



NUMERICAL IMPLEMENTATION OF GENERALIZED NON-LINEAR KINEMATIC HARDENING RULE FOR ELASTIC-PLASTIC CONSTITUTIVE EQUATIONS

Jan PAPUGA*, Jiří PLEŠEK**

***Summary:** The Armstrong-Frederick and Chaboche models were generalized in the framework of non-linear kinematic hardening theory. A procedure for solving the hardening evolution law was implemented within the PMD FEM package. Both the generalized constitutive model and the way of implementation as well as the differences between the three types of hardening rules are reported in detail.*

1. Úvod

Základními dvěma prostředky pro popis evoluce plochy plasticity v prostoru napětí jsou modely izotropního a kinemického zpevnění. Pomocí izotropního zpevnění nelze postihnout Bauschingerův efekt, a proto tento model může být použit pouze v případech prostého jednorázového zatěžování. Model kinemického zpevnění v lineární podobě zase selhává při simulaci cyklického plastického tečení (*ratchettingu*, *cyklického creepu*). Kombinací obou přístupů [1] je sice možno popsat tzv. cyklické zpevnění či cyklické změkčování, avšak ani toto řešení nepřináší požadované zlepšení v problémech, kdy je nutno zachytit přesný tvar cyklické křivky s ohledem na různou odezvu při zatížení resp. odlehčení.

Moderní konstitutivní vztahy, vhodné pro cyklickou plasticitu, lze rozdělit do tří kategorií: endochronní plasticita (Valanis), víceplochové modely (Krieg, Mróz, Dafalias) a nelineární kinemické zpevnění (Armstrong, Frederick, Chaboche). Poslední možnost je velmi jednoduchá, elegantní a efektivní. Blíží se totiž metodě prosté superpozice izotropního a kinemického modelu, v rámci evolučního zákona pro vývoj kinemických parametrů (*backstressu*), je však místo Pragerova či jiného lineárního zákona uplatněna odlišná nelineární forma. Poprvé takový model představili Armstrong a Frederick [2], kteří navrhli tvar s přidanou paměťovou složkou (*recall term*), lineárně závislou na skalárním součinu normály k ploše plasticity v místě zatěžovacího bodu a okamžité hodnoty kinemického tenzoru. Model má řadu výhod, lze jím poměrně úspěšně simulovat plastické tečení a jiné efekty a není v něm potřeba definovat další plochu plasticity (ačkoli v něm je implicitně přítomná, viz [3]).

V Ústavu termomechaniky AV ČR je vyvíjen výpočetní systém PMD (Package for Machine Design), využívající pro řešení MKP (viz také [4]). Z výše uvedených důvodů a jelikož stávající systém PMD umožňuje úplné řešení kombinace izotropního a lineárního kinemického zpevnění, je možno očekávat, že uvedený nelineární model bude snadno implementovatelný. Není potřeba vytvářet žádná nová pravidla pro pohyb druhé plochy ani pro pohyb stávající plochy plasticity vůči druhé.

* CTU in Prague, Faculty of Mech. Engng, Dept. of Mechanics, Technická 4, Praha 6, 16607, Czech Republic, e-mail: papuga@fsk211d.fsid.cvut.cz.

** Czech Academy of Science, Institute of Thermomechanics, Doležalkova 5, Prague 8, 182 00, Czech Republic, e-mail: plessek@it.cas.cz

Program PMD disponuje široce variabilní škálou dalších vlivů (např. závislostí na teplotě, kombinací s creepem atd).

2. KOMBINOVANÉ ZPEVNĚNÍ

Struktura konstitutivních vztahů v systému PMD [1] nemá striktně oddělenou izotropní a kinematickou složku tak, jak je tomu např. v klasické kombinaci obou modelů [3]. Základem je zde naopak popis celkového zpevnění. Podmínka plasticity je zapsána jako

$$f = f_Y(\sigma - \mathbf{X}) - Y(p, T), \quad (1)$$

kde f_Y je mezní funkce s posunutým středem z nuly do $\mathbf{X}$ (tzv. kinematický tenzor - *backstress*) a funkce Y je zobecněná mez kluzu, závislá na akumulované plastické deformaci p a na teplotě T . Tvar funkce Y je redukovatelný do jednoosé podoby

$$Y(p, T) = \sigma_Y(p, T) - Q_Y(p) \quad (2)$$

Funkce σ_Y zde odpovídá průběhu meze kluzu v tahu nebo tlaku (u von Misesova modelu obě varianty splývají), Q_Y je kinematický parametr při jednoosém namáhání a obě tyto funkce jsou závislé na hodnotě akumulované plastické deformace p , definované pomocí

$$dp = \sqrt{\gamma d\epsilon^p : d\epsilon^p} \quad (3)$$

kde definitorický parametr $\gamma = 2/3$ pro materiály neovlivňované hydrostatickým napětím.

Podmínka konzistence na hranici, jež zaručuje, že se napěťový stav nepřesune vně plochy plasticity ($df = 0$), bude vypadat takto

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} : d\mathbf{X} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot dp + \frac{\partial f}{\partial T} \cdot dT = 0 \quad (4)$$

Označme jako plastický modul parametr H a položíme ho roven

$$\frac{\partial \sigma_Y}{\partial p} = H \quad (5)$$

a podobně modul kinematického zpevnění Q

$$\frac{\partial Q_Y}{\partial p} = Q. \quad (6)$$

Zároveň je z rovnice (1) zřejmé, že platí

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}. \quad (7)$$

Při dosazení všech předešlých vztahů do rovnice (4) dostaneme po úpravě

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma - \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\mathbf{X} - H \cdot dp + Q \cdot dp - \frac{\partial \sigma_Y}{\partial T} \cdot dT = 0. \quad (8)$$

Zároveň můžeme při bližším pozorování odvodit, že mohou nastat tyto stavy:

- $Q = 0$ čistě izotropní zpevnění
- $H = Q$ čistě kinematické zpevnění
- $H > Q$ kombinace vedoucí k cyklickému zpevňování
- $H < Q$ kombinace vedoucí k cyklickému změkčování

Pokud předpokládáme, že přírůstek kinematické složky závisí pouze na modulu kinematického zpevnování, můžeme podmínku konzistence (4) rozdělit na dvě samostatné rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\mathbf{X} = Q \cdot dp . \quad (9)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma - \frac{\partial \sigma_Y}{\partial T} \cdot dT = H \cdot dp . \quad (10)$$

Popišme směr plastického toku vztahem

$$d\epsilon^p = d\lambda \cdot \mathbf{R} , \quad (11)$$

kde symbol $\mathbf{R}$ představuje směrový tenzor, který pro případ asociovaného zákona tečení nabývá tvaru

$$\mathbf{R} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} . \quad (12)$$

Pak jednou z možností zápisu Pragerova evolučního zákona pro popis změny polohy kinematického parametru může být nejen vztah

$$d\mathbf{X} = \frac{2}{3} C d\epsilon^p , \text{ zde pak lze ověřit, že } C = Q \quad (13)$$

$$dX = C d\epsilon^p \dots \text{pro jednoosou napjatost}$$

ale může existovat i jiný typ zápisu

$$d\mathbf{X} = \kappa \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} . \quad (14)$$

Mezi oběma tvary Pragerova evolučního zákona tedy existuje tato závislost

$$\kappa = \frac{2}{3} C d\lambda . \quad (15)$$

Nyní ze vztahů (9) a (14) lze vyjádřit multiplikátor κ jako

$$\kappa = \frac{Q \cdot dp}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \frac{\partial f}{\partial \sigma}} , \quad (16)$$

Případně lze pro von Misesovu plochu plasticity v rovnici (16) dále upravit jmenovatel

$$\kappa = \frac{2}{3} \cdot Q \cdot dp . \quad (17)$$

Vztah (10) poslouží k výpočtu přírůstku plastické deformace. Při použití zobecněného Hookeova zákona se zavedeným vlivem teploty lze psát

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot (d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl}^p - d\epsilon_{kl}^0) + D_{Tij} \cdot T . \quad (18)$$

Kromě hodnot přírůstku celkové a plastické poměrné deformace je sem zaveden ještě přírůstek deformace od dalších vlivů (teplotní dilatace, creep atd.). Aby kombinace vztahu (10) a rovnice (18) vedla ke kýženému výpočtu přírůstku plastické deformace, je potřeba ještě určit funkční závislost mezi přírůstkem plastické deformace $d\epsilon^p$ a přírůstkem akumulované plastické deformace dp . Získáme jej odvozením ze vztahu (3):

$$dp \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma}}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \frac{\partial f}{\partial \sigma}}} \right) = dp \cdot \mathbf{p} = \sqrt{\gamma} d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \sqrt{\gamma} d\epsilon^p \quad (19)$$

Zde $\mathbf{p}$ představuje normovaný gradient mezní funkce. Ve speciálním případě použití Misesovy plochy plasticity a pro materiál plasticky nestlačitelný (tj. případ, kdy $\gamma = 2/3$) pak tuto závislost můžeme dále zjednodušit:

$$d\epsilon^p = \frac{\mathbf{p} dp}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = dp \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (20)$$

Na základě kombinace vztahů (9), (18) a (19) můžeme psát

$$dp = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot D_{ijkl} \cdot (d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl}^0) - \frac{\partial \sigma_{\gamma}}{\partial T} dT}{H + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnpq} \cdot \frac{\rho_{pq}}{\sqrt{\gamma}}} \quad (21)$$

3. ARMSTRONGŮV-FREDERICKŮV MODEL

Tento model, v tomto případě upravený Lemaitrem a Chabochem v [3], vychází z kritéria plasticity ve tvaru

$$f = J_2(\sigma - \mathbf{X}) - k, \quad (22)$$

Problém proporcionality mezi změnou plastické deformace a kinematickým parametrem, který jsme při použití Pragerova zákona uvedli v úvodu, je vyřešen adicí paměťové složky (*recall term*) k původnímu tvaru (13). Tato superpozice zavede do evoluce kinematického parametru (a potažmo i do evoluce napětového a deformačního stavu) nelinearitu a závislost na deformační cestě

$$d\mathbf{X} = \frac{2}{3} C d\epsilon^p - \eta \mathbf{X} dp. \quad (23)$$

Oproti původnímu lineárnímu Pragerovu modelu ve vztahu (23) vystupuje navíc materiálová charakteristika η obsažená v paměťové složce.

Porovnejme nyní oba dva předložené modely ve všech třech prostorových dimenzích. S využitím podmínky konzistence na ploše plasticity lze ve shodě s Chabochem [3] a na základě rovnic (22) a (23) odvodit

$$d\epsilon^p = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma}. \quad (24)$$

Zde h představuje modul zpevnění, který pro Misesovu plochu plasticity nabývá tvaru

$$h = C - \eta \mathbf{X} : \frac{\partial f}{\partial \sigma} = C - \sqrt{\frac{3}{2}} \eta \mathbf{X} : \mathbf{n} = C - \frac{3}{2} \eta \mathbf{X} : \frac{\mathbf{s} - \mathbf{X}}{J_2(\sigma - \mathbf{X})} = C - R_i. \quad (25)$$

Člen odvozený z paměťové složky nyní obsahuje skalární součin tenzorů a je označen jako R_i . Jako $\mathbf{s} - \mathbf{X}$ je v tomto vztahu popsán deviátor tenzoru $\sigma - \mathbf{X}$. Abychom mohli určit podobnost se vztahy z odst. 2 používanými v PMD, musíme do (24) doplnit závislost (19). Potom

$$h \cdot dp = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma. \quad (26)$$

Tento vztah odpovídá zápisu v (10), je zde však použit modul zpevnění h , určený z (25).

Hledejme nyní vztah analogický ke vztahu (9). Použijeme-li pro úpravu základního vztahu (23) vztah (20) (a předpokládáme tak Misesovu plochu plasticity a nestlačitelný materiál) a posléze přenásobíme celý vztah gradientem plochy plasticity, dostaneme:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\mathbf{X} = \left(C - \eta \mathbf{X} : \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \cdot dp = q \cdot dp, \quad (27)$$

kde nový modul kinematického zpevnění q

$$q = C - \eta \mathbf{X} : \frac{\partial f}{\partial \sigma} = C - R_t. \quad (28)$$

Opět platí, že vztahy (9) a (27) jsou shodné až na hodnotu modulu kinematického zpevnění.

V případě čistě kinematického zpevnění lze při jednoosé napjatosti získat výsledný přírůstek napětí analyticky a získat tak vhodný zdroj pro porovnání úspěšnosti implementace modelu. Proto budeme další odvození provádět právě pro tento případ. Můžeme tedy získat při dosazení stavu jednoosé napjatosti do vztahu (23)

$$dX = C d\varepsilon^p - \eta X |d\varepsilon^p| = [C - \eta X] d\varepsilon^p = \left(1 - \operatorname{sgn}(d\varepsilon^p) \frac{\eta}{C} X \right) C d\varepsilon^p, \quad (29)$$

Integrací vztahu (29) dostaneme vztah pro přímý analytický výpočet hodnoty kinematického parametru při znalosti plastické deformace, který nám bude posléze sloužit pro určení míry shody naší implementace modelu s původním řešením

$$X = \operatorname{sgn}(d\varepsilon^p) \frac{C}{\eta} + \left(X_0 - \operatorname{sgn}(d\varepsilon^p) \frac{C}{\eta} \right) \exp \left[-\eta (\varepsilon^p - \varepsilon_0^p) \operatorname{sgn}(d\varepsilon^p) \right]. \quad (30)$$

Hodnoty s indexem 0 odpovídají počátečním hodnotám při poslední změně směru zatěžování.

4. IMPLEMENTACE

Vzhledem k již komentované podobnosti mezi vztahy (9) a (27) a mezi (10) a (26), je možno zachovat strukturu algoritmu stávajícího modelu obsaženého v PMD (sekce 2). Rozdíl bude spočívat v odlišném způsobu výpočtu plastického a kinematického modulu. Porovnáním vztahů (25), (28), spolu s uvažováním vztahu (13) lze vyjádřit závislost:

$$h = q = H - R_t = Q - R_t = C - \eta \mathbf{X} : \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dots \dots \text{pro kinematické zpevnění} \quad (31)$$

Oproti původnímu modelu, využívajícímu pouze vztahy (5) a (6), je třeba oba dříve používané moduly H a Q snížit o násobek vnitřního součinu kinematického parametru a gradientu k ploše plasticity v bodě, v němž se stav napjatosti nachází. Tato provedená změna pak zajišťuje převod mezi Armstrongovým – Frederickovým modelem a nově vytvořenou implementací a není potřeba již dále měnit postup výpočtu ve vztazích (14) a (16).

Jediným místem vstupu oprav do PMD proto bude místo definice plastického a kinematického modulu, kam bude potřeba přidat výpočet a odečtení paměťové složky. Oba moduly jsou definovány jako okamžité derivace závislostí $\sigma_Y = g_1(p)$ a $Q_Y = g_2(p)$, kde funkce g_i jsou zadány uživatelem. Hodnoty σ_Y a Q_Y jsou proměnnými závislými na okamžité hodnotě akumulované plastické deformace. Pro určení jejich hodnot slouží samostatná procedura, která na základě zadání a stavu akumulované plastické deformace vyčíslí jejich hodnotu.

Abychom zachovali variabilitu zadání i v případě dalšího rozvoje Armstrongova-Frederickova modelu, je místo konstantní hodnoty η zaveden do požadavků na zadání podobný způsob implementace, tentokrát to však je závislost celé paměťové složky na vnitřním součinu kinematického parametru a gradientu k ploše plasticity. Pak Chabocheův předpoklad konstantní hodnoty η odpovídá požadavku lineárního růstu paměťové složky se směrnici η v závislosti na tomto skalárním součinu.

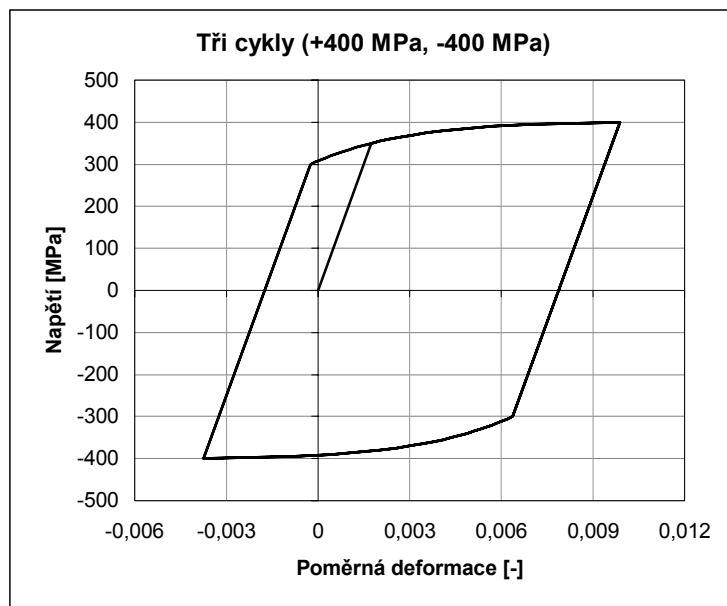
Závisle proměnná paměťová složka je zařazena mezi ostatní závisle proměnné definované při zadávání konkrétní úlohy a je umístěna na první prázdnou pozici. Vzhledem k charakteru implementace platí, že není-li tato položka uživatelem specifikována, nabývá paměťová složka nulové hodnoty a zůstává tak čistě kinematický model s von Misesovou plochou plasticity a Pragerovým evolučním zákonem v jeho lineární podobě. To znamená, že není potřeba dále ošetřit rozdíl mezi použitím lineárního a nelineárního evolučního zákona. Pro rozlišení použitého modelu je postačující způsob zadání.

5. TESTOVACÍ PŘÍKLADY

Pro ověření správnosti implementace byl využit analytický vztah (30) popisující závislost mezi okamžitými hodnotami kinematického parametru a plastické deformace. Protějškem byla úloha BEAM56P4, popsaná v manuálu [4]. Jedná se o vetknutý nosník, namáhaný v tahu-tlaku, který je modelován 4 šestistěny. Materiálové vlastnosti jsou: modul pružnosti $E = 200000$ MPa; Poissonovo číslo $\nu = 0,3$ a dále

P [-]	s_y [MPa]	Q_y [MPa]
0,000	350	0
0,015	650	300
0,040	1150	800

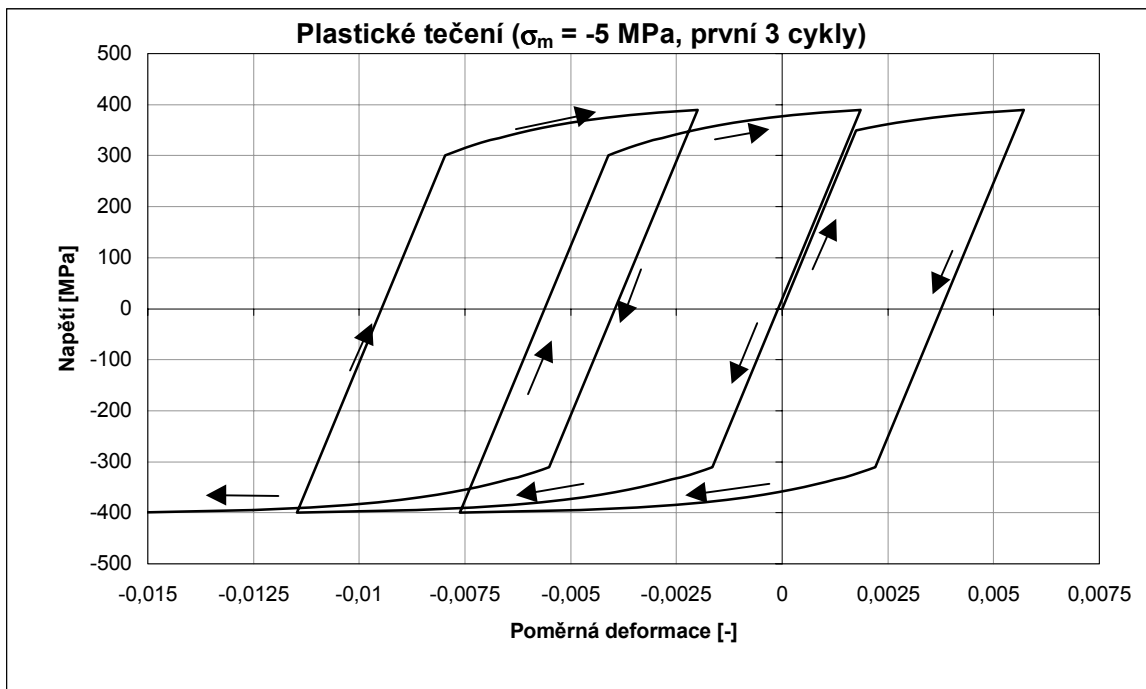
Jediný další vstup, který danou úlohu odlišuje od lineárního kinematického zpevnování je směrnice paměťové složky daná hodnotou η , za kterou byla jako příklad dosazena hodnota $\eta = 380$, uvedená v textu [3]. Jsou zadány tři cykly zatěžování v intervalu $\langle 400; -400 \rangle$ MPa.



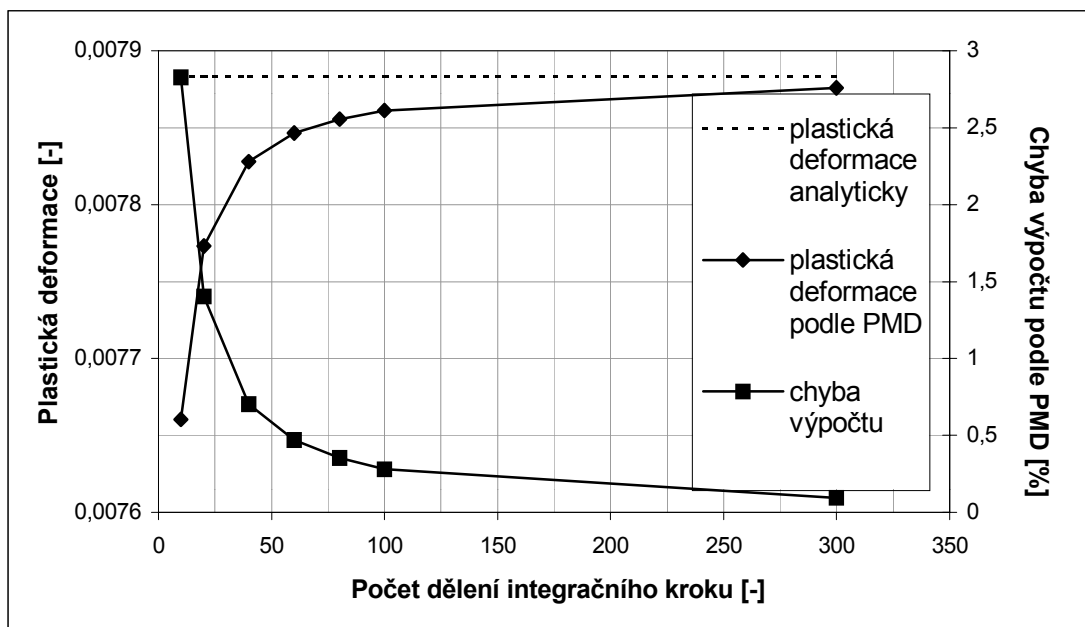
obr. 1 Analyticky vypočtený průběh závislosti napětí-deformace při symetrickém cyklu.

Na obr. 1 je zakreslen průběh napětí v závislosti na deformaci pro první tři cykly získaný z analytického modelu (30). Již po prvním cyklu se hysterezní smyčka stabilizuje. Podobně na obr. 2 je zobrazen průběh plastického tečení pro první tři cykly při zatěžování v rozsahu (390; -400) MPa.

obr. 2 Analyticky určený průběh napětí-deformace při nenulové střední složce napětí,



kdy dochází k plastickému tečení (ratchettingu).



obr. 3 Výpočetní chyba popsání implementace oproti analytickému řešení v závislosti na dělení integračního kroku. Implicitní hodnota dělení je 10. Výpočet proveden pro jediný cyklus zatěžující do 400 MPa.

Pro prvotní porovnání bylo zatěžování zjednodušeno a to na jediný cyklus zatěžující tyč do 400 MPa. Výsledky ve formě plastické deformace dosažené na konci zatěžování jsou zobrazeny na obr. 3. Na tomto grafu je také zobrazena závislost řešení na počtu dělení integračního kroku $NINT$, který je definován z

$$\frac{\sigma_y}{NINT * E} = \Delta \epsilon . \quad (32)$$

Implicitní nastavení v PMD je dáno hodnotou $NINT = 10$. V případě původního obecného modelu PMD, který kombinuje izotropní model a lineární kinematický model zpevnění je v [1] uvedeno, že tato hodnota je plně postačující a dostatečnou přesnost zachovává model ve většině případů i pro $NINT = 1$. Při bližším prohlédnutí závislostí uvedených na obr. 3 ale musíme konstatovat že implicitní nastavení hodnoty $NINT$ vede k poměrně značné, takřka tříprocentní chybě. Zvětšováním počtu dělení se přesnost integrace zvětšuje a chyba vůči analytickému řešení klesá na 1 procento při $NINT = 30$ a pod 5 promile při $NINT = 60$. Toto zpřesňování je samozřejmě doprovázeno nárůstem výpočetního času.

Takřka identické jsou hodnoty i charakter poklesu chyby řešení pro výsledky dosažené pro všechny tři zatěžovací cykly v symetrické i nesymetrické podobě.

6. ZÁVĚR

V příspěvku je popsána numerická implementace modelu zobecněného nelineárního kinematického zpevnění do již existujícího modelu plasticity vytvořeného v MKP systému PMD, dosud sestávajícího pouze z kombinace izotropního a lineárního kinematického zpevnění. V článku je uveden původní zobecněný model, do kterého je implementace vytvářena, dále je zde popsán Armstrongův-Frederickův model nelineárního kinematického zpevnění a posléze je odvozen a sestaven přechod mezi oběma popisy, umožňující jejich propojení. Dále je popsán konkrétní způsob zavedení popsaného řešení do PMD, ovlivnění struktury programu a forma a změny v zadávání materiálových parametrů. V závěrečné části jsou uvedeny testovací příklady, ve kterých jsou porovnávána numerická řešení s analyticky získanými hodnotami a sledována je chyba integrační metody.

Implementace modelu proběhla zdařile – tomu napovídá asymptotické snižování vznikající chyby s růstem počtu dělení integračního kroku. Na obr. 3 je sice zobrazen průběh snižování chyby pouze pro jednorázové zatížení, při ověřování však byly podrobně sledovány i odchylky od analytického řešení při testování třemi cykly s vlivem i bez vlivu plastického tečení. Vzhledem k úspěšnému průchodu testovacími procedurami bude potřeba dále analyzovat úspěšnost tohoto řešení vůči skutečným experimentálně naměřeným hodnotám při prostorové napjatosti. To je cílem právě probíhajících prací.

Práce byla finančně podporována výzkumným záměrem J04/98:212200008 a grantem GA ČR 101/99/0834.

7. LITERATURA

- [1] PLEŠEK J., KRÍSTEK A., POŽIVILOVÁ A., GABRIEL D.: Implementation of a mixed hardening model for thermo-elasto-plastic analysis, In: Computational Mechanics, Eds. Idelsohn, S. et al., Barcelona, CIMNE, 1998, s. 1-12.
- [2] ARMSTRONG P. J., FREDERICK C. O.: A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, G.E.G.B. Report RD/B/N 731.
- [3] LEMAITRE J., CHABOCHE J. L.: Mechanics of solid materials, Cambridge University Press, 1990.
- [4] PLEŠEK J., GABRIEL D.: PMD Example Manual, Prague, IT AS CR, 2000, 318s.