3\Delta^2] + (y' + \Delta)K_3(x'^2 + y'^2) + 2y'^2 K_3\Delta. \end{aligned} \quad (13)$$

Při malých výchylkách okolo osy O_1 , tj. v linearizovaném případě, jsou v tomto případě různé tuhosti ve směru x' y' :

$$F_{x'} = Kx', \quad F_{y'} = [K + 3K_3\Delta^2]y' \quad (14)$$

a tedy i vlastní frekvence v těchto směrech budou různé

$$\Omega_x = \sqrt{K/m}, \quad \Omega_y = \sqrt{(K + 3K_3\Delta^2)/m}. \quad (14a)$$

Rezonanční vrcholy pro vodorovné a svislé kmitání vzniknou též při různých frekvencích budící síly. Silové pole je osově symetrické okolo osy y' , nesymetrické okolo osy x' . Lze tedy očekávat jak sudé tak liché harmonické složky pohybu při buzení odstředivou silou - nevývažkem.

Pohybové rovnice tuhého rotoru o hmotě m (příslušné zkoumanému ložisku) a buzeného excentricitou e (vrátíme se k původnímu označení x, y ovšem měřenému od bodu O_1) jsou

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + Kx + K_3x[x^2 + (y + \Delta)^2] &= me\omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{y} + K_1y + \Delta K_3(x^2 + 3y^2) + K_3y(x^2 + y^2) &= me\omega^2 \sin \omega^2 t \end{aligned} \quad (15)$$

kde

$$K_1 = (K + 3K_3\Delta^2).$$

Hodnotu Δ lze vypočítat z rovnice (10) nebo pro malé výchylky Δ , kdy lze nelineární člen zanedbat, z přibližného vzorce

$$\Delta \doteq \frac{mg}{K}. \quad (15a)$$

V pohybových rovnicích (15) neuvažujeme tlumící síly, protože tlumení pasivního magnetického ložiska je velmi malé a lze ho tedy zanedbat.

4. ŘEŠENÍ POHYBU METODOU MALÉHO PARAMETRU

V této části se opět budeme zabývat nejjednodušším případem, kdy rotor můžeme alespoň přibližně nahradit jedním hmotným bodem v centrálním nelineárním poli. Toto je možné např. u tuhého symetrického rotoru uloženého na dvou stejných ložiskách, nebo leží-li těžiště rotoru v jednom ložisku atd.

Pro řešení pohybu popsaného rovnicemi (15) zavedeme malý parametr ε úpravou $K_3 \rightarrow \varepsilon K_3$. V nultém přiblížení ($\varepsilon_0 = 0$) popisují rovnice lineární případ s řešením

$$\begin{aligned} x_0 &= a_x \cos \omega t = \frac{me\omega^2}{K - m\omega^2} \cos \omega t \\ y_0 &= a_y \sin \omega t = \frac{me\omega^2}{K_1 - m\omega^2} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (16)$$

Na úplné nelineární rovnice použijeme klasickou metodu malého parametru (viz např. [3]). Periodické řešení ve tvaru mocninných řad malého parametru ε a po jejich dosazení do (15) a po porovnání členů u stejných mocnin ε získáme pohyb hmotného bodu s přesností do prvního přiblížení

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0(t) + \varepsilon x_1(t) = \\
&= a_x \cos \omega t - \frac{\varepsilon K_3}{4} \left[\frac{(3a_x^2 + a_y^2 + 4\Delta^2)a_x}{K - m\omega^2} \cos \omega t + \frac{4\Delta a_y a_x}{K - m4\omega^2} \sin 2\omega t + \frac{a_x^3 - a_y^2 a_x}{K - m9\omega^2} \cos 3\omega t \right] \\
y(t) &= y_0(t) + \varepsilon y_1(t) = a_y \sin \omega t - \frac{\varepsilon K_3}{4} \left[\frac{2\Delta}{K_1} (a_x^2 + 3a_y^2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_y(a_x^2 + 3a_y^2)}{K_1 - m\omega^2} \sin \omega t + \frac{2\Delta(a_x^2 - 3a_y^2)}{K_1 - 4m\omega^2} \cos 2\omega t + \frac{a_y(a_x^2 - a_y^2)}{K_1 - 9m\omega^2} \sin 3\omega t \right],
\end{aligned} \tag{17}$$

kde a_x a_y vyplývají z rovnice (16).

Z výrazů (17) je zřejmé, že pohyb hmoty m bude obsahovat kromě první harmonické složky s frekvencí ω též malé ($\approx \varepsilon k_3$) složky s dvojnásobnou 2ω a trojnásobnou 3ω frekvencí. Navíc ve vertikálním směru se objeví i mírné posunutí středu kmitu.

Vztahy (17) platí v nerezonančních oblastech. V blízkosti frekvencí $\omega \doteq \sqrt{\frac{K}{m}}$, resp $\sqrt{\frac{K_1}{m}}$ (hlavní rezonance) dojde k silnému zvýšení amplitudy první složky kmitu, v blízkosti frekvencí $\omega \doteq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{m}}$ a $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{K}{m}}$ resp $\omega \doteq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K_1}{m}}$ a $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{K_1}{m}}$ (vedlejší superharmonické rezonance) se zvýší amplitudy druhé a třetí harmonické složky kmitu.

5. POHYBOVÉ ROVNICE HŘÍDELE ULOŽENÉHO NA PASIVNÍCH MAGNETICKÝCH LOŽISKÁCH

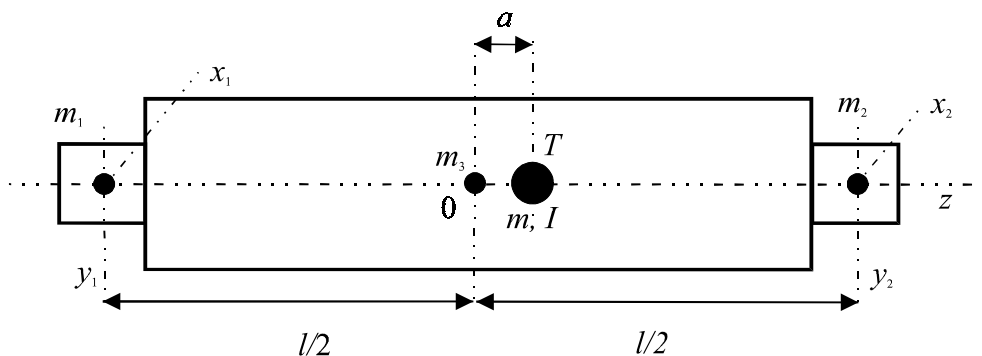
Předpokládáme, že

- hřídel je dostatečně tuhá $\Rightarrow$ tuhé těleso, systém o 4^o volnosti
- na hřídel působí jen vlastní váha a odstředivá síla nevyvážku v těžišti T rotoru
- hřídel osově symetrický podle osy z kmitá pouze v radiálních směrech x, y ; v axiálním směru z je pevně uchycen
- zanedbáváme gyroskopické účinky
- na obou stranách jsou stejná ložiska.

Schéma systému je na obr. 7.

Platí

$$\begin{aligned}
m &= m_1 + m_2 + m_3 \\
m_1(l/2 + a) - m_2(l/2 - a) + m_3 a &= 0 \\
m_1(l/2 + a)^2 - m_2(l/2 - a)^2 + m_3 a^2 &= I.
\end{aligned} \tag{18}$$



Obr. 7

Pohybové rovnice ve směru x a y jsou

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + \frac{m_3}{4}(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + Kx_1 + K_3 x_1(x_1^2 + (y_1 + \Delta_1)^2) + b\dot{x}_1 &= m(1/2 + a/l)e\omega^2 \cos \omega t \\
 m_2 \ddot{x}_2 + \frac{m_3}{4}(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + Kx_2 + K_3 x_2(x_2^2 + (y_2 + \Delta_2)^2) + b\dot{x}_2 &= m(1/2 - a/l)e\omega^2 \cos \omega t \\
 m_1 \ddot{y}_1 + \frac{m_3}{4}(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + K_{11}y_1 + \Delta_1 K_3(x_1^2 + 3y_1^2) + \\
 + K_3 y_1(x_1^2 + y_1^2) + b\dot{y}_1 &= m(1/2 + a/l)e\omega^2 \sin \omega t \\
 m_2 \ddot{y}_2 + \frac{m_3}{4}(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + K_{12}y_2 + \Delta_2 K_3(x_2^2 + 3y_2^2) + \\
 + K_3 y_2(x_2^2 + y_2^2) + b\dot{y}_2 &= m(1/2 - a/l)e\omega^2 \sin \omega t,
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

kde jsou: K_1, K_3 konstanty nelineární charakteristiky ložiska,

$$\Delta_i = \frac{(m_i + m_{3/2})g}{k}, \quad i = 1, 2 \text{ posunutí osy hřídele vlivem vlastní váhy,}$$

$$K_{1i} = K + 3K_3\Delta_i^2 \quad \text{konstanty tuhosti ve vertikálním směru.}$$

Vnější lineárního tlumení (např. odpor vzduchu, vířivé proudy apod.) je respektovány členy

$$b\dot{x}_1, b\dot{x}_2, b\dot{y}_1, b\dot{y}_2. \tag{20}$$

Při zavedení lineárního tlumení do rovnic (19) obsahujících nelineární tuhostní členy a po transformaci do bezrozměrových souřadnic

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{2a}{l}, \quad \Delta = \frac{mg}{2K}, \quad X_i = \frac{x_i}{\Delta}, \quad Y_i = \frac{y_i}{\Delta}, \quad Exc = \frac{e}{\Delta} \\
 \rho^2 &= \frac{I4}{ml^2}, \quad \mu_1 = \frac{m_1}{m} = (-\alpha + \alpha^2 + \rho^2)/2, \quad \mu_2 = \frac{m_2}{m} = (+\alpha + \alpha^2 + \rho^2)/2
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

$$\mu_3 = \frac{m_3}{m} = 1 - \alpha^2 - \rho^2, \quad \Delta_1 / \Delta = 1 - \alpha, \quad \Delta_2 / \Delta = 1 + \alpha, \quad \tau = \Omega t = \sqrt{k/m} t$$

$$\eta = \omega \sqrt{m/k}, \quad B = b / \sqrt{km}, \quad \kappa = \Delta^2 K_3 / K, \quad \kappa_1 = 1 + 3\kappa(1 - \alpha)^2$$

$$\kappa_2 = 1 + 3\kappa(1 + \alpha)^2$$

dostaneme

$$\begin{aligned}
 (\mu_1 + \mu_3/4)X_1'' + \mu_3/4 X_2'' + X_1 + BX_1' + \kappa X_1(X_1^2 + (Y_1 + 1 - \alpha)^2) &= \frac{1 + \alpha}{2} Exc \eta^2 \cos \eta \tau \\
 (\mu_2 + \mu_3/4)X_2'' + \mu_3/4 X_1'' + X_2 + BX_2' + \kappa X_2(X_2^2 + (Y_2 + 1 + \alpha)^2) &= \frac{1 - \alpha}{2} Exc \eta^2 \cos \eta \tau \\
 (\mu_1 + \mu_3/4)Y_1'' + \mu_3/4 Y_2'' + \kappa_1 Y_1 + BY_1' + \kappa(1 - \alpha)(X_1^2 + 3Y_1^2) + \kappa Y_1(X_1^2 + Y_1^2) &= \\
 &= \frac{1 + \alpha}{2} Exc \eta^2 \sin \eta \tau
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1+\alpha}{2} Exc \eta^2 \sin \eta \tau$$

$$(\mu_2 + \mu_3 / 4) Y_2'' + \mu_3 / 4 Y_1'' + \kappa_2 Y_2 + B Y_2' + \kappa(1 + \alpha)(X_2^2 + 3Y_2^2) + \kappa Y_2(X_2^2 + Y_2^2) = \eta \tau$$

$$= \frac{1-\alpha}{2} Exc \eta^2 \sin \eta \tau .$$

Tyto rovnice byly naprogramovány v jazyku Fortran a jejich řešení simulováno na počítači. Pro přehlednou analýzu dynamických vlastností rotoru byl simulační program doplněn určováním maximálních amplitud výchylek $X_{\text{imax}}, Y_{\text{imax}}$, resp. rychlosti $\dot{X}_{\text{imax}}, \dot{Y}_{\text{imax}}$ ($i=1,2$) při pomalu vzrůstající budící frekvenci η . Příklady rezonančních křivek budou ukázány na konferenci.

6. ZÁVĚR

Pasivní magnetická ložiska využívající jako vratnou sílu smyčkovou složku magnetických sil mezi dvěma kruhovými prstenci má při větších výchylkách nelineární charakteristiku. Je ukázáno, že nelinearita silového pole způsobuje vazbu mezi kmitáním ve směrech os x a y , vznik vyšších harmonických složek a rozštěpení rezonančních vrcholů. Tyto jevy jsou ještě zvýrazněny u horizontálně uložených rotorů posunutím rovnovážné polohy vlivem vlastní váhy. Další vazby vznikají u rotoru uložených ve dvou magnetických ložiskách při obecném rozložení hmot rotoru podél jeho osy. Pro tento případ jsou odvozeny pohybové rovnice nelineárního systému o čtyřech stupních volnosti umožňující simulační vyšetřování dynamických vlastností zkoumaného systému.

Poděkování

Autor děkuje Grantové agentuře ČR za podporu při řešení úkolu č. 101/00/1471.

7. REFERENCES

- [1] Půst L.: Motion of a Particle in Centrally Symmetrical Nonlinear Field, Buletinul Institutului Politehnic Din Iasi, serie noua, Tomul VI(X), Fasc. 1-2, 1960, pp.85-92
- [2] Půst L.: Vlastní frekvence hřídele uloženého ve valivých ložiskách, Strojnícky časopis XII, 1961, č.2, str.99-117
- [3] Brepta R., Půst L., Turek F.: Mechanické kmitání (TP71), Sobotáles, Praha 1994